МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (21). 2016

УДК 511.0

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА: ГЕОМЕТРИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО

Р. Р. Пименов

В статье изучается обобщение теоремы Дезарга, основанное на понятии перпендикулярности и новом понятии «соединитель». Рассматриваются приложения этого обобщения в планиметрии и стереометрии и указывается связь с теоремой о пересечении высот треугольника и с теоремой Хьемслева-Морли.
Ключевые слова: Теорема Дезарга, основания геометрии, перпендикулярность, геометрия прямых, стереометрия.

1. Введение

Предлагаемая статья имеет две цели, первая: продемонстрировать важную геометрическую идею, для которой теорема Дезарга – пробный камень. Идеи геометрии перпендикулярного применимы не только к теореме Дезарга, но и к теореме Паппа, и к другим теоремам проективной геометрии. Геометрия перпендикулярного кардинально расширяет общеизвестный принцип двойственности (о замене точек на прямые и прямых на точки в теоремах проективной геометрии). Вместо точек и прямых геометрия перпендикулярного говорит об *элементах*, каждый из которых может быть точкой или прямой. Следующий раздел статьи вводит необходимые определения, из которых важнейшее — понятие *соединителя*, формулируется обобщенная теорема Дезарга. В теореме фигурируют *элементы*, подставляя вместо элемента точку или прямую, мы получаем планиметрическое утверждение. Такое рассмотрение мы называем *планиметрической реализацией* обобщенной теоремы Дезарга. Получающиеся теоремы интересны и сами по себе, и в связи с классическими теоремами геометрии. Обнаруживается неожиданная связь обобщенной теоремы Дезарга и теоремы о высотах треугольника.

Затем обсуждается *стереометрическая реализация* обобщенной теоремы Дезарга, вводится понятие обобщенного треугольника или трехсторонника и обнаруживается связь с теоремой Хьемслева–Морли, обобщающей теорему о пересечении перпендикуляров треугольника. Вторая цель статьи следует из ее названия. Изучение обобщений теоремы Дезарга – частая тема в современной научной литературе, см., например, [1]. Для разминки мы приведем сейчас простое развитие теоремы.

Общеизвестная формулировка теоремы Дезарга гласит: *даны два* ***треугольника*** *с вершинами A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом треугольники находятся в проективном соответствии, т. е. прямые, проведенные через соответственные пары их вершин, конкурентны: A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения продолжений соответственных сторон указанных треугольников лежат на одной прямой: $A_1B_1 \bigcap A_2B_2$, $B_1C_1 \bigcap B_2C_2$, $A_1C_1 \bigcap A_2C_2$ коллинеарны. Верно и обратное – если три точки пересечения продолжений сторон треугольников коллинеарны, то прямые, проходящие через их соответственные вершины – конкурентны.* В этой формулировке избыточно слово «треугольник». Мы можем сформулировать начало теоремы так: даны три пары точек: $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$, $\{C_1, C_2\}$, такие, что три прямые, проведенные через каждую пару точек – конкурентны, а остальную часть теоремы оставить неизменной. Станет неясно, продолжения сторон каких именно треугольников имеются в виду, ведь из трех пар точек можно составить 4 пары треугольников (так, чтобы в каждом треугольнике лежала всего одна вершина из каждой пары точек). Но это и не имеет значения. Если треугольники A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 находятся в проективном соответствии, то любые рассматриваемые пары треугольников находятся в проективном соотвествии, например пара треугольников A_2, B_1, C_1 и A_1, B_2, C_2. Индексы (1, 2) внутри пары точек мы можем менять произвольно. И для каждой из четырех возможных пар треугольников будет выполняться теорема Дезарга о том, что пересечения продолжений соответственных сторон коллинеарны. Поэтому мы можем выразить теорему Дезарга в более общем, комбинаторном виде: *если три прямые, проведенные через пары точек $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$, $\{C_1, C_2\}$, конкурентны, то при любых индексах i, $\acute{i}$; j, $\acute{j}$; k, $\acute{k}$, равных 1 или 2, и одноименные индексы не равны друг другу, точки $A_iB_j \bigcap A_{\acute{i}}B_{\acute{j}}$, $B_jC_k \bigcap B_{\acute{j}}C_{\acute{k}}$, $A_iC_k \bigcap A_{\acute{i}}C_{\acute{k}}$ коллинеарны.* Громоздкое обозначение выражает простую мысль: из каждой пары точек мы взяли одну точку (индексы i, j, k), а потом – оставшиеся (индексы $\acute{i}$, $\acute{j}$, $\acute{k}$), и построили треугольники, указанные в теореме Дезарга. Легко видеть, что всего есть четыре прямые (по числу способов разбиения пар или выбора индексов), на которых лежат построенные точки пересечений. Теперь сделаем следующий шаг. Поскольку верно и обратное утверждение: если продолжения сторон двух треугольников пересекаются в коллинеарных точках, то треугольники находятся в проективном соответствии, т. е. если при каком-то разбиении на пары три рассматриваемые точки пересечения лежат на одной прямой, то пары точек $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$, $\{C_1, C_2\}$ определяют три конкурентные прямые. Но тогда и при другом разбиении на треугольники продолжения соответственных сторон пересекутся в коллинеарных точках. Поэтому верно утверждение: *если при каких-то i, j, k, равных 1 или 2, точки пересения $A_iB_j \bigcap A_{\acute{i}}B_{\acute{j}}$, $B_jC_k \bigcap B_{\acute{j}}C_{\acute{k}}$, $A_iC_k \bigcap A_{\acute{i}}C_{\acute{k}}$ коллинеарны, то эти точки коллинеарны и при любых других i, j, k.*

