ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (21). 2016

УДК 519.652

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ В-СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ

Н. О. Котелина

Статья посвящена задаче интерполяции точек при помощи В-сплайновых кривых. Рассматриваются методы глобальной интерполяции, при которых составляется и решается система линейных уравнений.
Ключевые слова: NURBS, В-сплайн кривые, интерполяция.

1. Определение NURBS

Пусть заданы натуральные L, m. Рассмотрим узловой вектор $T = (t_0, \ldots, t_{L+m+1})$, где $t_i \in \mathbb{R}$ и $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in 0 \ldots L+m$. Тогда определим базисные функции $N_{k,p}(t)$ степени p рекурсивно: при $p = 0$ это просто постоянные единичные функции в пределах своего диапазона:

$$N_{k,0} = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом $k \in 0 : L+m$.

При $p > 0$, $p \leq m$ определим В-сплайн функции $\{N_{k,p}(t)\}_{k=0}^{L+m-p}$ через функции $(p-1)$-й степени:

$$N_{k,p}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{k+p+1} - t}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1,p-1}(t). \tag{1}$$

Будем считать в случае, когда $t_{k+p} = t_k$ или $t_{k+p+1} = t_{k+1}$, что соответствующее слагаемое в (1) отсутствует.

Пусть есть набор полюсов $\{P_i, \quad i = 0, \ldots, L\}$ и весов $\{w_0, \ldots, w_L\}$, где $w_i > 0$, $i \in 0 : L$.

Построим стыковочные функции вида

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{L} w_k N_{k,m}(t)}. \tag{2}$$

Тогда дробно-рациональная B-сплайновая кривая степени m задается следующим образом [1] – [4]:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{L} P_k R_k(t). \tag{3}$$

Поскольку узловой вектор T обычно берётся неравномерный, т. е. узлы являются неравноотстоящими, то кривая (3) называется NURBS-кривой, где аббревиатура NURBS означает non-uniform rational basis spline (неравномерный рациональный базисный сплайн).

При этом если все веса будут равны между собой, то по свойствам базисных функций [1, с. 57] получаем кусочно-полиномиальную B-сплайновую кривую степени m:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{L} \frac{P_k N_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{L} N_{k,m}(t)} = \sum_{k=0}^{L} P_k N_{k,m}(t). \tag{4}$$

2. Интерполяция с помощью B-сплайновых кривых

Пусть есть набор точек $\{Q_i, \quad i = 0, \ldots, L\}$. Построим кусочно-полиномиальную B-сплайновую кривую C порядка $p+1$ (степени p), которая проходит через эти точки [1]. Для этого найдём полюса $\{P_k\}_{k=0}^{L}$. Сопоставим каждой точке Q_i некоторое значение параметра $\widetilde{u}_i \in [0, 1]$ и подберём соответствующий узловой вектор $U = \{u_0, \ldots, u_m\}$, где $m = L + p + 1$. Получим систему из $L + 1$ уравнения:

$$Q_i = C(\widetilde{u}_i) = \sum_{k=0}^{L} P_k N_{k,p}(\widetilde{u}_i), i = 0, \ldots, L. \tag{5}$$

Следуя [1, с. 364], решим систему относительно точек P_k, $k \in 0, \ldots, L$. Для этого выберем значения параметра $\widetilde{u}_i$ так, как это сделано в [1].

Рассмотрим величину $\widetilde{d}$:

$$\widetilde{d} = \sum_{i=1}^{L} \sqrt{\|Q_i - Q_{i-1}\|}. \tag{6}$$

Тогда положим

$$\widetilde{u}_0 = 0, \quad \widetilde{u}_L = 1, \quad \widetilde{u}_i = \widetilde{u}_{i-1} + \frac{\sqrt{\|Q_i - Q_{i-1}\|}}{\widetilde{d}}, \quad i = 1, \dots, L-1. \quad (7)$$

Теперь найдем узлы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_0 = \dots = u_p = 0, \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1, \\ u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \widetilde{u}_i, \quad j = 1, \dots, L-p. \end{aligned} \quad (8)$$

Этот метод выбора узлов отражает распределение значений параметра $\widetilde{u}_i$ ([1, с. 365]).

ПРИМЕР 1. *Рассмотрим точки* $\{Q_i\}_{i=0}^{27}$ *на плоскости (в [3, с.219] используется 18 узлов и параметрический кубический сплайн). Тогда, используя формулы* (6), (7), (8) *и решая систему* (5) *относительно полюсов* $\{P_i\}_{i=0}^{27}$, *получаем при* $p = 6$ *B-сплайновую кривую (рис. 1).*

