Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 519.2

Скорость сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин [1]

А. Н. Тихомиров

В работе получены оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей случайных величин, удовлетворяющих условию перемешивания по Розенблатту, при существовании у слагаемых не более трех первых моментов. Приведенные оценки уточняют известные результаты для скорости сходимости в центральной предельной теореме при степенном убывании коэффициента сильного перемешивания и наличии минимального числа моментов.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин. Будем предполагать, что величины X_j имеют нулевое среднее и конечную дисперсию, $\mathbf{E}\, X_j = 0$, $\mathbf{E}\, X_j^2 < \infty$. Положим $\sigma_n^2 = \mathbf{E}\, (\sum\limits_{j=1}^{n} X_j)^2$ и составим сумму

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Пусть

$$F_n(z) = \mathbf{P}\,\{S_n < z\}, \;\; \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2} dy.$$

Положим

$$\Delta_n = \sup_z |F_n(z) - \Phi(z)|.$$

[1]Работа поддержана РФФИ. Грант № 96-01-00672

В настоящей работе мы исследуем скорость, с которой Δ_n стремится к нулю для последовательностей со слабой зависимостью.

Будем предполагать в дальнейшем, что последовательность $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания:

$$\alpha(n) = \sup |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0,$$

при $n \to \infty$, где верхняя грань берется по всем $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{k}$, $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$ ($\mathfrak{M}_a^b$ означает σ-алгебру, порожденную случайными величинами X_j, когда $j \in [a, b]$)

Нас будет интересовать скорость убывания Δ_n в зависимости от ограничений, налагаемых на коэффициент $\alpha(n)$ и моменты случайных величин X_j. Скорость убывания Δ_n к 0 для слабо зависимых величин изучалась многими авторами. Один из первых существенных результатов принадлежит Филиппу [13]. Им была получена оценка порядка $O(n^{-1/4})$ для случайных величин, удовлетворяющих условию перемешивания по Ибрагимову с коэффициентом, убывающим экспоненциально быстро. Затем существенный прогресс был достигнут в 1972 г. в работе Стейна [16]. В случае, когда последовательность удовлетворяет условию перемешивания по Ибрагимову с коэффициентом, убывающим экспоненциально, и конечен восьмой момент у слагаемых, была получена оценка $\Delta_n = O(n^{-1/2}\lg^3 n)$. Стейн предложил в своей работе новый метод исследования скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин. Существенно модифицировав этот метод, Тихомиров в 1980 г. получил оценки для Δ_n в случае последовательностей с сильным перемешиванием. В частности, при конечном третьем моменте и экспоненциальном убывании коэффициента $\alpha(m)$ была получена оценка

$$\Delta_n = O(n^{-1/2}\lg^2 n), \tag{1}$$

и при степенном убывании коэффициента сильного перемешивания, $\alpha(m) \sim m^{-\beta}, \beta > \frac{(2+\delta)(1+\delta)}{\delta^2}$,

$$\Delta_n \le C n^{-\frac{\delta}{2}\frac{\beta\delta^2-(2+\delta)(1+\delta)}{\beta\delta^2+(2+\delta)(1+\delta)}}. \tag{2}$$

В работе 1986 г. [11] была доказана лемма 3, в которой приводились оценки для характеристической функции суммы случайных величин с перемешиванием. Применение этой леммы позволяет уточнить приведенные выше результаты.

Метод, предложенный в работе [10], получил весьма широкое распространение. Так, Richardson и Guyon [12] использовали этот метод для оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых полей. Позднее Сунклодас использовал его также в исследовании скорости сходимости для m-зависимых случайных полей. Булинский рассматривал скорость сходимости для полей при различных условиях перемешивания (см. [1]–[3]). В 1995г. в работе [3] он распространил этот метод на ассоциированные величины. Зуев [6] использовал метод работы [10] для оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для $m(d)$-зависимых случайных величин. Сунклодас Й. использовал технику, описанную в работе [10], для m-зависимых случайных полей со значениями в R^k, получая оптимальные по порядку зависимости от числа слагаемых оценки скорости сходимости. В обзорной статье [9] Сунклодас приводит подробное описание трех наиболее распространенных методов исследования скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин:

— метод, предложенный L.Heinrich'ом;

— метод Ch.Stein'а;

— метод, предложенный А.Н.Тихомировым.

Из уточнений результатов, приведенных в работе [10] для стационарных последовательностей с перемешиванием по Розенблатту, можно отметить результат Гриня, получившего оценку

$$\Delta_n = O(n^{-1/2}\log^{1/3} n),$$

при условии, что $\mathbf{E}\,|X_1|^{4+\varepsilon} < \infty$ и $\alpha(m) \le K\exp\{-\beta m\}$.