Для дальнейшего в изложенном нам существенно, что понятие «треугольник» ограничивает рамки теоремы Дезарга, на самом деле важно, что речь о трех парах точек (далее вместо точек будут рассматриваться пары различных подпространств), определяющих три конкурентные прямые. А рассмотрение пар элементов, выраженное ранее в громоздких индексах в несколько другом виде, появится при изучении 13 возможных обобщений теоремы Дезарга, сделанных с помощью понятия перпендикулярности в следующей части.

2. Понятие соединителя и формулировка обобщенной теоремы Дезарга

Сформулируем планиметрическую теорему о взаимных перпендикулярах двух треугольников, а потом укажем, как следует обобщить теорему Дезарга, чтобы сформулированная теорема стала ее частным случаем.

Теорема 2.1. ***О взаимных перпендикулярах.*** *Даны два треугольника.* ***Вершины*** *первого A_1, B_1, C_1,* ***стороны*** *второго A_2, B_2, C_2. Опустим из вершин первого треугольника перпендикуляры на одноименные стороны второго. Если эти три перпендикуляра конкурентны, то и три перпендикуляра, опущенные из вершин второго треугольника на соответственные стороны первого, – конкурентны.*

Прежде всего поясним соответствие между вершинами второго треугольника и сторонами первого. Соответствие между вершинами первого и сторонами второго уже задано через одноименность вершин и сторон. Каждая вершина второго треугольника принадлежит двум его сторонам, каждая сторона первого треугольника соединяет две его вершины. Вершина, соединяющая две стороны второго треугольника, будет соответствовать стороне первого, соединяющей две одноименные вершины первого треугольника. Все это видно на чертеже теоремы о взаимных перпендикулярах (см. рис.1). Исходные прямые A_2, B_2, C_2 и перпендикуляры на них показаны сплошными линиями, прямые A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 и перпендикуляры на них – пунктирными. Исходные перпендикуляры пересекаются в точке O, построенные согласно требованию теоремы — в точке W.

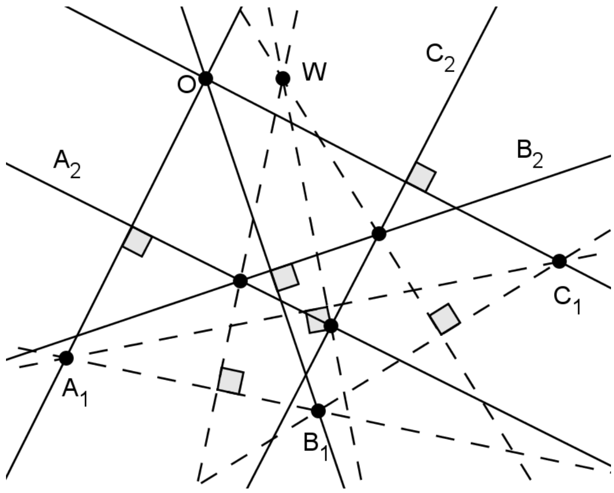

Рис. 1. Теорема о взаимных перпендикулярах

Доказательство этой теоремы мы давать не будем. Проверить же истинность любого планиметрического утверждения сейчас нетрудно, используя компьютерные программы, например geogebra. Покажем, каким образом данная теорема появляется из теоремы Дезарга.

Теорема Дезарга начинается с указания двух троек элементов: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Все эти элементы в теореме — точки. Далее мы по-разному соединяем элементы этих пар и утверждаем, что если в результате этих соединений какие-то прямые пересекаются в одной точке, то какие-то другие точки лежат на одной прямой. Мы можем считать первые шесть элементов не точками, а прямыми, и из-за принципа двойственности получить истинное утверждение. В данном случае мы снова получим теорему Дезарга, так как теорема Дезарга двойственна сама себе. Мы говорим о *соединении*, объединяя в этом слове два факта: точка пересечения двух прямых *соединяет* две эти прямые, прямая, проходящая через две точки, *соединяет* эти точки. Если бы у нас была возможность говорить о соединении точки и прямой, мы бы смогли рассмотреть случай, когда A_1, B_1, C_1 – точки, а A_2, B_2, C_2 – прямые. Оказывается, такая возможность есть: соединением точки и прямой является перпендикуляр, опущенный из точки на прямую. Дадим определение.

