Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 517.987.1

К ПРОБЛЕМЕ СЧЕТНОЙ АДДИТИВНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ МЕР

В. Н. Исаков

Рассматриваются векторнозначная и полугрупповозначная меры, заданные на алгебрах множеств, и конечно-аддитивные. Обосновывается способ выделения класса множеств, где произведение этих мер существует и оно счетно-аддитивно.

1. Введение.

Интерес к проблеме счетной аддитивности произведения мер со значениями в абстрактных пространствах возник после обнаружения того факта, что, в отличие от случая со скалярными мерами, произведение счетно-аддитивных векторнозначных мер ν и μ, заданных на σ–алгебрах, не всегда счетно-аддитивно даже на алгебре $\mathcal{A}$, порожденной измеримыми прямоугольниками. Поэтому, как отметил Сварц [1], одними из главных вопросов, связанных с произведением абстрактных мер, являются:

1. Когда мера $m = \nu \times \mu$ счетно-аддитивна на алгебре $\mathcal{A}$?
2. Если m счетно-аддитивна на $\mathcal{A}$, то когда существует счетно-аддитивное продолжение с $\mathcal{A}$ на порожденную ею σ–алгебру Σ ?

В математической литературе найдены условия, обеспечивающие положительные ответы на эти вопросы в различных ситуациях относительно пространств значений мер и операций умножения (информацию об этом можно получить в [1],[2]). Проблеме обеспечения счетной аддитивности меры-произведения на алгебре $\mathcal{A}$ посвящена и статья [3]. Надо сказать, что приведенные в ней требования к мерам-сомножителям существенно отличаются от аналогичных требований в других работах.

В тех случаях, когда для мер не удается определить "глобально" счетно-аддитивное произведение (на алгебре $\mathcal{A}$ или на σ–алгебре

... задача: найти способы выде- ... из $\mathcal{A}$ или Σ, где существует счетно- ... этих мер. В данной статье предлага- ... поставленной задачи в весьма общей ситуа- ... мер. при этом мы ограничиваемся рассмотрением ... счетной аддитивности" в алгебре $\mathcal{A}$.

2. Необходимые понятия.

Пусть X, Z — действительные или комплексные нормированные векторные пространства, причем Z— полное, Y — абелева полугруппа с нулем и квазинормой:

$$0 \leqslant \| x \| < \infty, \ \| O \| = 0, \ \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|, \ x, y \in Y \ .$$

Предположим, что определено *непрерывное полубилинейное отображение* $\bullet : X \times Y \to Z$ со свойствами:

1) $O_X \bullet y = x \bullet O_Y = O_Z$ при всех $x \in X$, $y \in Y$;

2) $(ax_1 \pm bx_2) \bullet y = ax_1 \bullet y \pm bx_2 \bullet y$ для всех $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ и чисел $a, b > 0$;

3) $x \bullet (y_1 + y_2) = x \bullet y_1 + x \bullet y_2$ для всех $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$;

4) существует такое число $P > 0$, что $\| x \bullet y \|_Z \leqslant P \| x \|_X \| y \|_Y$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.

Пусть $(S, \mathcal{N}, \nu)$ и $(T, \mathcal{M}, \mu)$ – измеримые пространства с алгебрами $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ подмножеств непустых множеств S и $T (S \in \mathcal{N}, T \in \mathcal{M})$ и конечно-аддитивными мерами $\nu : \mathcal{N} \to X$ и $\mu : \mathcal{M} \to Y$. Считаем, что $\mu(\emptyset) = O_Y$. Обозначим через $\widetilde{\mu}$ *полувариацию* меры μ относительно пространства X (X–полувариацию), которая определяется так же, как в [4]:

$$\widetilde{\mu}(E) = sup\{\| \Sigma_i \, x_i \bullet \mu(E_i) \|_Z\},$$

где sup берется по всем конечным дизъюнктным измеримым разбиениям (E_i) множества $E \in \mathcal{M}$ и наборам элементов $x_i \in X$, $\| x_i \|_X \leqslant 1$. Полувариация $\widetilde{\mu}$ являтся *субмерой*, т.е. неотрицательной монотонной субаддитивной функцией множества.

Субмера $\widetilde{\mu}$ называется *непрерывной внешней мерой (н.в.мерой)*, если она конечна и непрерывна сверху в нуле на $\mathcal{M}$.

Как и в [4], на неизмеримых множествах $B \subset T$ полувариация $\widetilde{\mu}$ заменяется ее распространением с $\mathcal{M}$ на 2^T :

$$\widehat{\mu}(B) = inf\{\widetilde{\mu}(E) : \ E \in \mathcal{M}, \ B \subset E\}.$$

Ради простоты это распространение обозначаем также через $\widetilde{\mu}$.

зываемый здесь $\widetilde{\mu}$–*интегралом*. Если $\widetilde{\mu}$ конечна на $\mathcal{M}$, то $\widetilde{\mu}$-интегрируемости функции g необходимо и достаточно суще-вание такой последовательности (g_n) $\widetilde{\mu}$–простых функций, что $\to g$ по $\widetilde{\mu}$ на T, а последовательность $\widetilde{\mu}$–интегралов от них рав-тепенно абсолютно непрерывна относительно $\widetilde{\mu}$.

Везде далее считаем, что $\widetilde{\mu}$ конечна на $\mathcal{M}$.