В многочисленных работах, посвященных исследованию скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин рассматриваются, как правило, более жесткие ограничения на зависимость (абсолютная регулярность, полная регулярность, равномерно сильное перемешивание, m-зависимость и т.п.). Интересно отметить работу Зупарова [7], получившего оценки скорости сходимости $\Delta_n = O(n^{-s/2}\log n)$ для $0 < s < \sqrt{1+2\theta/(\theta+1)} - < 1$, когда коэффициент равномерно сильного перемешивания убывает степенным образом, $\varphi(m) < Cn^{-\theta}$.

Выдающийся результат в области оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин получил в 1995 году Rio [15]. Он доказал оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме при степенном убывании коэффициента равномерно сильного перемешивания $\varphi(m)$ для ограниченных случайных величин порядка $O(n^{-1/2})$ без логарифмического множителя! E.Rio использовал метод Линдеберга. В случае последовательностей с сильным перемешиванием из результатов Rio, приведенных в работе [14], следует, что для ограниченных слагаемых при убывании $\alpha(m) \sim n^{-\beta}$, $\beta > 1$, скорость сходимости будет $\Delta_n \sim O(n^{-\frac{\beta-1}{2}})$, если $\beta < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, и $\Delta_n = O(n^{-1/3})$, если $\beta \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

В настоящей работе предлагаются некоторые уточнения результатов работы Тихомирова [10] для случая величин, имеющих не более трех первых моментов.

В случае степенного убывания $\alpha(n)$ нами получен следующий результат.

Теорема 1 *Пусть для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ и для некоторого $0 < \delta \leq 1$ существуют такие постоянные $K > 0$, $\beta > 0$, что для всех $n \geq 1$ выполняются неравенства*

$$\alpha(n) \leq Kn^{-\beta}$$

и

$$\mathbf{E}\,|X_1|^{2+\delta} < \infty.$$

Тогда

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\,X_1^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{E}\,X_1 X_k < \infty,$$

и если $\sigma^2 > 0$, то для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная A_1, зависящая от K, β, ε и δ, что

$$\Delta_n \leq A_1 n^{-\frac{\delta}{2}\frac{\beta-\frac{2+\delta}{\delta}}{\beta+(2+\delta)}+\varepsilon}.$$

В случае экспоненциального убывания $\alpha(n)$ оценка Δ_n будет оптимальной с точностью до логарифмического множителя.

Теорема 2 *Предположим, что существуют такие постоянные $K > 0$, $\beta > 0$, что для всех $n \geq 1$ выполнено неравенство*

$$\alpha(n) \leq Ke^{-\beta n}$$

и для некоторого δ, $0 < \delta \leq 1$,

$$\mathbf{E}\,|X_1|^{2+\delta} < \infty.$$

Тогда найдется такое A_2, зависящее только от K, β, δ, что

$$\Delta_n \le A_2 n^{-\delta/2} \lg^{\frac{1+\delta}{2}}(n+1).$$

2. Доказательство теоремы 1

На протяжении всей дальнейшей работы нам понадобятся оценки ковариации случайных величин через коэффициент перемешивания.

Предложение 1. *Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}$, а случайная величина η — относительно $\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$. Тогда имеют место следующие неравенства*

1) если $|\xi| \le C_1$ и $|\eta| \le C_2$ п.н., то

$$|\mathbf{E}\,\xi\eta - \mathbf{E}\,\xi\mathbf{E}\,\eta| \le 16 C_1 C_2 \alpha(n);$$

2) если $|\xi| \le C$ п.н. и $\mathbf{E}\,|\xi|^p < \infty$ для некоторого $p > 1$, то

$$|\mathbf{E}\,\xi\eta - \mathbf{E}\,\xi\mathbf{E}\,\eta| \le B[\alpha(n)]^{1-1/p}\mathbf{E}^{\,1/p}|\xi|^p;$$

3) если $\mathbf{E}\,|\xi|^p < \infty$ и $\mathbf{E}\,|\eta|^q < \infty$ для $p > 1$ и $q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$|\mathbf{E}\,\xi\eta - \mathbf{E}\,\xi\mathbf{E}\,\eta| \le B[\alpha(n)]^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\mathbf{E}^{\,\frac{1}{p}}|\xi|^p\mathbf{E}^{\,\frac{1}{q}}|\eta|^q.$$

Доказательство неравенств 1)–3) можно найти в книге [8, стр.139] и работе [5].