Определение 2.1. *Соединителем точки и прямой называется перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, соединителем точки и точки называется прямая, проходящая через данные точки, соединителем прямой и прямой называется точка их пересечения. Соединитель двух элементов A и B (под элементом мы понимаем точку или прямую) обозначим $S(A, B)$.*

Обобщим теперь с помощью понятия *соединителя* понятия коллинеарности точек и конкурентности прямых. Три прямые A, B, C конкурентны тогда и только тогда, когда у них есть общий соединитель, т.е. $S(A, B) = S(B, C) = S(A, C)$. Три точки A, B, C коллинеарны в этом же случае. Если A и B – точки, C – прямая, то равенство $S(A, B) = S(B, C) = S(A, C)$ означает, что прямая, проходящая через точки A и B, перпендикулярна C. Остается случай, когда A и B – прямые, а C – точка. Согласно определению соединителя, соединитель S(A, B) – точка, а соединитель $S(B, C)$ – прямая, и потому равенство $S(A, B) = S(B, C)$ невозможно. Но возможно, что A и B – *параллельные* прямые. Естественно считать соединителем параллельных прямых прямую, перпендикулярную им обеим. Но этот случай выпадает из данного нами определения соединителя, случай параллельности мы не рассматривали, как и поступают обычно в проективной геометрии.

Замечание 2.1. ***О параллельных прямых и их соединителях.*** *Именно случай параллельности прямых и наводит на мысль о понятии соединителя. Но именно он и создает некоторые трудности для него. У параллельных прямых исчезает точка пересечения, но взамен появляется прямая, перпендикулярная им обеим. Но таких прямых много, и нет возможности исходя из двух данных параллельных прямых A и B указать, какой именно их общий перпендикуляр является их соединителем. Также нарушается данное в определении соединителя свойство, что соединителем двух прямых является точка – соединителем двух параллельных прямых будет прямая. Поэтому случаи параллельности прямых в данной статье мы либо обходим, либо рассматриваем особо.*

Замечание 2.2. ***О симметриях и соединителях.*** *Проще определить соединитель с помощью симметрии, используя идеи Бахмана [2]. Произвольный элемент P (точка или прямая, если речь идет о плоскости, а не о многомерном пространстве) – определяет симметрию относительно него. Действие его на произвольный элемент X*

обозначим $P(X)$, а композицию симметрий относительно произвольных элементов X и P обозначим, естественно $P \circ X$. Если симметрии относительно P и X коммутируют, мы можем назвать и X – обобщенно перпендикулярными. Соединителем произвольных элементов A и B будет такой элемент C, что симметрия относительно C коммутирует и с симметрией относительно A, и с симметрией относительно B. Легко видеть, что при таком определении соединителя соединитель двух параллельных прямых – любой их общий перпендикуляр, а в остальных случаях это определение совпадает с данным ранее. Мы в этой статье не будем развивать весьма важную связь между понятием соединителя и идеями Бахмана о построении геометрии на основании симметрии.

Резюмируем сделанные наблюдения в определении понятия «общий соединитель».

Определение 2.2. *Мы говорим, что три произвольных не совпадающих друг с другом элемента A, B, C имеют общий соединитель, если $S(A, B) = S(B, C) = S(A, C)$. Случаи, когда среди этих элементов есть параллельные прямые, мы либо не рассматриваем, либо рассматриваем особо. Обратим внимание, что если у A, B, C есть общий соединитель, то композиция симметрий относительно всех них $A \circ B \circ C$ также есть симметрия относительно некоего элемента D.*

Теперь переформулируем с помощью понятия соединителя теорему Дезарга.

