Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 681.511.4

Хаос и порядок в интегральных широтно-импульсных системах управления

Н. А. Антонова

Получены необходимые и достаточные условия для существования и нестабильности периодических колебаний с заданным числом импульсов на периоде в системах управления с интегральным широтно-импульсным модулятором.

Для систем управления с интегральным широтно-импульсным модулятором (ИШИМ) и постоянным внешним возмущением достаточно глубоко исследована проблема существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний в случаях непрерывной линейной части системы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Для таких колебаний были получены достаточные условия существования и устойчивости, которые весьма слабо зависят от свойств модулятора ИШИМ, практически неэффективны для систем первого порядка и далеки от необходимых [1, 2]. Кроме того, представляет интерес задача локальной неустойчивости периодических решений, т.е. исследование детерминированного хаоса [3]. В данной работе для одномерных систем управления с ИШИМ приводится описание областей в пространстве параметров системы, в которых существуют как устойчивые, так и неустойчивые периодические колебания с одним или несколькими импульсами на периоде.

Описание системы.

Одномерная интегральная широтно-импульсная система управления определяется уравнением вида

$$\frac{T}{\alpha}\frac{dU}{dt}+U=\varphi,\quad \sigma=\psi-U, \qquad (1)$$

где U(t) описывает состояние системы в момент t, $\alpha > 0$ — параметр непрерывной линейной части системы, $T > 0$ — период модуляции импульсного элемента, σ — сигнал на входе импульсного элемента, ψ — постоянное внешнее воздействие на систему. Выход φ интегрального широтно-импульсного модулятора определяется как кусочно-постоянная функция вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & nT < t \le nT + \nu_n, \\ \lambda_n, & nT + \nu_n < t \le (n+1)T, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2}$$

Здесь ν_n–первый положительный корень уравнения

$$|y_n(\nu_n)| = \Delta, \qquad (\Delta = const > 0), \tag{3}$$

если таковой имеется на $(0, T]$, и $\nu_n = T$ в противном случае.

$$\lambda_n = \text{sign } y_n(\nu_n) \tag{4}$$

Функция $y_n(\nu)$ определяется формулой

$$y_n(\tau) = \int_0^\tau \sigma(nT + t)dt. \tag{5}$$

Формулировка результата.

Пусть m– заданное натуральное число. Будем исследовать mT–периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t + mT) = \sigma(t) \qquad \text{для всех t} \ge 0, \tag{6}$$

$$\varphi(t + mT) = \varphi(t) \qquad \text{для всех t} \ge 0, \tag{7}$$

$$\varphi(t) \not\equiv 0, \quad t \in [\nu, T]; \qquad \varphi(t) = 0, \quad t \in [0, \nu] \cup [T, mT]; \tag{8}$$

Здесь $\nu \in (0, T)$, а $(T - \nu)$– длительность ненулевого импульса на периоде колебания. Искомое mT–периодическое колебание будем называть нетривиальным. Очевидно, что нетривиальные колебания не могут быть состояниями равновесия или режимами с насыщением.

Введем некоторые обозначения.

$$\tilde{\Delta} = \frac{\alpha\Delta}{T|\psi|}; \tag{9}$$

Π_Δ– решение уравнения

$$\Pi - \ln \Pi - 1 = \tilde{\Delta}, \text{ причем } \Pi > 1; \tag{10}$$

Теперь выявим условия нестабильности периодических колебаний. Введем обозначения:

$$a = 1 + \frac{1}{e^{m\alpha} - 1} + \frac{1}{2}|\psi|\left(e^{m\alpha} + 1\right), \tag{19}$$

$$b = \frac{e^{m\alpha} + 1}{e^{m\alpha} - 1} e^{\alpha}, \tag{20}$$

$$\Psi_0 = \frac{2}{e^{m\alpha} + 1}\left(\sqrt{b} - 1 - \frac{1}{e^{m\alpha} - 1}\right). \tag{21}$$

Величина Ψ_0 – это значение $|\psi|$, при котором $a^2 - b = 0$. В случае $|\psi| > \Psi_0$ значение $a^2 - b > 0$ и имеют смысл

$$y_1 = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad y_2 = a + \sqrt{a^2 - b}. \tag{22}$$

Также введем функцию

$$G(y) = \ln y - \frac{e^{\alpha} - y}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)}\left(1 - \frac{1}{y}\right) \text{ для } y > 0. \tag{23}$$

Сформулируем теорему о необходимых и достаточных условиях устойчивости исследуемых колебаний.