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} X_j,\ \sigma_n^2 = \mathbf{E}\,S_n^2,\\
S_{j,\nu} &= \sum_{|l-j|>\nu m} X_l,\ S_{j,0} = S_n,\\
\Delta_{j,\nu} &= S_{j,\nu-1} - S_{j,\nu},\ \delta_{j,\mu,\nu} = S_{j,\mu-1} - S_{j,\nu} (= \Delta_{j,l}),\\
\delta_{j,\nu} &= \delta_{j,1,\nu} (= \sum_{l=1}^{\nu} \Delta_{j,l}),\\
f_n(t) &= \mathbf{E}\,e^{itS_n},\ f_{j,\nu}(t) = \mathbf{E}\,e^{itS_{j,\nu}},\\
\varphi_{j,\nu}(t) &= \mathbf{E}\,e^{it\Delta_{j,\nu}},\ \psi_{j,\nu}(t) = \mathbf{E}\,e^{it\delta_{j,\nu}}.
\end{aligned}$$

Предложение 2. *Справедливо следующее представление*

$$f_n'(t) = Q_n(t) f_n(t) + R_n(t), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_n(t) &= \sum_{\nu=2}^{r} Q_n^{(\nu)}(t), &(2)\\
Q_n^{(\nu)}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) q_{j,\nu}(t), &(3)\\
R_n(t) &= \sum_{j=1}^{3} R_n^{(j)}(t), &(4)\\
R_n^{(1)}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{r} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) e^{itS_{j,r}}, &(5)\\
R_n^{(i)}(t) &= \sum_{\nu=1}^{r} R_{n,\nu}^{(i)}(t), \ i = 2, 3. &(6)\\
R_{n,\nu}^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) p_{j,\nu}(t), &(7)\\
R_{n,\nu}^{(3)}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) (e^{itS_{j,\nu}} - f_{j,\nu}(t)). &(8)
\end{aligned}$$

и функции $p_{j,\nu}(t)$ *и* $q_{j,\nu}(t)$ $\nu = 1, \ldots, r$ *определяются рекуррентно следующими равенствами*

$$q_{j,r}(t) = \psi_{j,r}^{-1}(t), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
q_{j,\nu}(t) \ = \ & \psi_{j,\nu}^{-1}(t) + \sum_{\mu=1}^{r-\nu} \varphi_{j,\mu+\nu}(t) \mathbf{E}\,(1 - \psi_{j,\nu}^{-1}(t) e^{it\delta_{j,\nu}}) \\
& \times \prod_{l=1}^{\mu-1} (e^{it\Delta_{j,\nu+1}} - \varphi_{j,\nu+l}(t)) q_{j,\nu+\mu}(t), \ \nu = 1, \ldots, r-1,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$p_{j,r}(t) = \mathbf{E}\,(1 - \psi_{j,r}^{-1}(t) e^{it\delta_{j,r}}) e^{itS_{j,r}}, \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
p_{j,\nu}(t) \;=\; & \sum_{\mu=1}^{r-\nu} \varphi_{j,\nu+\mu}(t) \mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t) e^{it\delta_{j,\mu}}) \prod_{l=1}^{\mu-1} (e^{it\Delta_{j,\nu+l}} - \varphi_{j,\nu+l}(t)) \\
& \times (e^{itS_{j,\nu+\mu}} - f_{j,\nu+\mu}(t)) + \mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t) e^{it\delta_{j,\nu}}) \\
& \times \prod_{l=1}^{r-\nu} (e^{it\Delta_{j,\nu+l}} - \varphi_{j,\nu+l}(t)) e^{itS_{j,r}} + \sum_{\mu=1}^{r-\nu} \varphi_{j,\mu+\nu}(t)(t) \\
& \times \mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t) e^{it\delta_{j,\nu}}) \\
& \times \prod_{l=1}^{\mu-1} (e^{it\Delta_{j,\nu+l}} - \varphi_{j,\nu+l}(t)) p_{j,\nu+\mu}(t),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Доказательство. Имеет место очевидное равенство

$$
f_n'(t) = i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, X_j e^{itS_n}. \tag{13}
$$

Продолжим это равенство, прибавляя и вычитая в правой части выражение вида

$$
A_\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) e^{itS_{j,\nu}}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, r.
$$

Мы придем к равенству

$$
\begin{aligned}
f_n'(t) \;=\; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) e^{itS_{j,\nu}} \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{r} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) e^{itS_{j,r}}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Перепишем равенство (14) в виде

$$
\begin{aligned}
f_n'(t) \;=\; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) f_{j,\nu}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_{j,\nu}(t) \mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1} (e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t)) \\
& \times (e^{itS_{j,\nu}} - f_{j,\nu}(t)) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, X_j \prod_{\nu=1}^{r} (e^{it\Delta_{j,\nu}} - \varphi_{j,\nu}(t)) e^{itS_{j,r}}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

