*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996*

УДК 517.987+519.2

Основные понятия теории пространств Лебега–Рохлина. Теория меры на подпространствах обобщенного канторова дисконтинуума [1]

А. А. Самородницкий

Приводятся конструкции, связанные с формулировкой аксиомы компактности для пространств с конечной нормированной неотрицательной счетно-аддитивной мерой. Эти конструкции составляют основу теории пространств Лебега–Рохлина.

Аксиома компактности для сепарабельных пространств с мерой была введена в работе В. А. Рохлина [1] под названием "аксиома полноты". Появившаяся в результате этого теория пространств Лебега–Рохлина существенно уточняла аксиоматику А. Н. Колмогорова [2] для сепарабельных пространств с вероятностной мерой. Для формулировки аксиомы компактности в общем (несепарабельном) случае существенную роль сыграло понятие "базиса", введенное для пространств с мерой в [3]. Отличная от [1] и [3] формулировка аксиомы компактности (для сепарабельных пространств, но с другим объектом — "базой", вместо "базиса") предлагалась В. Г. Винокуровым (см., например, [4]). Однако В. Г. Винокуров не изменил процедуру компактификации, что привело его к классу бесконечных произведений пространств Лебега (см., [5]), который оказался более узким, чем, например, класс LR-пространств, введенный в [3].

Ниже, развивая подход В. Г. Винокурова, мы получим достаточно широкий класс пространств с мерой, имеющий частью класс LR-пространств. Мы увидим, что меры в таких пространствах допускают радоновы продолжения относительно некоторой топологии. Эти продолжения мер позволят соединить два подхода к формулировке аксиомы компактности. Терминология настоящей ра-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы "Университеты России" (раздел "ФПММ", шифр 1.3.5)

боты соответствует принятым в [3], [6] и [7] определениям, многие из которых используются без ссылок и комментариев.

1. Пусть $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, в котором Ω — непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ–алгебра ($\mathcal{F}$–измеримых) подмножеств Ω, а μ — неотрицательная счетно–аддитивная функция на $\mathcal{F}$, удовлетворяющая соотношению $\mu(\Omega) = 1$ (такие и только такие функции мы называем ниже мерами на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$). μ–пополнение σ–алгебры $\mathcal{F}$ обозначаем $(\mathcal{F})^\mu$. Отметим, что полнота по мере μ σ–алгебры $\mathcal{F}$ не предполагается (если это специально не оговорено), но мы всюду предполагаем, что σ–алгебра $\mathcal{F}$ разделяет точки множества Ω.

Пусть $\Sigma \subset 2^\Omega$ — произвольная система подмножеств. Через $\sigma\{\Sigma\}$ обозначается наименьшая σ–алгебра, содержащая Σ, а через ξ_Σ — разбиение Ω, порожденное системой Σ (каждый элемент $C \in \xi_\Sigma$ состоит из точек, которые Σ не разделяет). $\varepsilon(\Omega)$ обозначает разбиение на одноточечные множества.

Система $\Sigma \subset \mathcal{F}$ называется системой образующих пространства Ω, если она удовлетворяет двум условиям: $\xi_\Sigma = \varepsilon(\Omega)$ и $(\sigma\{\Sigma\})^\mu \supset \mathcal{F}$. Наличие хотя бы одной системы образующих в Ω очевидно.

Пусть T — множество индексов (при необходимости в нем можно зафиксировать полную упорядоченность) и $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$. Если $\xi_\Sigma = \varepsilon(\Omega)$, то система Σ однозначно определяет инъективное отображение $i_\Sigma : \ \Omega \longrightarrow \{0;1\}^T$ по следующему правилу: $i_\Sigma(\omega) = (x_t : \ t \in T)$, $\omega \in \Omega$, где при каждом $t \in T$

$$x_t = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \omega \in A_t, \\ 1, & \text{если} \quad \omega \in A_t^c = \Omega \setminus A_t. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ наименьшую σ–алгебру в $\{0;1\}^T$, содержащую множества

$$L_{t_0} = \{(x_t : \ x_{t_0} = 0\}, \quad t_0 \in T.$$

Пусть $\mathfrak{L} = \{L_t : \ t \in T\}$. Ясно, что при любом $t \in T$ выполняется $i_\Sigma^{-1}(L_t) = A_t$, то есть $i_\Sigma^{-1}(\mathfrak{L}) = \Sigma$. Следовательно, $i_\Sigma^{-1}(\mathfrak{B}) = \sigma\{\Sigma\}$. Мы показали, что если Σ является, в частности, системой образующих в Ω, то $i_\Sigma : \ (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\{0;1\}^T, \mathfrak{B})$ — измеримое отображение.

Отображения типа i_Σ для сепарабельных пространств (то есть пространств со счетной системой образующих) изучались, применительно к аксиоме компактности, в [8] (см. также [3]).

Система образующих $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ называется компактной, если отображение i_Σ является биекцией Ω на $\{0;1\}^T$. Это определение компактной системы образующих эквивалентно принятым в [1] и [3].