Теорема 4. *Периодическое колебание вида (6)-(8) будет неустойчивым, если выполняется одно из соотношений:*

$$|\psi| < \Psi_0, \text{ или } G(y_1) > \tilde{\Delta}, \text{ или } G(y_2) < \tilde{\Delta}, \tag{24}$$

и будет устойчивым, если справедливы неравенства

$$|\psi| > \Psi_0, \qquad G(y_1) < \tilde{\Delta} < G(y_2). \tag{25}$$

На рисунке 1 в случае а) для $\alpha = 0,5$ и в случае б) для $\alpha = 2,5$ приведена геометрическая интерпретация утверждений теорем 1 - 4. В плоскости параметров $(\tilde{\Delta}, \psi)$ цифрами 1, 2, 3 отмечены области существования устойчивых периодических колебаний с одним, двумя либо тремя импульсами на периоде. Дополнения этих областей в полосе $0 < \tilde{\Delta} < \alpha$ -это области существования решений системы, среди которых возможны как периодические колебания, так и непериодические траектории. Это наиболее вероятные зоны детерминированного хаоса.

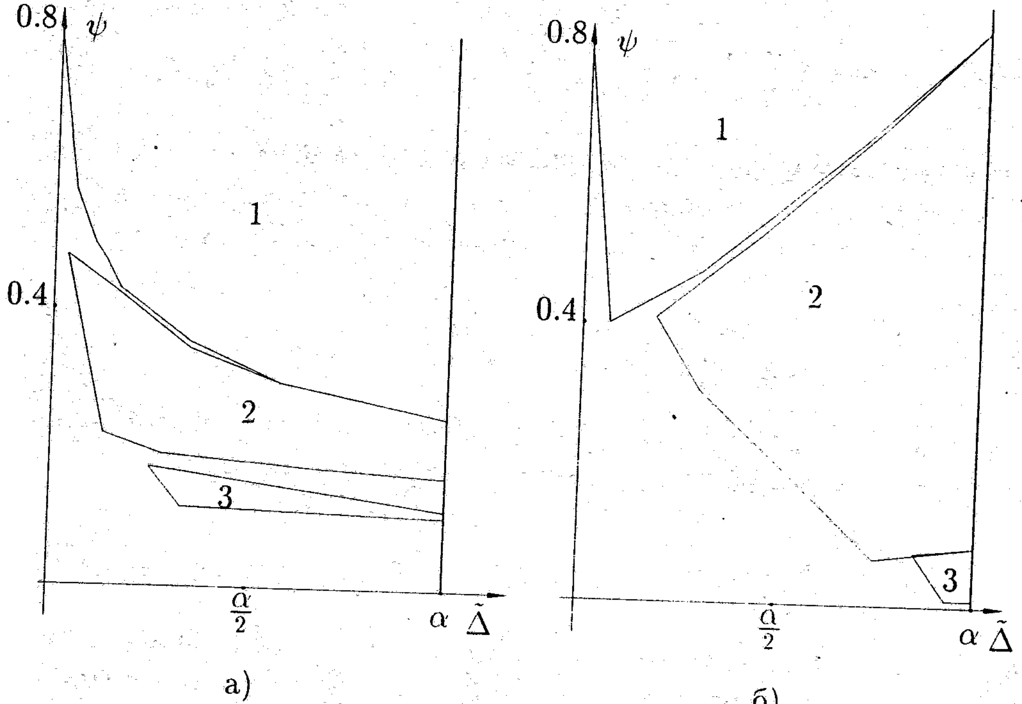

Рис.1. Области существования устойчивых периодических колебаний в случае а) для $\alpha = 0,5$ и в случае б) для $\alpha = 2,5$. Числа внутри областей указывают количество импульсов на периоде.