Теорема 2.2. *Обобщенная планиметрическая теорема Дезарга.* *Даны две тройки элементов (элементами здесь и далее мы называем точку или прямую) A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Тогда если $S(A_1, A_2)$, $S(B_1, B_2)$, $S(C_1, C_2)$ имеют общий соединитель, то и $S(S(A_1, B_1), S(A_2, B_2))$ и $S(S(A_1, C_1), S(A_2, C_2))$, и $S(S(C_1, B_1), S(C_2, B_2))$ имеют общий соединитель. Верно и обратное утверждение: если названные последними соединители имеют общий соединитель, то названные первыми соединители также имеют общий соединитель.*

Замечание 2.3. *Поясним громоздкую запись о «соединителях соединителей». Это перевод фразы о точке пересечения продолжений сторон треугольников в теореме Дезарга на язык соединителей. Сторона треугольника (точнее, прямая, получающаяся из продолжения стороны) во введенной терминологии соединитель двух вершин треугольника. Точка пересечения соответственных сторон треугольников – соединитель соединителей одноименных вершин. Три элемента,* *о которых идет речь в завершении обобщенной теоремы Дезарга и в частном случае, приводящем к обычной теореме Дезарга (когда все шесть начальных элементов являются точками), есть точки пересечения одноименных сторон треугольников, и наличие у них общего соединителя, утверждаемого в обобщенной теореме в теореме Дезарга, означает, что эти три точки пересечения сами лежат на одной прямой. Разумеется, к обобщенной формулировке можно применить те же комбинаторные соображения, что были приведены к теореме Дезарга во введении. Но мы здесь этим заниматься не будем.*

Из рассмотренного выше видно, что теорема *о взаимных перпендикулярах*, как и было сказано, есть частный случай обобщенной теоремы Дезарга. В этом случае A_1, B_1, C_1 – точки, A_2, B_2, C_2 – прямые. Важно, что при этом прямые, фигурирующие в теореме, не параллельны. Довольно неожиданно, что введение перпендикулярности вместо инцидентности в проективную и евклидову теорему привело к новой, истинной теореме. Встает вопрос: в каких еще теоремах евклидовой геометрии можно применять соединители, получая новые истинные теоремы? Мы проделаем эту работу с теоремой Дезарга и скажем несколько слов о теореме Паппа. Далее мы укажем неожиданную связь конфигурации теоремы Дезарга с теоремой о пересечении высот треугольника и кратко рассмотрим соединители прямых в $\mathbb{R}^3$. Прежде всего зафиксируем: соединитель *точки* и *точки – прямая*, соединитель *прямой* и *прямой – точка*, соединитель *точки* и *прямой – прямая*. Введем обозначения, L – прямая, P – точка, вместо слова «соединитель» используем здесь знак $*$ и получим короткую запись:

$$L * L = P,\ P * P = L,\ L * P = L.$$

3. Планиметрическая реализация

Наполним планиметрическим содержанием обобщенную теорему Дезарга, это можно назвать ее *планиметрической реализацией.* В ней фигурируют обобщенные элементы: точки или прямые. Если все шесть начальных элементов — точки, мы получаем саму теорему Дезарга, если все шесть начальных элементов — прямые, мы получаем снова теорему Дезарга (так как она двойственная сама себе). Если первые три элемента – точки, а вторые три – прямые, возникает «теорема о взаимных перпендикулярах». Какие еще теоремы могут получиться при подстановке вместо «элемента» точки или прямой? Как известно, в обычной теореме Дезарга 10 точек и 10 прямых, всего двадцать элементов. Они строятся из первых шести элементов теоремы двух «треугольников» или трех пар элементов. Каждый из шести элементов имеет две возможности: быть точкой или быть прямой. Тем самым гипотетически возможно $2^6 = 64$ планиметрических утверждения, возникающих из обобщенной теоремы Дезарга. Простая комбинаторика сокращает в разы возникающие случаи. Ниже следует таблица, где указаны все геометрически различные возникающие случаи, сейчас мы поясним структуру и построение этой таблицы[1].

Первый столбец указывает на порядковый номер. Второй столбец указывает на то, чем являются первые шесть элементов обобщенной теоремы. Первые три символа указывают на точки или прямые среди элементов A_1, B_1, C_1, следующие три символа — на A_2, B_2, C_2. Третий столбец указывает на тип (точка или прямая) «сторон» первого «треугольника»: $S(B_1, C_1)$, $S(A_1, C_1)$, $S(A_1, B_1)$, и тип сторон второго «треугольника»: $S(B_2, C_2)$, $S(A_2, C_2)$, $S(A_2, B_2)$; четвертый столбец указывает на соединители одноименных элементов, пятый столбец — на соединители «сторон», шестой столбец — на тип итоговых соединителей (сначала указывается тип соединителя трех элементов, существующий по условию, затем тип соединителя, существование которого утверждает обобщенная теорема). Последний столбец указывает на то, сколько точек и прямых участвует в данном частном случае теоремы. Ниже при рассмотрении случая под номером 2 формирование строк таблицы поясняется на примере.