Введем меру λ_Σ на $\mathfrak{B}$ (мы ее будем обозначать также λ, если не возникает сомнений относительно выбора Σ). Для $B \in \mathfrak{B}$ положим $\lambda(B) = \mu\left(i_\Sigma^{-1}(B)\right)$. Ясно, что для системы образующих Σ отображение i_Σ является гомоморфизмом пространства Ω в пространство $(\{0;1\}^T, \mathfrak{B}, \lambda)$.

Обозначим через $\mathfrak{B}_\mathfrak{F} = i_\Sigma(\mathfrak{F})$ образ σ–алгебры $\mathfrak{F}$ в случае, когда i_Σ — биекция Ω на $\{0;1\}^T$. Ясно, что $\mathfrak{B}_\mathfrak{F} \subset (\mathfrak{B})^\lambda$. Продолжая λ на $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$ (как это делают при λ–пополнении), получим, что из компактности системы образующих Σ вытекает, что i_Σ — изоморфизм пространств $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ и $(\{0;1\}^T, \mathfrak{B}_\mathfrak{F}, \lambda)$.

Иначе определяется σ–алгебра $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$ в случае, когда система образующих Σ не является компактной. Пусть $X = i_\Sigma(\Omega)$. Несложно доказать, что $\lambda_e(X) = 1$, где λ_e обозначает внешнюю меру, порожденную мерой λ. Отображение i_Σ является биекцией Ω на X. Обозначим $\mathfrak{F}' = i_\Sigma(\mathfrak{F})$. Поскольку $i_\Sigma(\sigma\{\Sigma\}) = \mathfrak{B}_X = \{B \cap X : \ B \in \mathfrak{B}\}$, то, учитывая определение меры λ, получим: $\mathfrak{F}' \subset \left((\mathfrak{B})^\lambda\right)_X$. Тогда для любого $E' \in \mathfrak{F}'$ найдется $E \in (\mathfrak{B})^\lambda$, для которого $E' = E \cap X$. Положим $\mathfrak{B}_\mathfrak{F} = \{E \in (\mathfrak{B})^\lambda : \ E \cap X \in \mathfrak{F}'\}$. Очевидно, что $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$ — σ–алгебра и что i_Σ — гомоморфизм Ω в $\left(\{0;1\}^T, \mathfrak{B}_\mathfrak{F}, \lambda\right)$ и изоморфизм Ω на $(X, \mathfrak{F}', \lambda_X)$.

Если $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ — система образующих пространства Ω, то Σ–компактификацией Ω называется пространство $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mu}\right)$ с компактной системой образующих $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{A}_t : \ t \in T\}$, для которых существуют подпространство $(\Omega', \mathfrak{F}', \mu')$ в $\widetilde{\Omega}$ и изоморфизм $\varphi : \ (\Omega, \mathfrak{F}, \mu) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{F}', \mu')$, для которых: а) $\widetilde{\mu}_e \Omega' = 1$; б) при каждом $t \in T$ справедливо равенство $\varphi(A_t) = \widetilde{A}_t \cap \Omega'$.

Читатель сразу же отметит, что пространство $\left(\{0;1\}^T, \mathfrak{B}_\mathfrak{F}, \lambda\right)$ с компактной системой образующих $\mathfrak{L}$ является Σ–компактификацией Ω. Кроме того, если $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mu}\right)$ с компактной системой образующих $\widetilde{\Sigma}$ является Σ–компактификацией Ω, то, рассматривая $i_{\widetilde{\Sigma}} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \{0;1\}^T$, получим $\mathfrak{B}_{\widetilde{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{B}_\mathfrak{F}$, а $\widetilde{\mu}$ и μ порождают одну и ту же меру λ на $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$. Поскольку, как отмечалось, в этом случае $i_{\widetilde{\Sigma}}$ — изоморфизм $\widetilde{\Omega}$ на $\left(\{0;1\}^T, \mathfrak{B}_\mathfrak{F}, \lambda\right)$, то, принимая во внимание очевидный факт, что $\left(i_{\Sigma}\circ i_{\Sigma'}^{-1}\right)|_{\Omega'}: (\Omega', \mathcal{F}', \mu') \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ тоже является изоморфизмом, получаем единственную (с точностью до изоморфизма) компактификацию относительно системы образующих Σ.

Система образующих в Ω, имеющая минимальную (среди всех систем образующих в Ω) мощность, называется базисом. Если в Ω имеется компактная система образующих $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$, то она является базисом. Это утверждение доказано в [3] и вытекает из того, что в противном случае Σ имела бы подсистему меньшей мощности, которая была бы тоже системой образующих в Ω, что противоречит компактности системы Σ. Этим фактом объясняется то, что ниже мы будем работать с базисами.

Базис $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$ пространства Ω называется компактным по $mod\, 0$, если пара (Ω, Σ) тождественна по $mod\, 0$ паре (Ω', Σ'), в которой $\Omega' = (\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ — пространство с мерой, а Σ' — его компактный базис. Используя результаты работ [1] и [3], несложно доказать, что базис Σ компактен по $mod\, 0$ тогда и только тогда, когда $i_{\Sigma}(\Omega) \in (\mathfrak{B})^{\lambda}$.