В основе доказательства теорем лежит метод точечных отображений [4]. Нетривиальным колебаниям периода mT исследуемой системы управления будут соответствовать m–кратные неподвижные точки точечного отображения прямой в прямую. Поэтому вопросы существования неподвижных точек этого отображения, их устойчивость либо неустойчивость будут определять динамику решений изучаемой системы: существование устойчивой m–кратной неподвижной точки будет соответствовать устойчивому mT–периодическому колебанию, т.е. порядку, а существование неустойчивой m–кратной неподвижной точки будет соответствовать неустойчивому колебанию, т.е. возможному детерминированному хаосу.

Результаты проведенных исследований являются дополнением и обобщением работ [5, 6].

Доказательство теорем 1-3. Введем обозначения

$$u_n = u(nT), \qquad \sigma_n = \sigma(nT) = \psi - u_n.$$

шение уравнения (1) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), имеет вид

$$\sigma(nT+t)=\begin{cases}\psi-u_n\mathrm{e}^{-\alpha t/T}, t\in[0,\nu_n],\\ \psi-u_n\mathrm{e}^{-\alpha t/T}-\lambda_n\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-\nu_n)/T}\right), t\in[\nu_n,T].\end{cases} \tag{26}$$

Отсюда выводим формулу для точечного отображения

$$\sigma_{n+1}=f(\sigma_n), \qquad n=0,1,2,..., \tag{27}$$

где

$$f(\sigma_n)=\psi+(\sigma_n-\psi)\mathrm{e}^{-\alpha}-\lambda_n\mathrm{e}^{-\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha\nu_n/T}\right). \tag{28}$$

Величина ν_n в соответствии с (3)-(5) вычисляется как первый положительный корень на $(0,T)$ уравнения $y_n(\nu_n)=\lambda_n\Delta$, где

$$y_n(\nu)=\psi\nu+\frac{T}{\alpha}(\sigma_n-\psi)\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\nu/T}\right), \tag{29}$$

и $\nu_n=T$, если такого корня не существует. Таким образом, периодическим колебаниям исследуемой импульсной системы будут соответствовать $m-$кратные неподвижные точки точечного отображения (27)-(28). Нам следует отыскать необходимые и достаточные условия существования этих неподвижных точек. Так как мы исследуем решения системы (1) со свойствами выходного сигнала (2) и (8), то на периоде mT величина $\nu_0\in(0,T)$, а величины $\nu_k=T$, где $k=1,2,...,m-1$. В соответствии с (26) выпишем элементы $m-$кратного цикла $\sigma_0,\sigma_1,...,\sigma_{m-1}$

$$\begin{cases}\sigma_1=\psi+(\sigma_0-\psi)\mathrm{e}^{-\alpha}-\lambda_0\mathrm{e}^{-\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha\nu_0/T}\right),\\ \sigma_k=\psi+(\sigma_{k-1}-\psi)\mathrm{e}^{-\alpha},(k=2,3,...,m),\\ \sigma_m=\sigma_0.\end{cases} \tag{30}$$

С учетом (29) и (3) величина ν_0 является первым корнем уравнения

$$\psi\nu+\frac{T}{\alpha}(\sigma_0-\psi)\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\nu/T}\right)=\lambda_0\Delta, \tag{31}$$

а для всех $k=1,2,...,m-1$ и всех $\nu\in(0,T)$ корней у уравнения (3) нет, т.е.

$$|y_k(\nu)|=|\psi\nu+\frac{T}{\alpha}(\sigma_k-\psi)\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\nu/T}\right)|<\Delta. \tag{32}$$

Знак первого импульса λ_0 можно выбрать по знаку внешней нагрузки ψ, поэтому $\lambda_0\psi = |\psi|$. Обозначим

$$x = \alpha\nu_0/T, \quad y = \alpha\nu/T, \quad \bar{\Delta} = \alpha\Delta/T.$$

Ясно, что x и y лежат в интервале $(0, \alpha)$. После алгебраических преобразований системы уравнений (30) находим начальную точку σ_0 искомого периодического колебания

$$\sigma_0 = \psi - \lambda_0 \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{e^{m\alpha} - 1},$$