Таблица 1

Реализации теоремы Дезарга

№	Образующие элементы	«Стороны»	Соед. 1	Соед. 2	Итог	Количество
1	PPP, LLL	LLL, PPP	LLL	LLL	P, P	8P, 12L
2	PPP, LLP	LLL, LLP	LLL	PPL	P, L	8P, 12L
3	PPP, LPP	LLL, LLL	LLL	PPP	P, L	9P, 11L
4	PPP, PPP	LLL, LLL	LLL	PPP	P, L	10P, 10L
5	PPL, LLL	LLL, PPP	LLP	LLL	L, P	7P, 13L
6	PPL, PLL	LLL, PLL	LLP	LPP	L, L	7P, 13L
7	PPL, LLP	LLL, LLP	LLL	PPL	P, L	7P, 13L
8	PPL, PPL	LLL, LLL	LLP	PPP	L, L	8P, 12L
9	PPL, PLP	LLL, LLL	LLL	PPP	P, L	8P, 12L
10	PLL, LLL	PLL, PPP	LPP	LLL	L, P	8P, 12L
11	PLL, PLL	PLL, PLL	LPP	LPP	L, L	8P, 12L
12	PLL, LPL	PLL, LPL	LLP	LLP	L, L	6P, 14L
13	LLL, LLL	PPP, PPP	PPP	LLL	L, P	10P, 10L

[1]Как и во всякой таблице, в ней возможны неточности, и автор будет признателен всем, кто ему на них укажет.

Почему в таблице именно 13 элементов и откуда они берутся? Как было сказано, возможны 64 случая. Но большинство из них одинаковы с геометрической точки зрения. Если мы поменяем местами первую и вторую тройки элементов геометрия теоремы не изменится. Точно так же она не изменится, если мы одновременно в каждой тройке исходных элементов поменяем местами какие-то два элемента. Например, шестерки (LLL, PPP) и (PPP, LLL) геометрически одинаковы (не важно, какую тройку элементов назвать первой, а какую второй). Также геометрически одинаковы, например: (LPL, PLP) и (PLL, LPP) — в обоих тройках поменяли местами первые два элемента. Возможность такой перестановки пар элементов уже обсуждалась во введении, где указывалось, что теорему Дезарга можно мыслить как теорему о трех парах элементов, и не важно, в каком порядке эти пары даны. Применяя указанные соображения, приходим к 13 геометрически различным случаям планиметрической реализации обобщенной теоремы Дезарга. Среди этих тринадцати случаев возможны геометрически совпадающие, например случай 4 указывает на саму теорему Дезарга, а случай 13 — на двойственную ей (точки заменены на прямые), а геометрически это одна и таже конфигурация. Здесь мы ограничимся приведенным анализом и будем искать среди найденных случаи, когда среди элементов теоремы не возникает параллельных прямых. Один такой случай (кроме 4 и 13, описывающих клжассическую теорему Дезарга) нами уже был указан — это первая строка таблицы. Во второй строке также указан подходящий нам случай.

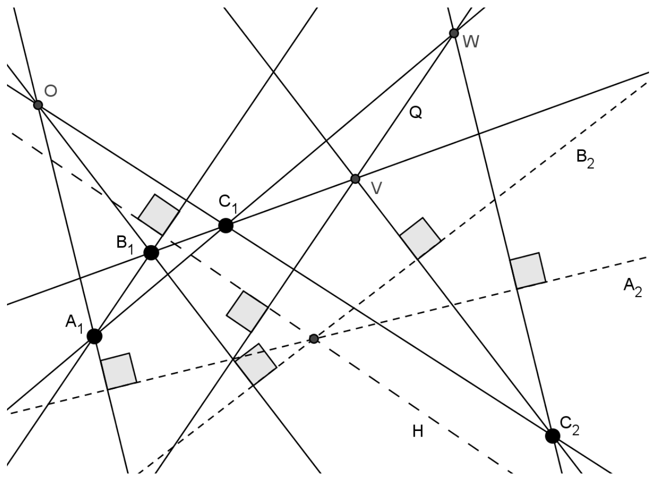

Рис. 2. Теорема второй строки

Поясним формирование таблицы на примере чертежа к ее второй строке (см. рис. 2).

A_1 – точка (обозначено в таблице буквой P), B_1 – точка, C_1 – точка, A_2 – прямая, B_2 – прямая, C_2 – точка. Это указано во втором столбце. Все соединители $S(B_1, C_1)$, $S(A_1, C_1)$, $S(A_1, B_1)$ – прямые, это указано в третьем столбце, первые три символа (именно в таком порядке). $S(B_2, C_2)$ – прямая, $S(A_2, C_2)$ – прямая, $S(A_2, B_2)$ – точка, это вторая тройка третьего столбца. Соединители одноименных элементов это: $S(A_1, A_2)$ – прямая, $S(B_1, B_2)$ – прямая, $S(C_1, C_2)$ – прямая, что указано в четвертом столбце. Соединители соединителей (пятый столбец) мы не будем выписывать формулой, а укажем из чертежа – точка V, точка W, прямая H (отмечено в пятом столбце). Первый символ шестого столбца выражает условие теоремы: три соединителя третьего столбца (прямые) сами имеют общий соединитель (на чертеже точка O), тогда три соединителя четвертого столбца имеют общий соединитель (на чертеже прямая Q). Сформулируем теорему, указанную во второй строке геометрически, не используя терминологию соединителей.