функций $f_{j,\nu}(t), \nu = 1,\dots,r$ нетрудно получить следующее представление

$$
\begin{aligned}
f_{j,\nu}(t) \;=\;& \psi_{j,\nu}^{-1}(t)f_n(t) + \sum_{\mu=1}^{r-\nu}\varphi_{j,\nu+\mu}(t)\mathrm{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\\
&\times\prod_{l=1}^{\mu-1}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t))f_{j,\nu+l}(t)\\
&+\sum_{\mu=1}^{r-\nu}\varphi_{j,\mu+\nu}(t)\mathrm{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\\
&\times\prod_{l=1}^{\mu-1}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t))(e^{itS_{j,\nu+\mu}}-f_{j,\nu+\mu}(t))\\
&+\mathrm{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\\
&\times\prod_{l=1}^{r-\nu}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t))e^{itS_{j,r}}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Из равенства (16) для функций $f_{j,\nu}(t), \nu = 1,\dots,r$, следует представление

$$f_{j,\nu}(t) = q_{j,\nu}(t)f_n(t) + p_{j,\nu}(t), \tag{17}$$

где $q_{j,\nu}(t)$ и $p_{j,\nu}(t)$ — функции, определенные в равенствах (8)–(10). Подставляя (17) в (15), получим требуемое равенство. Предложение доказано.

Введем следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \max_{1\le j\le n}\max_{1\le\nu\le r}|\varphi_{j,\nu}(t)|,\\
b(t) &= \max_{1\le j\le n}\max_{1\le\nu\le r}|\psi_{j,\nu}^{-1}(t)|,\\
\rho^2(t) &= \max_{1\le j\le r}\max_{1\le\nu\le r}(1-|\varphi_{j,\nu}(t)|^2),\\
d^2(t) &= \max_{1\le j\le n}\max_{1\le\nu\le r}(|\psi_{j,\nu}(t)|^{-2}-1).
\end{aligned}
$$

Пусть $\rho = 2^{-k}$, где $k \ge 2$. Существует постоянная $\gamma(\rho)$, зависящая от ρ, такая что в области

$$|t| \le \gamma(\rho)\sqrt{n}/\sqrt{mr} \tag{18}$$

выполнены неравенства

$$\max(\rho(t), d(t)) \le \rho \tag{19}$$

$$b(t) \leq \sqrt{2}. \tag{20}$$

Далее выберем m так, чтобы выполнялось неравенство

$$[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} 2^r < \rho^r. \tag{21}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие неравенства для* $\nu = 1,\ldots,r-3$ *и* $\mu = 3,\ldots,r-\nu$

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\prod_{l=1}^{\mu-1}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t))| \leq \\ &\leq \tfrac{1}{2}(d^2(t)+\rho^{2([\frac{\mu+1}{2}]-[\frac{\mu}{2}])})\rho^{2[\frac{\mu}{2}]}(t)+16\alpha(m)(b^2(t) \\ &+(d^2(t)+4))2^{[\frac{\mu}{2}]}, \end{aligned} \tag{22}$$

$\mu = 2$ *и* $\nu = 1,\ldots,r$,

$$|\mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\prod_{l=1}^{\mu-1}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t)| \leq \frac{1}{2}(d^2(t)+\rho^2(t)), \tag{23}$$

для $\mu = 1,\ldots,r$

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}\,X_j\prod_{l=1}^{\mu}(e^{it\Delta_{j,l}}-\varphi_{j,l}(t))| \leq 2\mathbf{E}^{\,1/2}|X_1|^2\rho^{\mu-1}(t) \\ &+C[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\mathbf{E}^{\,1/(2+\delta)}|X_1|^{2+\delta}2^{\mu-1} \\ &+C\mathbf{E}^{\,1/2}|X_1|^2\alpha(m)2^r. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Разобьем множества индексов, входящих ...зведение, на два подмножества — четные ($\prod'$) и нечетные ...) — и применим неравенство Гельдера. Тогда сомножители в ...ой группе будут "почти" независимы, и их ковариацию можно ... оценить с помощью коэффициента сильного перемешивания

...меняя неравенство Гельдера, мы получим, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}\,(1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}})\prod_{l=1}^{\mu-1}(e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t))| \leq \\ &\leq \mathbf{E}^{\,1/2}|1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}}|^2 \\ &\times\prod_l{}'|e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t)|^2\mathbf{E}^{\,1/2}\prod_l{}''|e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t)|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Последовательно применяя неравенство для ковариации ограниченных случайных величин с перемешиванием (предложение 1, неравенство 2), мы получим, что

$$\mathbf{E}\,|1-\psi_{j,\nu}^{-1}(t)e^{it\delta_{j,\nu}}|^2\prod_l{}'|e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t)|^2\le$$

$$d^2(t)\rho^{2[\frac{\mu}{2}]}+16\alpha(m)(2b^2(t)+d^2(t))\sum_{l=0}^{[\frac{\mu}{2}]-1}\rho^l 2^{[\frac{\mu}{2}]-l} \tag{26}$$

$$\le d^2(t)\rho^{2[\frac{\mu}{2}]}(t)+16\alpha(m)(2b^2(t)+d^2(t))2^{[\frac{\mu}{2}]}$$