а также значения σ_k

$$\sigma_k = \psi - \lambda_0 \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{e^{m\alpha} - 1} e^{(m-k)\alpha}, (k = 1, 2, ..., m).$$

Подставив σ_0 в (31), получим уравнение относительно $x \in (0, \alpha)$

$$x|\psi| - \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{e^{m\alpha} - 1}(1 - e^{-x}) = \bar{\Delta}. \qquad (33)$$

Поскольку нас интересует первый корень уравнения (31), то следует проследить за выполнением неравенства

$$\left| y|\psi| - \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{e^{m\alpha} - 1}(1 - e^{-y}) \right| < \bar{\Delta} \text{ для всех } y \in (0, x), \qquad (34)$$

а также условия (32), которое после подстановки σ_k и последующих преобразований примет вид

$$\left| y|\psi| - e^{(m-k)\alpha} \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{e^{m\alpha} - 1}(1 - e^{-y}) \right| < \bar{\Delta} \text{ для всех } y \in (0, \alpha) \qquad (35)$$

и для всех $k = 1, 2, ..., m - 1$.

Требование разрешимости уравнения (33) с ограничениями (34)-(35) позволяет получить необходимые и достаточные условия существования искомого колебания вида (6)-(8) для исследуемой системы.

Введем вспомогательные функции

$$p(x) = \frac{e^{\alpha} - e^{x}}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)}, \quad r(x) = \frac{x - \tilde{\Delta}}{1 - e^{-x}}.$$

Тогда уравнение (33) преобразуется к виду

$$p(x) = r(x). \tag{36}$$

Отметим два полезных в дальнейшем свойства функции $p(x)$. Если $\kappa \in (0, p(0))$ и $\xi(\kappa)$ — корень уравнения (11), то для решений уравнения (36) справедливы соотношения:

$$p(x) < \kappa \text{ тогда и только тогда, когда } p\left(\ln \xi(\kappa)\right) < \kappa, \tag{37}$$

$$p(x) > \kappa \text{ тогда и только тогда, когда } p\left(\ln \xi(\kappa)\right) > \kappa. \tag{38}$$

Действительно, если $p(x) < \kappa$, то, в силу (36),$r(x) < \kappa$, или в развернутой записи

$$x - \kappa(1 - e^{-x}) < \tilde{\Delta}.$$

Это неравенство равносильно оценке вида $x < \ln \xi(\kappa)$, где $\xi(\kappa)$ является решением уравнения (11). Поскольку функция $p(x)$ монотонно убывающая, то неравенство $p(x) < \kappa$ эквивалентно соотношению $x > p^{-1}(\kappa)$. Так как функция $r(x)$ монотонно возрастающая, то $r(x) > r(p^{-1}(\kappa))$. С учетом (36), $r(p^{-1}(\kappa)) < p(x) < \kappa$. Поэтому

$$p^{-1}(\kappa) < \ln \xi(\kappa), \text{т.е.} p(\ln \xi(\kappa)) < \kappa.$$

Свойство (37) доказано. Аналогичными рассуждениями доказывается (38), но знак неравенств меняется на противоположный.

Теперь найдем условия разрешимости уравнения (33), записанного как (36). Поскольку для всех $x \in (0, \alpha)$ функция $p(x)$ монотонно убывающая и неотрицательная, а функция $r(x)$ монотонно возрастающая и один раз меняющая знак,то необходимым и достаточным условием существования решения этого уравнения на $(0, \alpha)$ является неравенство $p(\alpha) < r(\alpha)$, которое равносильно (12).

Осталось проверить, что на решении уравнения (33) справедливы неравенства (34)-(35). Воспользовавшись обозначением для функции $p(x)$, запишем их в виде

$$\left|y - p(x)(1 - e^{-y})\right| < \tilde{\Delta} \text{ для всех } y \in (0, x), \tag{39}$$

$$\left|y - p(x)e^{(m-k)\alpha}(1 - e^{-y})\right| < \tilde{\Delta} \text{ для всех } y \in (0, \alpha), \tag{40}$$

и для всех $k = 1, 2, ..., m - 1$.