Теорема 3.1. ***Теорема второй строки.*** *Даны три точки A_1, B_1, C_1, две прямые A_2, B_2 и точка C_2. Пусть перпендикуляры, опущенные из A_1 на A_2, из B_1 на B_2, и прямая, соединяющая C_1 и C_2 – пересекаются в одной точке. Проведем прямую A_1B_1 и опустим на нее перпендикуляр (на чертеже прямая H) из точки пересечения прямых A_2 и B_2, проведем прямую A_1C_1 и построим точку (на чертеже точка W) пересечения ее с перпендикуляром из C_2 на A_2, проведем прямую B_1C_1 и построим точку (на чертеже точка V) пересечения ее с перпендикуляром из C_2 на B_2. Тогда, утверждает теорема, прямая, проходящая через две построенные точки W и V, всегда перпендикулярна прямой H.*

Такой анализ каждой строки таблицы занял бы много времени. Часто таблица дает случаи параллельности. Например, случай PPL среди исходных элементов сразу образует две параллельные прямые: из двух точек опускаются перпендикуляры на одну и ту же прямую, они параллельны, к ним нет единственного соединителя. Случаи, когда среди элементов теоремы есть параллельные прямые, оказываются бессодержательны или требуют отдельного анализа, который весьма интересен, так как он может привести к случаю теоремы Дезарга, когда соответственные стороны исходных треугольников параллельны.

Замечание 3.1. ***О пересечении высот треугольника.*** *Пусть первые три элемента теоремы – точки, а следующие три элемента – прямые. В общем случае это дает «теорему о взаимных перпендикулярах», рассмотренную ранее. Но пусть три последних элемента* *теоремы не произвольные прямые, а прямые, являющиеся соединителями первых трех элементов, т.е. стороны (продолжения сторон) треугольника, вершины которого – первые три элемента теоремы* $A_2{=}S(B_1, C_1)$, $B_2{=}S(A_1, C_1)$, $C_2{=}S(B_1, A_1)$. *В этом случае соединители одноименных элементов – высоты треугольника* A_1, B_1, C_1, *и, как и требует условие теоремы, они пересекаются в одной точке. А соединители одноименных соединителей также высоты треугольника, поэтому заключение теоремы совпадет с ее условием. Конфигурация элементов теоремы о высотах треугольника оказывается частным случаем конфигурации обобщенной теоремы Дезарга, когда некоторые элементы теоремы совпадают, точнее говоря, из 20 элементов (перечисленных в строке таблицы) несовпадающих – ровно половина. Мы вернемся к этой теме о теореме Хъемслева-Морли в следующем разделе. Мы видим, что случаи, когда отдельные элементы теоремы не произвольны, также геометрически важны.*

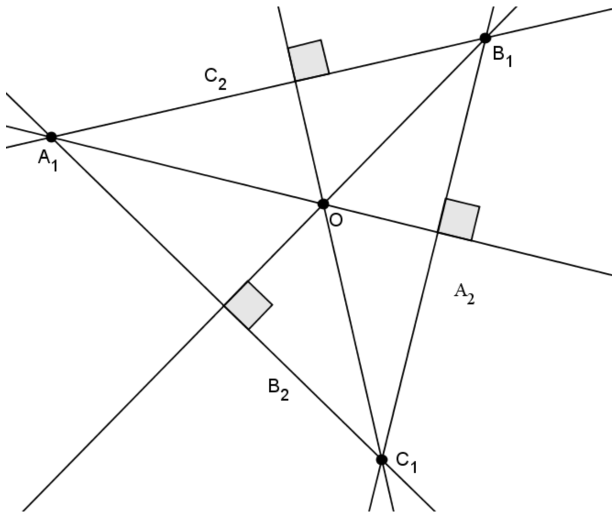

Рис. 3. Конфигурация высот треугольника как дезаргова конфигурация

4. Объемная реализация

Теорема Дезарга формулируется для плоскости, но ее простейшее доказательство использует трехмерное пространство. Поэтому изучим, что же происходит с обобщенной теоремой Дезарга в стереометрии. Прежде всего надо уяснить, что будет *соединителем* в $\mathbb{R}^3$ и какие в нем есть *элементы*, которые можно *соединять*. Элементами в $\mathbb{R}^3$ естественно считать все подпространства: точки, прямые, плоскости. Что является соединителем? В некоторых случаях это очевидно: соединитель двух плоскостей — прямая их пересечения, соединитель двух точек — прямая, на которой они лежат. В других случаях это не так ясно. Что лучше подходит на роль соединителя для точки и прямой: перпендикуляр из точки на прямую или плоскость, в которой они лежат? Чтобы уйти от таких вопросов, мы будем считать элементами обобщенной теоремы Дезарга только прямые.