и

$$\mathbf{E}\prod_l{}''|e^{it\Delta_{j,\nu+l}}-\varphi_{j,\nu+l}(t)|^2\le\rho^{2[\frac{\mu+1}{2}]}+16\alpha(m)2^{2[\frac{\mu+1}{2}]}. \tag{27}$$

Из неравенств (25)–(27) и неравенства $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ следует неравенство (22). Неравенство (23) очевидно. Доказательство неравенства (24) совершенно аналогично доказательству неравенства (22) с той лишь разницей, что надо использовать неравенство (3) предложения 1. Лемма доказана.

В силу выбора m, r и t (неравенства (18)–(21)) мы имеем следующие оценки:

$$|q_{j,r}(t)|\le b(t) \tag{28}$$

и для $\nu=1,\dots,r-1$

$$|q_{i,\nu}(t)|\le b(t)+2\sum_{\mu=1}^{r-\nu}a(t)\rho^\mu|q_{j,\nu+\mu}(t)|. \tag{29}$$

Лемма 2. *Решением рекуррентной системы неравенств*

$$\begin{gathered}z_\nu\ge 0,\\ z_\nu\le b(t)+2\sum_{\mu=1}^{r-\nu}a(t)\rho^\mu z_{\nu+\mu},\ \ \nu=1,\dots,r\end{gathered} \tag{30}$$

является неравенство

$$z_\nu\le b(t)\frac{1}{1-(2a(t)+1)\rho}. \tag{31}$$

Доказательство. Переобозначим последовательность $z_\nu :=$ $_{-\nu}$. Тогда неравенство (30) перепишется в виде

$$z_\nu \le b + \sum_{\mu=1}^{\nu} 2a(t)\rho^\mu z_{\nu-\mu}. \tag{32}$$

определим последовательность z_ν для $\nu = r+1, \ldots$ с помощью вой части (32). Поскольку $z_\nu \ge 0$, то решением рекуррентного равенства (мажорантой z_ν) будет последовательность, обращаю- неравенство (32) в равенство. Найдем эту последовательность, значив ее $\widehat{z}_\nu$.

С этой целью введем в рассмотрение производящую функцию

$$H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \widehat{z}_\nu.$$

сматривая равенства вместо неравенств (32), мы получим, что

$$H(x) = \frac{b(t)}{1-x} + \frac{2a(t)\rho}{1-\rho x} H(x). \tag{33}$$

получим, что

$$H(x) = \frac{b(t)(1-\rho x)}{(1-x)(1-(2a(t)+1)\rho x)}. \tag{34}$$

функцию $H(x)$ в ряд по степеням x, мы получим, что

$$\widehat{z}_\nu = b(t)\frac{1-\rho-2a(t)\rho[(2a(t)+1)^\nu \rho]}{1-(2a(t)+1)\rho}. \tag{35}$$

$\rho \le 1/4$ и $a(t) \le 1$, то $(2a(t)+1)\rho \le 3/4 < 1$ и нера- (32) следует из определения последовательности $\widehat{z}_\nu$. Лемма

мы 2 следует, что

$$|q_{j,\nu}(t)| \le 4\sqrt{2} \tag{36}$$

$, 2, \ldots, r$ и всех t, удовлетворяющих неравенству (18).

теперь функции $p_{j,\nu}(t)$. Из определения функций $p_{j,\nu}(t)$ следует, что

$$|p_{j,r}(t)| \le d(t), \tag{37}$$

а для $\nu = 1, \ldots, r-1$

$$|p_{j,\nu}(t)| \le 2\sum_{\mu=1}^{r-\nu} a(t)\rho^{\mu}_{\delta(t)}|p_{j,\nu+m}(t)| + 16\sum_{\mu=1}^{r-\nu} a(t)\alpha(m)2^{\mu} + \frac{5}{4}\rho_j^{r-\nu+1}(t) \quad (38)$$

В силу неравенства (21) неравенство (38) можно переписать в виде

$$|p_{j,\nu}(t)| \le 2\sum_{\mu=1}^{r-\nu} \rho_j^{\mu}(t)|p_{j,\nu+\mu}(t)| + 2\rho_j^{r-\nu+1}(t). \quad (39)$$

Лемма 3. *Решением системы неравенств*

$$z_\nu \le 2\sum_{\mu=1}^{r-\nu} \rho^{\mu}(t) z_{\nu+\mu} + 2\rho^{r-\nu+1}(t) \quad (40)$$

является неравенство

$$z_\nu \le 2\rho^2(3\rho(t))^{\nu-1}, \ \nu = 1, 2, \ldots, r. \quad (41)$$

Доказательство леммы 3 совершенно аналогично доказательству леммы 2.