Введем функцию

$$u(y) = y - p(x)(1 - e^{-y}).$$

Она является выпуклой, ее значения $u(0) = 0$ и $u(x) = \tilde{\Delta}$. Наименьшее значение она принимает в точке $y_{min} = \ln p(x)$, равное $u_{min} = \ln p(x) - p(x) + 1$. Если $p(x) \le 1$, то $u(y)$ монотонно возрастающая, и для всех $y \in (0, x)$ выполняется неравенство $0 < u(y) < \tilde{\Delta}$, т.е. (39) имеет место. Если же $p(x) > 1$, то (39) выполняется тогда и только тогда, когда $u_{min} > -\tilde{\Delta}$, т.е. $\ln p(x) - p(x) + 1 > -\tilde{\Delta}$, что равносильно неравенству

$$p(x) - \ln p(x) - 1 < \tilde{\Delta}.$$

Решение последнего неравенства: $p(x) < \Pi_\Delta$, где Π_Δ решение уравнения (10). Если $p(0) < \Pi_\Delta$, то последняя оценка очевидна, в противном случае, для ее обеспечения воспользуемся (37) и найдем, что она эквивалентна неравенству $p(\ln \xi(\Pi_\Delta)) < \Pi_\Delta$, или в подробной записи,

$$\frac{e^\alpha - \xi(\Pi_\Delta)}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)} < \Pi_\Delta.$$

Если $m = 1$, то последнее неравенство, решенное относительно ψ, сводится к оценке (13), и теорема 1 доказана. Для завершения доказательства теорем 2 и 3 осталось показать оценку (40) для $m > 1$. Заметим, что (40) также обеспечивает выполнение и (39) для $m > 1$. Введем функцию

$$v_k(y) = y - e^{(m-k)\alpha} p(x)(1 - e^{-y}), y \in (0, \alpha).$$

Для всех $k = 1, 2, ..., m-1$ $v_k(y)$ выпуклые функции, $v_k(0) = 0$ и

$$v_{s+1}(y) > v_s(y) >, s = 1, 2, ...m-2.$$

Поэтому для выполнения (40) необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства

$$v_{m-1}(\alpha) < \tilde{\Delta}, \qquad v_1(y) > -\tilde{\Delta}, y \in (0, \alpha) \tag{41}$$

Так как $v_{m-1}(\alpha) = \alpha - e^\alpha p(x)(1 - e^{-\alpha})$, то первое неравенство (41) равносильно соотношению

$$p(x) > \frac{\alpha - \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1}.$$

Согласно (38) получаем оценку

$$p\left(\ln \xi(\frac{\alpha - \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1})\right) > \frac{\alpha - \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1}.$$

Вычислив значение функции p в левой части, затем преобразовав неравенство относительно ψ, придем к формуле (15) или ее частному виду (14) для $m = 2$ (правое неравенство). Таким образом, первое условие (41) гарантируется условиями теорем 2-3.

Теперь с помощью производной исследуем $v_1(y)$. В точке y_{min} она принимает минимальное значение, равное v_{min}, где

$$y_{min} = \ln\left(p(x)e^{(m-1)\alpha}\right), \quad v_{min} = \ln\left(p(x)e^{(m-1)\alpha}\right) - p(x)e^{(m-1)\alpha} + 1.$$

Если $y_{min} < \alpha$, то в силу выпуклости $v_1(y)$ для выполнения второго неравенства в (41) необходимо и достаточно, чтобы $v_{min} > -\tilde{\Delta}$, т.е., приходим к неравенствам

$$\ln p(x)e^{(m-1)\alpha} < \alpha, \qquad p(x)e^{(m-1)\alpha} - \ln\left(p(x)e^{(m-1)\alpha}\right) - 1 < \tilde{\Delta}.$$

Решения этих неравенств

$$p(x) < e^{(2-m)\alpha} \qquad p(x)e^{(m-1)\alpha} < \Pi_\Delta,$$

где Π_Δ – решение уравнения (10). Применив (37), после вычислений, приходим к оценке (16) или ее частному виду (14) для $m = 2$ (левое неравенство).