Определение 4.1. *Соединителем двух непараллельных прямых A и B в $\mathbb{R}^3$ мы называем прямую, перпендикулярную им обеим. Такая прямая (их общий перпендикуляр) существует для любых двух прямых в $\mathbb{R}^3$ и единственна, если исходные прямые A и B непараллельны. Обозначим соединитель A и B, как и в плоском случае, через $S(A, B)$.*

После такого определения соединителя и замечания, что рассматриваемые элементы теоремы обязательно являются прямыми (а не произвольными элементами, как было в плоском случае), мы можем в точности перенести формулировку планиметрической обобщенной теоремы Дезарга в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 4.1. ***Обобщенная объемная теорема Дезарга. Гипотеза.*** *Даны две тройки элементов (элементами здесь и далее мы называем только прямые): A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Тогда, если $S(A_1, A_2)$, $S(B_1, B_2)$, $S(C_1, C_2)$ имеют общий соединитель, то и $S(S(A_1, B_1), S(A_2, B_2))$ и $S(S(A_1, C_1), S(A_2, C_2))$, и $S(S(C_1, B_1), S(C_2, B_2))$ имеют общий соединитель. Верно и обратное утверждение: если названные последними соединители имеют общий соединитель, то названные первыми соединители также имеют общий соединитель.*

Как и в плоском случае, мы не рассматриваем случаи параллельности прямых. Отметим, что планиметрическая обобщенная теорема Дезарга создает разные варианты ее реализации; объемная формулировка предполагает, что все элементы предполагаются прямыми, и сформулирована ясная геометрическая гипотеза. Выразим ее геометрическим языком: даны две тройки прямых в $\mathbb{R}^3$, если общие перпендикуляры соответственных пар прямых сами имеют общий перпендикуляр, то общие перпендикуляры к соответственным общим перпендикулярам данных троек элементов – также имеют общий перпендикуляр.

Замечание 4.1. *Мы полагаем, что истинность сформулированной гипотезы не очень сложно проверить методами линейной алгебры. Но мы не хотим использовать методы линейной алгебры в геометрии перпендикулярного. Вместо этого заметим важную аналогию: конкурентным прямым и коллинеарным точкам (на плоскости) в* *трехмерной геометрии перпендикулярного соответствуют три прямые, имеющие общий перпендикуляр. Ниже мы приведем и другие аналогии между планиметрией и геометрией прямых в трехмерном пространстве. Укажем также важный факт про симметрии: если прямые A, B, C имеют общий перпендикуляр (общий соединитель), то относительно них композиция симметрий $A \circ B \circ C$ обязательно инволютивна и сама есть симметрия относительно некоей прямой, что верно и в плоском случае для конкурентных прямых. Верно и обратное: если $A \circ B \circ C$ есть симметрия относительно некоторой прямой, то A, B, C имеют общий перпендикуляр (или все параллельны, но этот случай мы не рассматриваем). Поэтому пространственная обобщенная теорема Дезарга может быть выражена на языке симметрий методами Бахмана [2].*

Планиметрический треугольник можно обобщить до трехсторонника.

Определение 4.2. ***Определение трехсторонника:*** *фигуру, создаваемую тремя непараллельными прямыми A, B, C в пространстве, назовем трехсторонником. Исходные прямые назовем вершинами трехсторонника, а соединители $S(A, B)$, $S(B, C)$ и $S(C, A)$ – сторонами трехсторонника. Очевидно, можно назвать вершины трехсторонника его сторонами, а стороны — вершинами, так как все эти элементы — прямые, и все соединители взаимны с данными A, B, C, т.е. соединитель соединителя A и B с соединителем B и C есть B, символически это выражается так: $S(S(A, B), S(B, C)) = B$.*

Ф. Бахман в [2] рассматривает симметрии только в планиметрии. Его методами в $\mathbb{R}^3$ нетрудно доказать, что биссектрисы трехсторонника имеют общий перпендикуляр и что высоты трехсторонника также имеют общий перпендикуляр. На последнее мы обратим особое внимание (так как формулировка теоремы о высотах трехсторонника использует только свойство перпендикулярности). Эта теорема известна как теорема Хьемслева–Морли [4].