Из леммы 3 следует, что для $\nu = 1, 2, \ldots, r$

$$|p_{j,\nu}(t)| \le 2\rho_j^2(t)(2\rho_j)^{r-\nu}. \quad (42)$$

Перейдем теперь к оценкам функций $Q_n(t)$ и $R_n(t)$.

Оценка $R_n^{(1)}(t)$

В силу леммы 1 (неравенство (31)) и выбора m, r и t (неравенства (18)–(21), (23), (24), (28)) имеет место неравенство

$$|R_n^{(1)}(t)| \le C\sqrt{n}\rho^r. \quad (43)$$

Оценка $Q_n^{(\nu)}(t)$, $\nu = 3, \ldots, r$

В силу неравенства (31) для функций $Q_n^{(\nu)}(t)$ при $\nu \ge 3$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |Q_n^{(\nu)}(t)| &\le 4\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} a(t)|\mathbf{E}\,X_j\prod_{\mu=1}^{\nu-1}(e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t))| \\ &\le C_1\sqrt{n}\rho^r 2^{-(r-\nu)} + C_2\sqrt{n}\rho^2(t)\rho^{\nu-3} \end{aligned} \quad (44)$$

В силу неравенства (44) и определения $\rho(t)$ мы получим, что

$$\sum_{\nu=3}^{r} |Q_n^{(\nu)}(t)| \le C_1\sqrt{n}\rho^r + C_2\frac{|t|^2 m}{\sqrt{n}}. \tag{45}$$

Оценка $R_{n,\nu}^{(2)}(t)$, $\nu = 1, \dots, r$

Из определения функций $R_{n,\nu}^{(2)}(t)$ мы получим, что

$$|R_{n,\nu}^{(2)}(t)| \le \sum_{j=1}^{n} a(t)|\mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t))||p_{j,\nu}(t)|.$$

рименяя к последнему неравенству лемму 1 и неравенство (21), трудно получить оценку

$$|R_{n,\nu}^{(2)}(t)| \le C\sqrt{n}\rho^r. \tag{46}$$

юда (неравенство (20)) следует, что

$$|R_n^{(2)}(t)| \le \sum_{\nu=1}^{r} |R_{n,\nu}^{(2)}(t)| \le C\sqrt{n}\rho^r r. \tag{47}$$

нка функций $R_{n,\nu}^{(3)}(t)$, $\nu = 1, \dots, r$

ьзуя оценку для ковариации слабо зависимых величин (пред-ие 1, неравенство 3), мы получим, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}\, X_j \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(e^{it\Delta_{j,\mu}} - \varphi_{j,\mu}(t))(e^{itS_{j,\nu}} - f_{j,\nu}(t))| \le \\ &\le C\mathbf{E}^{\,1/(2+\delta)}|X_1|^{2+\delta}2^{\nu-1}[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}. \end{aligned} \tag{48}$$

авенства (48) следует, что

$$|R_n^{(3)}(t)| \le C|a(t)|\sqrt{n}2^r[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}.$$

в силу выбора m, мы немедленно получим, что

$$|R_n^{(3)}(t)| \le C\sqrt{n}\rho^r. \tag{49}$$

Интегрируя уравнение (59), мы получим, что в области $|t| \leq \gamma \min(n^{\frac{1}{2}-\kappa\frac{1+\delta}{2\delta}},$
$n^{\frac{1}{2}-\kappa/2}/\sqrt{r}) = \gamma n^{\frac{1}{2}-\kappa\frac{1+\delta}{2\delta}}$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{e}^{-t^2/2} + \theta_1(t)C_1|t|^{2+\delta}n^{-\frac{\delta}{2}+\kappa\frac{1+\delta}{2}}\mathrm{e}^{-t^2/4} \\ &+\theta_2(t)C_2t^2n^{-\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)}\mathrm{e}^{-t^2/4} \\ &+\theta_3(t)C_3\min(|t|,|t|^{-1})\sqrt{n}\rho^r r. \end{aligned}$$