В случае $y_{min} \geq \alpha$, функция $v_1(y)$ будет убывающей и для выполнения второго неравенства в (41) надо потребовать, чтобы $v_1(\alpha) > -\tilde{\Delta}$. Получаем

$$p(x) > e^{(2-m)\alpha}, \qquad p(x) < e^{(1-m)\alpha}\frac{\alpha + \tilde{\Delta}}{1 - e^{-\alpha}}. \tag{42}$$

Для $m = 2$ неравенства (42) упрощаются к виду

$$1 < p(x) < \frac{\alpha + \tilde{\Delta}}{e^{\alpha} - 1}.$$

Отсюда находим оценку

$$\tilde{\Delta} > e^{\alpha} - 1 - \alpha.$$

В силу (36), $r(x) > 1$, а значит и $r(\alpha) > 1$, что записывается как оценка

$$\tilde{\Delta} < \alpha - 1 + e^{-\alpha}.$$

Для $\alpha > 0$ два полученных неравенства относительно $\tilde{\Delta}$ противоречивы. Поэтому в случае $m = 2$ неравенства (42) несовместны.

Для $m > 2$ с помощью (38),(37) и ряда выкладок приходим к тому, что неравенства (42) равносильны условию (17). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Неустойчивость исследуемых mT – периодических колебаний эквивалентна неустойчивости m – кратной неподвижной точки отображения (27)-(28). Как известно [4], достаточным условием неустойчивости такой точки является неравенство

$$\left|\frac{df(\sigma_0)}{d\sigma} \cdot \frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} \cdot \ldots \cdot \frac{df(\sigma_{m-1})}{d\sigma}\right| > 1 \tag{43}$$

Вычислим, используя (30)-(31),

$$\frac{df(\sigma_0)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}\left(1 - \lambda_0 \frac{\mathrm{e}^{\alpha\nu_0/T} - 1}{\psi + (\sigma_0 - \psi)\mathrm{e}^{-\alpha\nu_0/T}}\right),$$

$$\frac{df(\sigma_k)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}, k = 1, 2, \ldots, m - 1.$$

Если обозначить $x = \alpha\nu_0/T$ и принять $\lambda_0\psi = |\psi|$, то условие неустойчивости (43) записывается в виде

$$\mathrm{e}^{-m\alpha}\left|1 - \frac{\mathrm{e}^x - 1}{|\psi| - \frac{\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{m\alpha} - 1}\mathrm{e}^{-x}}\right| > 1 \tag{44}$$

Так как x – решение уравнения (33), то можно определить знак знаменателя дроби в (44).

$$|\psi| - \frac{\mathrm{e}^\alpha - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{m\alpha} - 1}\mathrm{e}^{-x} = |\psi| - |\psi|\frac{x - \tilde{\Delta}}{\mathrm{e}^x - 1} = |\psi|\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x + \tilde{\Delta}}{\mathrm{e}^x - 1} > 0.$$

Здесь последняя дробь положительна при всех $x > 0$. Поэтому решение неравенства (44) относительно ψ преобразуется к виду

$$|\psi| < \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{m\alpha} + 1} + \frac{\mathrm{e}^{\alpha - x} - 1}{\mathrm{e}^{m\alpha} + 1}.$$

Воспользовавшись обозначениями (19)-(20), последнюю оценку запишем как квадратное неравенство относительно e^x

$$\mathrm{e}^{2x} - 2a\mathrm{e}^x + b > 0$$

Его дискриминант $a^2 - b$ отрицателен тогда и только тогда, когда $|\psi| < \Psi_0$, т.е. в условиях (24) и (21). В противном случае, неравенство имеет решение

$$e^x < y_1 \quad \text{либо} \quad e^x > y_2,$$

где y_1 и y_2 определяются в (22). С помощью функции $p(x)$ из уравнения (36) последние неравенства преобразуем к виду

$$p(x) > \frac{e^\alpha - y_1}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)} \quad \text{либо} \quad p(x) < \frac{e^\alpha - y_2}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)}.$$