Замечание 4.2. ***О связи теоремы Хьемслева-Морли и обобщенной теоремы Дезарга.*** *Как и в плоском случае, мы можем рассмотреть частный случай обобщенной теоремы Дезарга в пространстве, когда вторая тройка элементов теоремы является соединителями к первой тройке. В этом случае мы получим именно конфигурацию теоремы о высотах трехсторонника. Интересно также представление этой теоремы с помощью графа Петерсена [3].*

5. Заключение: вопросы и развитие темы

Укажем вопросы — от частного к общему. К таблице планиметрической реализации обобщенной теоремы Дезарга была дана *теорема второй строки*, но точно так же можно исследовать и другие строки таблицы. Можно исследовать геометрией перпендикулярного и теорему Паппа, которая также начинается с шести элементов (двух троек точек, каждая из которых лежит на прямой); в нашем случае она будет формироваться с двух троек элементов, каждая из которых имеет общий соединитель. Остальные элементы теоремы Паппа получаются построением из первых шести, поэтому таблица реализации обобщенной теоремы Паппа напоминает таблицу реализации обобщенной теоремы Дезарга: в ней будет также 13 возможностей. В проводимых черновых исследованиях обнаружены некоторые истинные геометрические утверждения, отвечающие этим возможностям, во всех случаях на чертеже сразу возникали параллельные прямые, характерные для афинной теоремы Паппа [2]. Аналогично можно исследовать и другие теоремы проективной геометрии, а также *все* теоремы планиметрии, в которых говорится только об инцидентности и перпендикулярности.

Интересно исследование «геометрии перпендикулярного» в неевклидовых геометриях. Легко понять, что в эллиптической геометрии мы не будем получать новые содержательные теоремы, так как в ней каждая прямая может быть заменена на ее полюс, каждая точка — на ее поляру. А в геометрии Лобачевского эти идеи могут дать содержательные результаты. Мы можем также переносить методы геометрии перпендикулярного в неевклидову стереометрию.

Мы рассматривали как *элементы* в $\mathbb{R}^3$ только прямые. Если убрать это ограничение и считать элементами также точки и плоскости, то число возможных реализаций обобщенной теоремы Дезарга возрастает, и в них могут скрываться интересные стереометрические теоремы. Если же ограничиться рассмотрением как элементов только прямых в $\mathbb{R}^3$ – открывается перспектива переноса планиметрических теорем в стереометрические: у планиметрической теоремы, где фигурируют только понятия инцидентности и перпендикулярности, появляется аналог в теореме о прямых в $\mathbb{R}^3$. В статье был определен аналог треугольника (трехсторонник) и указан пространственный аналог теоремы о пересечении его высот (теорема Хьемслева–Морли). Мы видим, что прямые трехмерного пространства «скрывают» в себе плоскость (так как для любых двух прямых есть единственный соединитель), это ведет нас к концепции скрытых пространств, о которой речь идет в следующей статье.

Список литературы

1. **Kodokostas D.** Proving and Generalizing Desargues' Two-Triangle Theorem in 3-Dimensional Projective Space. Hindawi Publishing Corporation, Geometry. Volume 2014, Article ID 276108.

2. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р.И. Пименова; под ред. И.М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

3. **Одинец В. П., Шлензак В. А.** Избранные главы теории графов : авторизованный перевод с польск. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «РХД», 2009. 504 с.

4. **Скопенков М.** Наглядная геометрия и топология // http://skopenkov.ru: Mikhail Skopenkov's homepage. URL: http://skopenkov.ru/courses/geometry-16.html (дата обращения: 20.02.2016).

Санкт-Петербургский национальный
исследовательский академический университет *Поступила 22.02.2016*

Summary

Pimenov R. R. The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity

This article studies the generalization the Desargues's theorem with using perpendicularity and the new concept of connector. We research application this generalization in planimetry and stereometry. We discovery connection between this generalization and the theorem about altitudes triangle and the theorem Hjelmslev-Morley.
Keywords: the Desargues's theorem, foundation of geometry, perpendicularity, geometry of lines, stereometry

References

1. **Kodokostas D.** Proving and Generalizing Desargues' Two-Triangle Theorem in 3-Dimensional Projective Space. Hindawi Publishing Corporation, Geometry. Volume 2014, Article ID 276108.

2. **Bachmann F.** Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Volume 96. 1973.

3. **Odyniec W., S'le'zak W.** Selected topics in graph theory. Translated. from pol. by W. Odyniec- M.-Izhevsk: Institute Computer's Research, SRC: "RHD“, 2009. 504 c.

4. **Skopenkov M.** Visual geometry and topology // http://skopenkov.ru: Mikhail Skopenkov's homepage. URL: http://skopenkov.ru/courses/geometry-16.html (date of the application: 20.02.2016).

Для цитирования: Пименов Р. Р. Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 28–43.

For citation: Pimenov R. R. The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2016. №1 (21). Pp. 28–43.