Используя неравенство Эссеена, мы получим, что

$$\Delta_n \leq C_1 n^{-\frac{\delta}{2}+\frac{1+\delta}{2}\kappa} + C_2 n^{-\frac{1}{2}+\frac{1+\delta}{2\delta}\kappa} + C_3 n^{-\kappa[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1]} + C_4\sqrt{n}\rho^r r.$$

Выберем r так, чтобы

$$\sqrt{n}\rho^r r \asymp n^{-\kappa[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1]}$$

или

$$\rho^r r \asymp n^{-\kappa[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1]-\frac{1}{2}}$$

$$-kr + \log_2 r \asymp -\left(\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)+\frac{1}{2}\right)\log_2 n.$$

Положим

$$r = \frac{1}{k}\left(\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)+\frac{1}{2}\right)\log_2 n + \frac{1}{k}\log_2(\log_2 n).$$

Тогда

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^r \asymp n^{-\frac{k+1}{k}\left(\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)+\frac{1}{2}\right)}(\log_2 n)^{\frac{k+1}{k}},$$

где запись $a_n \asymp b_n$ означает, что существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, такие что $C_1 a_n \leq b_n \leq C_2 a_n$. Мы выберем $m = n^\kappa$ из условия

$$n^{-\beta\kappa\frac{1+\delta}{2+\delta}} \asymp n^{-\frac{k+1}{k}\left(\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)+\frac{1}{2}\right)}.$$

Откуда

$$\beta\kappa\frac{1+\delta}{2+\delta} = \frac{k+1}{k}\left(\kappa(\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1)+\frac{1}{2}\right)$$

или

$$\kappa = \frac{(k+1)(2+\delta)}{2[\beta(2k-\delta)+(2+\delta)(k+1)]} \tag{60}$$

При таком выборе κ оценка примет вид

$$\Delta_n \le C_1 n^{-\frac{\delta}{2}+\kappa\frac{1+\delta}{2}} + C_2 n^{-\kappa\frac{(\beta\delta-(2+\delta))(k+1)}{2[\beta(2k-\delta)+(2+\delta)(k+1)]}}.$$

В силу выбора κ (равенство (60))

$$\kappa\left[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1\right] = \frac{k+1}{2}\frac{\beta\delta-(2+\delta)}{\beta(k-\delta)+(k+1)(2+\delta)}. \tag{61}$$

Кроме того,

$$-\frac{\delta}{2}+\kappa\frac{1+\delta}{2} = -\frac{\delta}{2}\frac{\beta(k-\delta)-\frac{2+\delta}{\delta}(k+1)\frac{(1-\delta)}{2}}{\beta(k-\delta)+(k+1)(2+\delta)}. \tag{62}$$

Сравнивая (61) и (62) мы видим, что для достаточно больших k

$$\kappa[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1] < \frac{\delta}{2}\frac{\beta(k-\delta)-\frac{2+\delta}{\delta}(k+1)\frac{(1-\delta)}{2}}{\beta(k-\delta)+(k+1)(2+\delta)}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать $k(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\kappa[\beta\frac{\delta}{2+\delta}-1] = \frac{\delta}{2}\frac{\beta-\frac{2+\delta}{\delta}}{\beta+2+\delta}-\varepsilon.$$

Поэтому окончательно получим оценку

$$\Delta_n \le C_\varepsilon n^{-\frac{\delta}{2}\frac{\beta-\frac{2+\delta}{\delta}}{\beta+2+\delta}+\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Отличие доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы 1 состоит лишь в выборе m, r и ρ и вытекающих отсюда оценок для остатков в представлении характеристической функции (1).

Прежде всего, положим $\rho = 1/4$ (в обозначении предыдущего параграфа $k = 2$).

Положим

$$r = [c\log(n+1)],$$

выбирая постоянную c так, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho^r < n^{-4}, \tag{63}$$

а m выберем так, чтобы выполнялось неравенство (21). Для этого достаточно выбрать

$$m = [C_1 \log n], \tag{64}$$

где константа C_1 зависит от δ и β. При таком выборе r, m и ρ в области определяемой неравенством (18):

$$|t| \leq \gamma\sqrt{n}/\log n \tag{65}$$

будут справедливы следующие оценки:

- в силу неравенств (43) и (63)

$$|R_n^{(1)}(t)| \leq Cn^{-3}; \tag{66}$$

- в силу неравенства (44) и неравенства (63)

$$\sum_{\nu=3}^{r} |Q_n^{(\nu)}(t)| \leq C_1 n^{-3} + C_2|t|^2 n^{-1/2} \log n; \tag{67}$$