Пользуемся (38)-(37), находим

$$p\left(\ln \xi \left(\frac{e^\alpha - y_1}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1}\right)\right) > \frac{e^\alpha - y_1}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)},$$

$$p\left(\ln \xi \left(\frac{e^\alpha - y_2}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1}\right)\right) < \frac{e^\alpha - y_2}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)},$$

где $\xi(\cdot)$ – соответствующие решения уравнения (11). Упростим эти неравенства, вычислив значения функции $p(\cdot)$. Получим

$$\xi\left(\frac{e^\alpha - y_1}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)}\right) < y_1 \quad \text{либо} \quad \xi\left(\frac{e^\alpha - y_2}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)}\right) > y_2.$$

Поскольку правая часть (11) монотонно возрастает в области положительных значений функции, то можно перейти к равносильным неравенствам, вычислив значения этой монотоной функции.

$$\tilde{\Delta} < G(y_1) \quad \text{либо} \quad \tilde{\Delta} > G(y_2),$$

при этом $G(y)$ определяется (23). Следовательно, пришли к условию (24), которое гарантирует неустойчивость колебания (6)-(8).

Достаточным условием устойчивости колебания (6)-(8) является неравенство

$$\left|\frac{df(\sigma_0)}{d\sigma} \cdot \frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} ... \frac{df(\sigma_{m-1})}{d\sigma}\right| < 1, \qquad (45)$$

равносильное квадратному неравенству относительно e^x

$$e^{2x} - 2ae^x + b < 0.$$

Последнее имеет место при условии (25), в чем нетрудно убедиться с помощью выше приведенных рассуждений, но с заменой знаков неравенств на противоположные. Теорема 4 доказана.

Обсуждение результата.

Доказанные теоремы дают разбиение плоскости $(\psi; \alpha\Delta/T\psi)$ параметров одномерной интегральной широтно-импульсной системы управления на области, в которых возможны устойчивые периодические колебания, и области, где наблюдается хаотическое поведение решений системы. Если сравнить с работой [2],где предложено достаточное условие существования T – периодического колебания в виде $|\psi| > 0.1\alpha^2/\tilde{\Delta}$, то теорема 1 дает полное описание области существования нетривиального колебания, включающее и это подмножество. Выполнение условий теоремы 3 для $m = 3$ позволяет сделать вывод о наличии детерминированного хаоса [4] в исследуемой системе с ИШИМ, т.е. "цикл три рождает хаос".

Зоны существования устойчивых либо неустойчивых периодических колебаний легко строятся, но с помощью вычислительной техники, так как условия (13)-(18) предполагают необходимость решения неявных уравнений от одной переменной. Условия устойчивости содержат явную зависимость переменной $\tilde{\Delta}$ из (9) от внешней нагрузки ψ. Эксперименты показывают, что при любых $\alpha > 0$ и любом заданном числе m импульсов на периоде область существования искомых колебаний определяется, но для $m > 4$, как правило, это область неустойчивости.

Таким образом,регистрация хаоса в системах с ИШИМ вполне возможна и нельзя утверждать, как это делается в [1], что интегральные широтно-импульсной системы управления ведут себя как непрерывные системы при малых периодах модуляции.

Литература

1. **Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.** Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. С.-Петерб. ун-т. С.-Петербург, 1993.268с.

2. **Ерихов М. М., Островский М. Я.** Достаточные условия существования Т-периодических режимов в системах с "линейной" интегральной широтно-импульсной модуляцией.// *Автоматика и телемеханика.* 1987.№9.С.26–30.

3. **Кипнис М. М.** Хаотические явления в детерминированной широтно-импульсной системе управления//*Техническая кибернетика.* 1992.№1.С.108–112.

4. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.** Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.

5. **Антонова Н. А.** Существование периодических режимов в системах с интегральной широтно-импульсной модуляцией//*Автоматика и телемеханика.* 1979.№7.С.175–181.

6. **Антонова Н. А.** Хаос и порядок в широтно-импульсных системах управления//*Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.* Вып.1. 1995.С.111–119.

Summary

Antonova N. A. Chaos and order in an integral pulse-width control systems

Nesessary and sufficient conditions are obtained for existence and instability of mT-periodic oscillations in control systems employing the integral pulse-width modulation.

Сыктывкарский университет *Поступила 28.01.96*