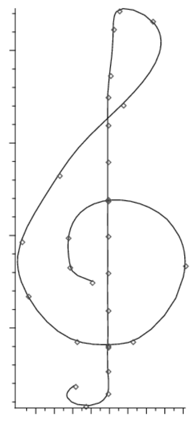


Рис. 1. Интерполяция с помощью B-сплайновой кривой

3. Интерполяция при помощи B-сплайновой кривой с заданием производных

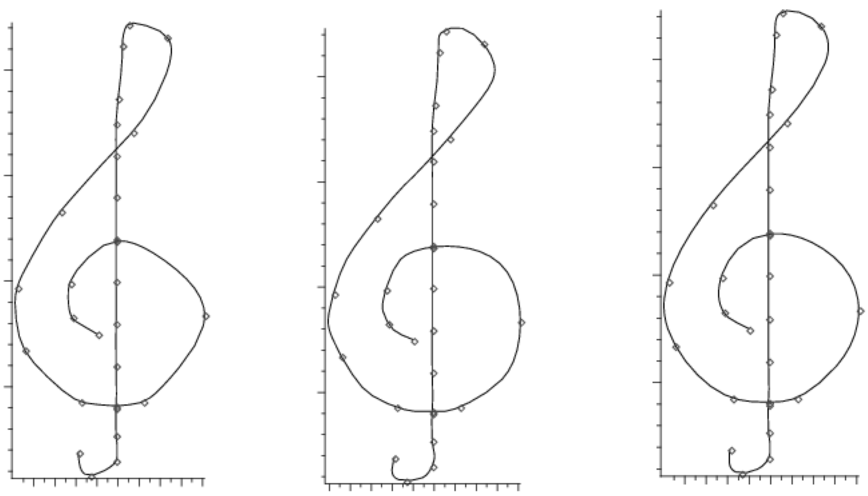
Рассмотрим теперь интерполяцию, при которой задаются не только исходные точки Q_i, $i = 0, \dots, L$, но и производные в этих точках D_i, $i = 0, \dots, L$, определяющие направление касательного вектора к искомой кривой [1]. Таким образом, имеем $2(L+1)$ пар чисел и систему относительно $2(L+1)$ полюсов P_k, $k = 0, \ldots, 2L+1$:

$$\begin{aligned} Q_i = C(\widetilde{u}_i) &= \sum_{k=0}^{2L+1} P_k N_{k,p}(\widetilde{u}_i), \\ D_i = C'(\widetilde{u}_i) &= \sum_{k=0}^{2L+1} P_k N'_{k,p}(\widetilde{u}_i). \end{aligned} \tag{9}$$

Количество узлов в узловом векторе U равно $2(L+1)+p+1$. Сами узлы можно вычислять по формулам, аналогичным (8), например при $p = 3$ имеем:

$$U = \{0, 0, 0, 0, \frac{\widetilde{u}_1}{2}, \frac{2\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2}{3}, \frac{\widetilde{u}_1 + 2\widetilde{u}_2}{3}, \ldots, \\ \frac{\widetilde{u}_{L-2} + 2\widetilde{u}_{L-1}}{3}, \frac{\widetilde{u}_{L-1} + 1}{2}, 1, 1, 1, 1\}.$$

Решая систему (9) при $p = 3$ для точек из Примера 1 при разных значениях D_i, полученных умножением на коэффициент k соответствующих векторов, вычисленных для уравнения B-сплайновой кривой C из пункта 2, а в крайних точках заданных приближенно, получаем B-сплайновые кривые, показанные на рис. 2.



(a) (b) (c)

Рис. 2. Интерполяция B-сплайновой кривой с производными: (a) $k = 0.8$, (b) $k = 1.2$, (c) $k = 1$

4. Методы локальной интерполяции

Также существуют методы *локальной интерполяции* [1, с. 382]. В этом случае по исходному набору точек $\{Q_i, \quad i = 0, \ldots, L\}$ строим сегменты кривых $\{C_i\}_{i=0}^{L}$ таким образом, чтобы точки Q_i и Q_{i+1} были конечными точками сегмента C_i. При этом требуем, например, чтобы выполнялось свойство непрерывности первой производной.

Список литературы

1. **Piegl L., Tiller W.** The NURBS book. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1995 – 1997. 327 p.

2. **Голованов Н. Н.** Геометрическое моделирование. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2002. 472 с.

3. **Завьялов Ю. С. , Квасов Б. И. , Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.

4. **Хилл Ф.** OpenGL. Программирование компьютерной графики. Для профессионалов. СПб.: Питер, 2002. 1088 с.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 20.09.2016*

Summary

Kotelina N. O Interpolation with B-spline curves

This article deals with the problem of interpolation with polynomial B-spline curves. It examines methods of global interpolation when systems of linear equations are set up and solved.
Keywords: NURBS, B-spline curves, interpolation.

References

1. **Piegl L., Tiller W.** The NURBS book. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1995–1997. 327 p.

2. **Golovanov N. N.** Geometricheskoe modelirovanie (Geometric modeling). Moscow: Izd. Fiz.-Mat. Lit., 2002. 472 p.

3. **Zavyalov Y. S. , Kvasov B. I. , Miroshnichenko V. L.** Metody splayn-funkcij (Methods of spline functions). Moscow: Nauka, 1980. 350 p.

4. **Hill F.** OpenGL. Programmirovanie komputernoy grafiki (Computer Graphics Programming). Dlya professionalov. SPb.: Piter, 2002. 1088 p.

Для цитирования: Котелина Н. О. Интерполяция с помощью B-сплайновых кривых // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 3–8.

For citation: Kotelina N. O. Interpolation with B-spline curves // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2016. №1 (21). Pp. 3–8.