- в силу неравенств (47), (49), (63)

$$|R_n^{(2)}(t)| \leq Cn^{-3} \tag{68}$$

и

$$|R_n^{(3)}(t)| \leq Cn^{-3}. \tag{69}$$

Кроме того, соотношение (57) примет вид:

$$Q_n(t) = -t + \Theta_1(t)C|t|^{1+\delta}n^{-\frac{\delta}{2}} \lg^{\frac{1+\delta}{2}} n + \Theta_2(t)C_2|t|n^{-3}. \tag{70}$$

Из соотношений (66)–(70) следует, что в области, определяемой неравенством (65), справедливо равенство

$$f_n'(t) = -tf_n(t) + \Theta_1(t)C_1|t|^{1+\delta}n^{-\frac{\delta}{2}} + \lg^{\frac{1+\delta}{2}} nf_n(t) + \Theta_2(t)C_2(|t|+1)n^{-3}. \tag{71}$$

Интегрируя уравнение (71), мы получим, что в области (65)

$$f_n(t) = e^{-t^2/2} + \Theta_1(t)|t|^{2+\delta}n^{-\frac{\delta}{2}} \lg^{\frac{1+\delta}{2}} ne^{-t^2/4} + \Theta_2(t)C_2|t|^2n^{-3}. \tag{72}$$

Из представления (72), используя неравенство Эссеена, мы получим требуемую оценку. Теорема 2 доказана.

Литература

1. **Булинский А.В.** Об условиях перемешивания случайных полей// *Теория вероятн. и ее применен.* 1985. Т.30.Вып.1.С. 200-201.

2. **Булинский А.В.** О различных условиях перемешивания и асимптотической нормальности случайных полей//ДАН СССР, 1988. Т.299.Вып.4.С.785–789.

3. **Булинский А.В.** Скорость сходимости в центральной предельной теореме для ассоциированных величин//*Теория вероятн. и ее примен.* 1995.Т.40.Вып.1.С.165–176.

4. **Гринь А.Г.** Предельные теоремы для слабо зависимых величин: *Дис...д-ра ф.-м.наук.* Омск, 1995.

5. **Давыдов Ю.А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными процессами//*Теория вероятн. и ее примен.* 1968.Т.13.Вып.4.С.730–737.

6. **Зуев Н.М.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для $m(d)$-зависимых случайных величин//*Весцi АН БССР.* Серия фiз.-мат. наук.1986.№4.С.28–32.

7. **Зупаров Т.М.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин//*Теория вероятностей и ее применен.* 1991.Т.36.Вып.4.С.635–644.

8. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

9. **Сунклодас Й.** Аппроксимация распределений сумм слабо зависимых случайных величин нормальным распределением // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* 1991. Т.81.С.140-200.

10. **Тихомиров А.Н.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин//*Теория вероятн. и ее примен.* 1980.Т.25.Вып.4.С.800–818.

11. **Тихомиров А.Н.** О распределении максимальной суммы слабо зависимых величин//*Теория вероятн. и ее примен.* 1986. Т.31.Вып.4.С.829–834.

12. **Guyon X., Richardson S.** Vitesse de convegence du theireme de la limite central pour des champs faiblement dependants// *Z. Wahrsch. und verw. Geb.* 1984.Vol.66.№2.P.297–314.

13. **Philipp W.** The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic processes// *Ann. Math. Statist.* 1969.Vol.40. №2. P.601–609.

14. **Rio E.** About the Lindeberg method for strongly mixing sequences// *Prepublication mathematique de l'universite' de Paris-Sud* 1993. 93–81. 25 p.

15. **Rio E.** Sur le theoremė de Berry-Esseen pour les suits faiblement dependantes// *Prepublication mathematique de l'universite' de Paris-Sud* 1995.95–02.29 p.

16. **Stein Ch.** A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables// *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* 1972.Vol.2.P.583–603.

Summary

Tichomirov A. N. The rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a stationary sequence of random variables with the strong mixing coeffitient $\alpha(n)$.

Supose that $\mathbf{E}\,|X|^{2+\delta} < \infty$ for some $0 \le \delta \le 1$, and that $\alpha(n) = o(n^{-\beta})$, where $\beta > \frac{2+\delta}{\delta}$. Then for any small $\varepsilon > 0$ we prove that

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = o\left(n^{-\frac{\delta}{2}\frac{\beta - \frac{2+\delta}{\delta}}{\beta+2+\delta}+\varepsilon}\right),$$

where $F_n(x)$ is the distribution function (d.f.) of normalized sum $S_n = \sum_1^n X_j$ and $\Phi(x)$ is the standart Gaussian d.f.

Also we prove that when $\alpha(n) = o(e^{-\beta n})$ for some $\beta > 0$, then

$$\Delta_n = o\left(n^{-1/2} \lg^{\frac{1+\delta}{2}} n\right).$$

Сыктывкарский университет

Поступила 20.03.96