Один из способов введения аксиомы компактности заключается в требовании наличия в Ω компактного по $mod\, 0$ базиса. Если отбросить случаи конечного множества Ω (как тривиальные), то в пространствах с бесконечным весом (то есть бесконечной мощностью базиса) из наличия компактного по $mod\, 0$ базиса, как показано в [3], вытекает наличие компактного базиса, а такие пространства, как мы видели, изоморфны произведению (но не обязательно прямому) двухточечных пространств с мерой. Классификация таких пространств может быть выполнена с помощью теоремы В. Г. Винокурова (см. [9]), из которой вытекает, что такие пространства полностью определяются своим весом и строением метрической структуры — ассоциированной булевой алгебры с мерой.

Легко указать пример "хорошего" пространства с мерой, не попадающего в класс произведений двухточечных пространств с мерой. Для этого достаточно взять $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$, где подпространства Ω_1 и Ω_2 измеримы, $\Omega_i = \{0; 1\}^{T_i}$, причем T_1 и T_2 имеют разные мощности, которые являются бесконечными кардинальными числами. В [3] указанный недостаток был устранен. Именно, были введены вполне однородные пространства и доказано, что каждое пространство Ω есть прямая (дизъюнктная) сумма вполне однородных под-

[illegible]остранств

$$\Omega = \bigoplus_{n\in N} \Omega_n, \qquad (1)$$

[illegible] N — счетное множество, $(\tau_n, v_n) \neq (\tau_k, v_k)$ при $n \neq k$, τ_n — метри[illegible]ий вес Ω_n, а v_n — вес Ω_n (другие подробности читатель найдет [illegible]). Разложение (1) иногда обладает дополнительным слагаемым [illegible]евой меры, мощность которого больше мощности его дополнения. [illegible]елях простоты это слагаемое мы опускаем (то есть, в терминол[illegible] [3], считаем вес Ω равным его точному весу).

Вполне однородное бесконечное пространство Ω, как известно из [illegible] обладает базисом $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$, для которого выполнены [illegible]вия:

1 $card\, T = v(\Omega)$,

2 $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, где $\Sigma' = \{A_t : \ t \in T'\}$, $\Sigma'' = \{A_t : \ t \in T'' = T \setminus T'\}$, причем

а) $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{t_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T'$,

б) $\mu A_t = 0$ при $t \in T''$,

в) $card\, T' = \tau(\Omega)$,

г)
$$card\, T'' = \begin{cases} v(\Omega), & \text{если} \quad \tau(\Omega) < v(\Omega), \\ 0, & \text{если} \quad 0 < \tau(\Omega) = v(\Omega), \end{cases}$$

где $\tau(\Omega)$ — метрический вес, $v(\Omega)$ — вес пространства Ω.

[illegible] отображении i_Σ в этом случае мы получаем пространство [illegible]$(\mathfrak{B})^\lambda, \lambda)$, которое является, в свою очередь, прямым про[illegible]нием пространства $\{0;1\}^{T'}$ на пространство $\{0;1\}^{T''}$, причем [illegible] — прямое произведение двухточечных пространств с сим[illegible]ными $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$–мерами, а в $\{0;1\}^{T''}$ перемножаются $(0;1)$–меры. [illegible] и [7] пространство Ω, в разложении (1) которого каждое [illegible] однородное подпространство Ω_n обладало компактной си[illegible] образующих (только что описанного вида), называлось LR–[illegible]ранством, или пространством Лебега–Рохлина. Мы не будем [illegible]лять всех свойств LR–пространств, доказанных в [3] и [7]. [illegible] только, что любое бесконечное произведение пространств [illegible] см. [5]) является LR–пространством, что обратное к этому утверждение не верно и что сепарабельное L^2-пространство является пространством Лебега (в смысле работы [1]).

2. Алгебру $\mathfrak{R}$ подмножеств множества Ω будем называть базой пространства $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, если для некоторого базиса Σ пространства Ω $\mathfrak{R}$ является наименьшей алгеброй, содержащей Σ, то есть $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$ (так будем обозначать порожденную системой Σ алгебру).

Введем в Ω так называемую Σ–топологию (см. [3]), объявив $\mathfrak{R}$ базой открыто–замкнутых множеств. Тогда Ω становится вполне несвязным хаусдорфовым топологическим пространством. Если Σ — компактный базис, то Ω компактно в Σ–топологии (это вытекает из того, что совокупность $\Sigma + \Sigma^c$, где

$$\Sigma^c = \{A_t^c : \ t \in T\} = \{A : \ A^c \in \Sigma\},$$

является предбазой Σ–топологии, и хорошо известного факта общей топологии; см., например, [10, с. 143, задача 2]). Доказательство этого см. также в [3, с.28–30]. Обратное утверждение на "языке базисов" неверно. Достаточно взять приведенный выше пример суммы $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ произведений двоеточий, имеющих разные (но бесконечные) мощности семейств сомножителей.

База $\mathfrak{R}$ называется компактной, если всякая центрированная система множеств из $\mathfrak{R}$ имеет непустое пересечение. Теперь понятно, что Ω компактно в Σ–топологии тогда и только тогда, когда база $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$ компактна. Этим, видимо, и объясняется смена терминологии В. А. Рохлина, которую произвел В. Г. Винокуров.

По всякой базе $\mathfrak{R}$ пространства Ω будем фиксировать базис Σ, для которого $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$, а также "предбазу" $\mathcal{P} = \Sigma + \Sigma^c$. Выше, фактически, было сказано, что компактность базы $\mathfrak{R}$ равносильна непустоте пересечений центрированных систем множеств из $\mathcal{P}$.

Считая, что Ω — бесконечное множество, отметим, что всякая база является и базисом в Ω, так как имеет ту же мощность и обладает всеми свойствами, что и порождающий ее базис. Следовательно, для $\mathfrak{R}$ определено отображение $i_\Sigma : \ \Omega \longrightarrow \{0;1\}^T$, описанное выше, и отображение $i_\mathfrak{R} : \ \Omega \longrightarrow \{0;1\}^T$. Ниже мы будем рассматривать только первое из них.

Не представляет труда доказать, что компактность базы $\mathfrak{R}$ равносильна непустоте пересечений центрированных систем множеств из $\mathcal{P}$ вида $\{B_t : \ t \in T\}$, где $B_t \in \{A_t, A_t^c\}$ при $t \in T$. Если при этом поставить в соответствие каждой такой центрированной си-

системе точку $(x_t:\ t\in T)$ пространства $\{0;1\}^T$, в которой

$$x_t=\begin{cases}0, & \text{если}\quad B_t=A_t,\\ 1, & \text{если}\quad B_t=A_t^c,\end{cases}$$

рассмотреть множество Ω^* таких точек в $\{0;1\}^T$, то компактность базы $\mathfrak{R}$ будет равносильна равенству $i_\Sigma(\Omega)=\Omega^*$.

Рассматривая тихоновскую топологию в $\{0;1\}^T$ и индуцированную топологию в Ω^*, можно заметить, что i_Σ — непрерывное отображение. Более того, база $\mathfrak{R}$ компактна тогда и только тогда, когда отображение i_Σ является гомеоморфизмом Ω на Ω^*. Заметим, что множество Ω^* компактно в $\{0;1\}^T$.

Учитывая изложенное в п. 1, немного упростим дальнейшие определения. Будем считать, что $\mathcal{F}^*=(\mathfrak{B}_{\mathcal{T}})_{\Omega^*}$, $\lambda^*=\lambda_{\Omega^*}$. Заметим, что $\lambda_e(\Omega^*)=1$. Пространство $\Omega^*=(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda^*)$ будем называть $\mathfrak{R}$-компактификацией Ω. При этом $\mathfrak{R}^*=\alpha\{\mathfrak{L}_{\Omega^*}\}$ будет, очевидно, компактной базой в Ω^*. Это определение следует воспринимать "с точностью" до изоморфизма $\mathfrak{R}$–компактификаций.

Базу $\mathfrak{R}$ будем называть компактной по $mod\,0$, если $\Omega'=i_\Sigma(\Omega)\in\mathcal{F}^{\lambda^*}$. То, что $(\lambda^*)_e(\Omega')=1$, вытекает из вышесказанного. Пространство Ω будем называть пространством Лебега–Рохлина, если в нем имеется компактная по $mod\,0$ база. Отметим, что мы договорились исключать из Ω множество нулевой меры, если его мощность превосходит мощность его дополнения. Понятие пространства Лебега–Рохлина следует понимать с учетом этого обстоятельства.

Покажем, что во всяком LR–пространстве (см. п. 1) имеется компактная по $mod\,0$ база.

Действительно, пусть Σ_n — компактный базис в Ω_n из (1), $n\in N$, $\mathcal{P}_n=(\Sigma_n+\Sigma_n^c)$, $\Sigma_0=\{\Omega_n:\ n\in N\}$, $\mathcal{P}_n$ — система подмножеств. Обозначим $\mathcal{P}_0=\Sigma_0+\Sigma_0^c$, где, на сей раз, $\Sigma_0^c=\{\Omega\setminus\Omega_n:\ n\in N\}$. Пусть $\Sigma=\sum\limits_{n\in N}\mathcal{P}_n+\Sigma_0$, $\mathcal{P}=(\Sigma+\Sigma^c)$, где $\Sigma^c=\{\Omega\setminus A:\ A\in\Sigma\}$. Пусть $\mathfrak{R}=\alpha\{\Sigma\}$. Покажем, что $\mathfrak{R}$ компактна по $mod\,0$. Факт, что $\mathfrak{R}$ — база, а Σ — базис в Ω, сомнений не вызывает.

Пусть $\Sigma=\{A_t:\ t\in T\}$ — произвольно зафиксированная "перенумерация" Σ, $\Omega^*\subset\{0;1\}^T$ и $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda^*)$ — $\mathfrak{R}$–компактификация. Если $(x_t:\ t\in T)\in\Omega^*$, то совокупность $\{B_t:\ t\in T\}$, где

$$B_t=\begin{cases}A_t, & \text{если}\quad x_t=0,\\ \Omega\setminus A_t, & \text{если}\quad x_t=1,\end{cases}\tag{2}$$

при $t \in T$, является центрированной. Отображение i_Σ переводит точку $x \in \Omega$, для которой $\{x\} = \bigcap\limits_{t\in T} B_t$, в точку $(x_t: \ t \in T) \in \{0;1\}^T$. Обозначим $\Omega' = i_\Sigma(\Omega)$ и покажем, что $\Omega' \in (\mathcal{F}^*)^{\lambda^*}$.

Пусть $\Sigma_n = \{A_t^n : t \in T_n\}$ для $n \in N$. Можно считать, что $\Sigma_n^c = \{\Omega_n \setminus A_t^n : \ t \in T_n'\}$, где $card T_n' = card T_n$ и $n \in N$, и что $T = \sum\limits_{n\in N}(T_n + T_n') + N$. При этом $B_t \in \{A_t^n; \Omega\setminus A_t^n\}$, если $t \in T_n$, $B_t \in \{\Omega_n \setminus A_t^n; \Omega \setminus (\Omega_n \setminus A_t^n)\}$, если $t \in T_n'$, $B_t \in \{\Omega_t; \Omega \setminus \Omega_t\}$, если $t \in N$. Пусть $\{B_t : \ t \in T\} \subset \mathcal{P}$ — центрированная система множеств. Возможны два варианта.

1) Если при некотором $t_0 \in T_{n_0}$ выполнено соотношение $B_{t_0} = A_{t_0}^{n_0}$ или при некотором $t_0 \in T_{n_0}'$ выполнено соотношение $B_{t_0} = \Omega_{n_0} \setminus A_{t_0}^{n_0}$ $(n_0 \in N)$, то при любом $t \in T_n$ и $n \neq n_0$ будет $B_t = \Omega \setminus A_t^n$ (иначе нарушится условие центрированности), при любом $t \in T_n'$ и $n \neq n_0$ будет $B_t = \Omega\setminus(\Omega_n \setminus A_t^n)$, при $t = n \neq n_0$ будет $B_t = \Omega\setminus\Omega_t$ и $B_{n_0} = \Omega_{n_0}$.

В этом случае $\bigcap\limits_{t\in T} B_t = \bigcap\limits_{t \in T_{n_0}+T_{n_0}'} B_t$ и система $\{B_t : \ t \in T_{n_0} + T_{n_0}'\} \subset \mathcal{P}_{n_0}$ центрирована. Тогда в силу компактности системы Σ_{n_0} в Ω_{n_0} получаем непустоту пересечения: $\bigcap\limits_{t\in T} B_t = \{\omega\}$. Если $\{B_t : \ t \in T\}$ и $(x_t : \ t \in T)$ соответствуют в смысле (2), то ясно, что $i_\Sigma(\omega) = (x_t : t \in T) \in \Omega'$.

2) При любых $t \in T_n$ и $n \in N$ имеем $B_t = \Omega \setminus A_t^n$ и при любых $t \in T_n'$ и $n \in N$ имеем $B_t = \Omega \setminus (\Omega_n \setminus A_t^n)$. Тогда

$$\bigcap_{t\in T} B_t = \bigcap_{n\in N}\left[\bigcap_{t\in T_n}(\Omega\setminus A_t^n) \cap \bigcap_{t\in T_n'}(\Omega\setminus(\Omega_n\setminus A_t^n))\right] \cap \bigcap_{n\in N} B_n =$$

$$= \bigcap_{n\in N}(\Omega\setminus\Omega_n) \cap \bigcap_{n\in N} B_n, \tag{3}$$

поскольку порядок, в котором в (3) пересекаются множества, не играет роли.

Заметим, что в этом случае множество N бесконечно, так как при конечном N мы вспомним, что T_n и T_n' — это, фактически, два "дизъюнктных экземпляра одного множества", что при фиксированных $t_n \in T_n$ и $t_n' \in T_n'$, для которых $A_{t_n}^n = A_{t_n'}^n$, имеем $(\Omega \setminus A_{t_n}^n) \cap \left[\Omega \setminus (\Omega_n \setminus A_{t_n'}^n)\right] = \Omega \setminus \Omega_n$, откуда в силу $\bigcap\limits_{n\in N}(\Omega\setminus\Omega_n) = \emptyset$ получаем конечную подсиситему

$$\{\Omega \setminus A_{t_n}^n; \Omega\setminus(\Omega_n \setminus A_{t_n'}^n) : \ n \in N\} \subset \{B_t : \ t \in T\}$$

с пустым пересечением, что противоречит центрированности.

Центрированность $\{B_t : \ t \in T\}$ здесь будет также нарушаться, если $B_n = \Omega_n$, хотя бы при одном $n \in N$. Видим, что этому случаю отвечает единственная центрированная система $\{B_t : \ t \in T\}$, которой в смысле (2) соответствует точка $(x_t : \ t \in T)$ в Ω^* с $x_t = 1$ при любом $t \in T$. Поскольку $\bigcap_{t\in T} B_t = \bigcap_{n\in N} (\Omega \setminus \Omega_n) = \emptyset$, получаем $(x_t : \ t \in T) \in \Omega^* \setminus \Omega'$.

Заметим, что 1) и 2) охватывают все возможности, поэтому обозначим одноточечное множество $\Omega^* \setminus \Omega'$ через $\{x^*\}$ и покажем, что $\lambda^*_e\{x^*\} = 0$. Этого достаточно для компактности по $mod\,0$ базы

Пусть $\mathfrak{L} = \{L_t : \ t \in T = \sum_{n\in N} (T_n + T'_n) + N\}$ — компактный базис $\{0;1\}^T, \mathfrak{B}_{\mathfrak{T}}, \lambda)$, $B^*_n = \Omega^* \setminus L_n$ при $n \in N$. Если $L^c_n = \{0;1\}^T \setminus L_n$, $B^*_n = \Omega^* \cap L^c_n$, откуда $B^*_n \in \mathfrak{F}^*$. Поскольку у нас $i^{-1}_\Sigma(L_t) = A_t$ для $\in T$, то $i^{-1}_\Sigma(B^*_n) = \Omega \setminus \Omega_n$, где $n \in N$. Поскольку $\Omega^* \setminus \Omega' = \{x^*\}$ и $\bigcap (\Omega \setminus \Omega_n) = \emptyset$, получаем $\bigcap_{n\in N} B^*_n = \{x^*\}$, откуда $\{x^*\} \in \mathfrak{F}^*$. Теперь

$$\lambda^*(\{x^*\}) = \lambda^*\left(\bigcap_{n\in N} B^*_n\right) = \lambda_e\left(\bigcap_{n\in N} (\Omega^* \cap L^c_n)\right) =$$

$$= \lambda\left(\bigcap_{n\in N} L^c_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in N} (\Omega \setminus \Omega_n)\right) = 0,$$

ду построения λ и λ^*. Сформулированное выше утверждение азано. Класс пространств Лебега–Рохлина включает в себя все -пространства.

Не представляет затруднений доказательство того, что всякое рабельное пространство с компактной по $mod\,0$ базой является странством Лебега в смысле работы [1], если, конечно, требовать лноту σ–алгебры $\mathfrak{F}$, как это принято в [1]. Следовательно, указе два подхода к определению аксиомы компактности дают для рабельных пространств с мерой один и тот же класс.

В классе LR–пространств достаточно просто решаются многие росы, связанные с построением их теории. Это всевозможсвойства LR–пространств и их подпространств (см. [3] и [7]), чая классификацию. Объясняется такая простота "нагляд" строением вполне однородного LR–пространства, о чем выше уже говорили.

Однако, имеется пример (см. [11] или [12]) вполне однородного LR–пространства с компактной базой $\mathfrak{R}$, порожденной базисом Σ, который не является компактным (даже по $mod\, 0$). Для этого достаточно взять несчетное прямое произведение $\{0;1\}^T$ двоеточий с симметричными $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$–мерами и, беря в качестве топологии в $\{0;1\}^T$ тихоновское произведение дискретных топологий, рассмотреть компактное в $\{0;1\}^T$ подмножество Ω^* с внешней мерой 1, а внутренней мерой 0. Существование такого множества под названием "диагональ" общеизвестно. Компактность топологического пространства Ω^* эквивалентна компактности базы $\mathfrak{R}^* = \alpha\{\mathfrak{L}^*\}$, а базис $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}_{\Omega^*}$ не является компактным из–за неизмеримости Ω^* в $\{0;1\}^T$.

3. Зафиксируем базис Σ в Ω и рассмотрим Σ–топологию $\mathcal{T}_\Sigma$ в Ω. Если система Σ счетна и если $\mathcal{B}_\Sigma$ обозначает борелевскую σ–алгебру, то есть $\mathcal{B}_\Sigma = \sigma\{\mathcal{T}_\Sigma\}$, то $\mathcal{B}_\Sigma = \sigma\{\Sigma\}$. В случае несчетного Σ всегда $\sigma\{\Sigma\} \subset \mathcal{B}_\Sigma$, причем равенство исключается.

Обозначим $\widetilde{\Omega} = \{0;1\}^T$, где $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mu}$ — такие σ–алгебра и мера на $\widetilde{\Omega}$, что $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu}\right)$ является Σ–компактификацией Ω. Соответствующий базис $\widetilde{\Sigma}$ в $\widetilde{\Omega}$, как и прежде, состоит из множеств

$$\widetilde{A}_{t_0} = \{(x_t : \ t \in T \in \widetilde{\Omega} : \ x_{t_0} = 0\}, \ t_0 \in T.$$

Мы изменим некоторые обозначения для дальнейших удобств. Далее, $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ с компактной базой $\mathfrak{R}^*$ является $\mathfrak{R}$–компактификацией Ω. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, отождествим Ω с Ω', используя изоморфизм i_Σ этих пространств. Тогда $\Omega \subset \Omega^* \subset \widetilde{\Omega}$, $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}_\Omega = \mathcal{F}^*_\Omega$, $\mu = \widetilde{\mu}_\Omega = (\mu^*)_\Omega$, $\Sigma = \widetilde{\Sigma}_\Omega = (\Sigma^*)_\Omega$, где $\Sigma^* = \widetilde{\Sigma}_{\Omega^*}$, $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$, $\mathfrak{R}^* = \alpha\{\Sigma^*\}$, $\widetilde{\mathfrak{R}} = \alpha\{\widetilde{\Sigma}\}$.

Как замечено в [3, с.27], измеримая внутренность любого подмножества $B \subset \Omega$ может быть выбрана как предел возрастающей последовательности замкнутых в Σ–топологии множеств. Это означает, что мера μ регулярна на $\mathcal{F}$ относительно $\mathcal{T}_\Sigma$. Аналогичным свойством обладают меры μ^* и $\widetilde{\mu}$ (см. [13, с.39]).

Используя понятия и факты относительно регулярных, τ–гладких, плотных и радоновых мер в топологическом пространстве (см., например, [13, с.33–39]), видим, что для существования радонова продолжения меры μ (для μ^* и $\widetilde{\mu}$ аналогично) необходимо и достаточно, чтобы $\sup\{\mu_e(K) : \ K \subset \Omega, \ K \text{ — компакт}\} = 1$. Учитывая компактность $\widetilde{\Omega}$ и Ω^* в $\widetilde{\Sigma}$– и Σ^*–топологиях $\mathcal{T}_{\widetilde{\Sigma}}$ и $\mathcal{T}_{\Sigma^*}$ соответственно, получаем сразу существование и единственность радоновых продолжений $\widetilde{\nu}$ и ν^* мер $\widetilde{\mu}$ и μ^*.

Обозначим также через $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}^*$ соответственно $\widetilde{\nu}$- и ν^*-пополнения борелевских σ-алгебр в пространствах $\widetilde{\Omega}$ и Ω^*. Ясно, что $\Omega^* \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Несложно показать, что для замкнутых подмножеств $\widetilde{F}$ в $\widetilde{\Omega}$ справедливо равенство $\widetilde{\nu}(\widetilde{F}) = \widetilde{\mu}_e(\widetilde{F})$, а для открытых подмножеств $\widetilde{U} \subset \widetilde{\Omega}$ — равенство $\widetilde{\nu}(\widetilde{U}) = \widetilde{\mu}_{int}(\widetilde{U})$, где $\widetilde{\mu}_e$ и $\widetilde{\mu}_{int}$ — внешняя и внутренняя меры, порожденные мерой $\widetilde{\mu}$. Поскольку Ω^* компактно в $\widetilde{\Omega}$ и $(\Omega^*) = 1$, получаем $\widetilde{\nu}(\Omega^*) = 1$. Мы добились, что наши две компактификации "отличаются" на пренебрежимом (меры нуль) множестве относительно меры $\widetilde{\nu}$.

Важным является то, что теперь, вообще говоря $\widetilde{\nu}_e(\Omega) \leq 1$ (и, само собой, $(\nu^*)_e(\Omega) \leq 1$). Связывая с каждым базисом Σ свою топологию $\mathcal{T}_\Sigma$, мы можем получать меры $\widetilde{\nu}$ и ν^*, однако структуры пространств $\widetilde{\Omega}$ и Ω^* (как компактификаций) утрачивают содержательную связь с Ω при радоновом продолжении мер, если $\widetilde{\nu}_e(\Omega) < 1$ (или, что эквивалентно, $(\nu^*)_e(\Omega) < 1$). Возможна даже патологическая ситуация, когда $\widetilde{\nu}(\Omega) = 0$ (соответствующий пример несчетного произведения двоеточий Ω, в котором $\widetilde{\Omega} \setminus \Omega$ является одноточечным множеством и носителем меры $\widetilde{\nu}$, придумать несложно).

При $\widetilde{\nu}_e(\Omega) < 1$ существует замкнутое (и компактное, следовательно) множество $K \subset \widetilde{\Omega} \setminus \Omega$ с $\widetilde{\nu}(K) = \widetilde{\mu}_e(K) > 0$. Но это, в определенном смысле, внешняя для Ω характеристика.

Обозначим $\mathcal{E} = \{F \subset \Omega : \ F$ замкнуто и $\mu_e F = 1\}$. Ясно, что $\Omega \in \mathcal{E}$. Будем говорить, что мера μ обладает носителем $S_\mu =\subset \Omega$, если $S_\mu = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{E}} F$ и $\mu_e(S_\mu) = 1$. Хорошо известно, что носителем обладают меры $\widetilde{\nu}$ и ν^* (и, следовательно, меры $\widetilde{\mu}$ и μ^*). Как только отмечалось, μ может не иметь носителя.

Поскольку $\mathcal{R}$ служит базой топологии $\mathcal{T}_\Sigma$ (открытой и замкнутой базой одновременно), то всякое замкнутое множество есть пересечение множеств из $\mathcal{R}$. Следовательно, можно считать, что $\mathcal{E} = \{F \in \mathcal{R} : \ \mu F = 1\}$ и что, как и прежде, $S_\mu = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{E}} F$. Учитывая, что $\mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{R}}_\Omega$ и что $\widetilde{\mu}(\widetilde{F}) = \mu F$, если $F = \widetilde{F} \cap \Omega$ и $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{R}}$, получаем для $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{R}} : \ \widetilde{\mu}(\widetilde{F}) = 1\}$ соотношение $\mathcal{E} = \widetilde{\mathcal{E}}_\Omega$, из которого, в свою очередь, вытекает равенство $S_\mu = S_{\widetilde{\mu}}$, где

$$S_{\widetilde{\mu}} = \bigcap_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{E}}} \widetilde{F}$$

— носитель $\widetilde{\mu}$.

Если предположить, что $\widetilde{\nu}_e(\Omega) = 1$, то получим $\widetilde{\nu}_e(\Omega \cap S_{\widetilde{\mu}}) = \widetilde{\nu}_e(S_\mu) = 1$ в силу $\widetilde{\nu}(S_{\widetilde{\mu}}) = 1$. Следовательно,

$$1 = \widetilde{\nu}_e(S_\mu) = \inf\{\widetilde{\nu}(\widetilde{B}) : \ S_\mu \subset \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{A}}\} \leq$$

$$\leq \inf\{\widetilde{\nu}(\widetilde{B}) : \ S_\mu \subset \widetilde{B} \in \widetilde{\mathfrak{F}}\} = \inf\{\widetilde{\mu}(\widetilde{B}) : \ S_\mu \subset \widetilde{B} \in \widetilde{\mathfrak{F}}\} =$$

$$= \inf\{\mu B : \ S_\mu \subset B \in \widetilde{\mathfrak{F}}\} = \mu_e(S_\mu),$$

то есть $\mu_e(S_\mu) = 1$. Мы показали, что из условия $\widetilde{\nu}_e(\Omega) = 1$ вытекает существование носителя меры μ.

Используя определения τ–гладкости мер $\widetilde{\nu}$ и ν^* и τ_0–гладкости мер μ, $\widetilde{\mu}$ и μ^* (см., например, [13, с.33, 39]), можно показать, что меры $\widetilde{\nu}$ и ν^* являются τ–гладкими, меры $\widetilde{\mu}$ и μ^* — τ_0–гладкими, а при условии $\widetilde{\nu}_e(\Omega) = 1$ несложно получается τ_0–гладкость меры μ. В этом случае мера ν, заданная на $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}_\Omega$ соотношением $\nu(A) = \widetilde{\nu}_e(A)$, будет единственным τ–гладким продолжением μ (см. [13, с.39, теорема 3.2(а)], и учитываем, что Σ–топология в Ω регулярна, то есть удовлетворяет аксиомам отделимости T_1 и T_3). Из τ–гладкости, в свою очередь, вытекает наличие носителя (см. [13, с.36]).

Если теперь понимать компактность по $mod\,0$ относительно радоновых продолжений мер в компактификациях, то компактность по $mod\,0$ станет эквивалентной наличию радонового продолжения ν меры μ, для которого $\nu = \widetilde{\nu}_\Omega = (\nu^*)_\Omega$.

Дальнейшие свойства описываемых классов пространств требуют большей подробности и остаются за рамками настоящей работы. Отметим, заключая, что требуется выяснить, в частности, вытекает ли наличие компактной по $mod\,0$ (относительно μ) базы из наличия таковой относительно ν. Кроме того, требуется охарактеризовать пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, для которых будет $\widetilde{\nu}_e(\Omega) = 1$, то есть в которых μ продолжается до $\nu = \widetilde{\nu}_\Omega = (\nu^*)_\Omega$. При этом потребуется уточнить понятия базы и базиса с тем, чтобы эти понятия в пространствах $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ были "корректны по отношению к аксиоме компактности".

Литература

1. **Рохлин В. А.** Об основных понятиях теории меры//*Матем. сборник.* 1949. Т.25. №1. С.107–150.

2. **Колмогоров А. Н.** Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. 120с.

3. **Самородницкий А. А.** Теория меры. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 268с.

4. **Винокуров В. Г., Рубштейн Б. А., Федоров А. Л.** Пространство Лебега и его измеримые разбиения. Ташкент: Изд–во ТашГУ, 1985. 76с.

5. **Винокуров В. Г.** О бесконечных произведениях пространств Лебега//*Докл. АН СССР.* 1964. Т.158. №6. С.1247–1249.

6. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320с.

7. **Самородницкий А. А.** Булевский принцип исчерпывания и строение пространств с мерой//*Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.* Вып.1. 1995. С.89–100.

8. **Haezendonck J.** Abstract Lebesgue–Rohlin spaces//*Bull. de la Soc. Math. Belgique.* 1973. Vol.25. P.243–258.

9. **Винокуров В. Г.** Компактные меры и произведения пространств Лебега//*Матем. сборник.* 1967. Т.74. №3. С.434–472.

10. **Архангельский А. В., Пономарев В. И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424с.

11. **Савченкова Л. М., Самородницкий А. А.** Некомпактные базисы в пространствах Лебега–Рохлина//*Теория функций: Тезисы докладов Всероссийского научного семинара.* Сыктывкар, 1993. С.53–54.

12. **Савченкова Л. М., Самородницкий А. А.** Об одной проблеме несепарабельных пространств Лебега–Рохлина //*Фундаментальные проблемы математики и механики. Сборник рез–в научн. исслед.* М.: Изд–во МГУ, 1994. Т.1. С.153–154.

13. **Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.** Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985. 386с.

Summary

Samorodnitski A. A. Basic conceptions of Lebesgue–Rohlin spaces theory. Measure theory on subspaces of generalized Cantor discontinuum

We give constructions connected with a definition of compactness axiom for a space with probability measure. These constructions are the base of Lebesgue–Rohlin spaces theory.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.03.96*