Применяем определенный в диссертации автора (Исаков В.Н. теграл по обобщенным мерам и их применения: Дис... канд. -мат. наук/РГПУ им. А.И.Герцена. С.-Пб.,1993.107 с.) Z–ный *полубилинейный интеграл* от функций $f : T \to X$ по полу-новозначной мере μ (μ–*интеграл*). Функция f там называется *измеримой*, если она является пределом сходящейся по $\widetilde{\mu}$ после-дательности μ–простых функций $f : T \to X$; μ–*интегрируемой*, она μ–измерима и функция $\| f(\cdot) \|_X$ $\widetilde{\mu}$–интегрируема. Для μ–теграла справедлива теорема Лебега о мажорантном предельном ходе под знаком интеграла:

Лемма 1. *Если последовательность (f_n) μ–измеримых функ-сходится по $\widetilde{\mu}$ к функции $f : T \to X$ и существует такая интегрируемая функция g, что $\| f_n(t) \|_X \leqslant g(t)$ $\widetilde{\mu}$–п.в. на* T, *f μ–интегрируема и*

$$lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

номерно относительно $E \in \mathcal{M}$.

Отметим, что в лемме 1 функции $g(t), f(t)$ и $f_n(t)$ не обязательно аничены.

Определения.

Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру, порожденную декартовыми произ-ниями множеств из $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ (измеримыми прямоугольниками).

Обозначим $\mathrm{A}^t = \{s \in S : \ (s,t) \in A\}$ — t–*сечение* множества $\subset S \times T$.

Определение 1. *Скажем, что множество* $\mathrm{A} \subset S \times T$ $\mathcal{N}$–*римо, если* $\mathrm{A}^t \in \mathcal{N}$ *при всех* $t \in T$.

Ясно, что множества из $\mathcal{A}$ $\mathcal{N}$–измеримы.

Всякий конечный или счетный набор попарно непересекающихся жеств будем называть *спектром*. Если (A_k) некоторый спектр $= \bigcup_k A_k$, то называем этот спектр А–*образующим*.

Определение 2. *Пусть* (A_k)— А–*образующий спектр* $\mathcal{N}$–*римых множеств из* $S \times T$, *и множество* A *также* $\mathcal{N}$–*римо. Скажем, что мера* ν *декартово счетно-аддитивна от-*

носительно μ (короче: декартово μ–счетно-аддитивна) на спектре (A_k), если

$$lim_n \quad \widetilde{\mu}(T(\parallel \nu(A^t) - \nu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^t) \parallel \geqslant a)) = 0$$

при всех $a > 0$. Другими словами, если последовательность функций $h_n(t) = \nu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^t)$ сходится по $\widetilde{\mu}$ к функции $h(t) = \nu(A^t)$ на T.

Понятие декартовой счетной аддитивности одной меры относительно другой впервые было введено автором данной статьи в совместной работе [3]. Оно позволяет рассматривать перемножаемые меры во взаимосвязи, что представляется более естественным при решении различных задач, связанных с произведением мер, нежели подразумеваемая до сих пор их независимость. В частности, именно это свойство мер даст нам возможность получить счетную аддитивность произведения ν и μ на некотором классе множеств без требования счетной аддитивности сомножителей по отдельности.

Замечание 1. В определении 2 функции $h_n(t)$ и $h(t)$ не обязательно измеримы в каком-либо смысле. Однако, если $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in$N, то функции $h_n(t)$ являются μ-простыми и потому μ–измеримыми. А так как $h_n(t) \to h(t)$ по $\widetilde{\mu}$, то функция $h(t)$ также μ–измерима.

Определение 3. *Обозначим через δ монотонную, равную нулю на пустом множестве и K–субаддитивную функцию множества $\delta : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$, а через $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ – класс таких множеств $A \in \mathcal{A}$, для которых функция $\delta(\mathrm{A}^t) : T \to [0, +\infty]$ $\widetilde{\mu}$–интегрируема.*

(K–субаддитивность: $\exists\, K > 0 : \quad A, B \in \mathcal{N}, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \delta(A \cup B) \leqslant K\big[\delta(A) + \delta(B)\big]$.)

Функции $\delta(\mathrm{A}^t)$ из определения 3 являются $\widetilde{\mu}$–простыми.

Далее в примере 1 будет показано, что класс $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ может быть не тривиальным (т.е. $\mathcal{A}(\delta, \mu) \neq \{\emptyset\}$).

Лемма 2. *Класс $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ является кольцом множеств.*

Доказательство. Для $A, B \in \mathcal{A}(\delta, \mu)$ имеем:

$$\delta\big[(A \cap B)^t\big] \leqslant \delta(A^t); \quad \delta\big[(A \setminus B)^t\big] \leqslant \delta(A^t);$$

$$\delta\big[(A \cup B)^t\big] = \delta\big[(A \setminus B)^t \cup (A \cap B)^t \cup (B \setminus A)^t\big] \leqslant$$

$$\leqslant K\delta(A^t) + K^2\big[\delta(A^t) + \delta(B^t)\big].$$

Осталось учесть свойства $\widetilde{\mu}$–интеграла.

Определение 4. *Будем говорить, что мера ν декартово μ-тно-аддитивна на кольце $\mathcal{A}(\delta,\mu)$, если она обладает этим йством на любом A–образующем спектре множеств из $\mathcal{A}(\delta,\mu)$,* $\in \mathcal{A}(\delta,\mu)$.

Основной результат.

Теорема 1. *Пусть меры ν и μ конечно-аддитивны на алгебрах и $\mathcal{M}$ соответственно, а кольцо $\mathcal{A}(\delta,\mu)$ не тривиальное. Если а ν декартово μ-счетно-аддитивна на этом кольце, и для каждого $A\in\mathcal{A}(\delta,\mu)$ верны неравенства $\|\,\nu(A^t)\,\|_X \leqslant \delta(A^t)$ $\widetilde{\mu}$-почти всех $t\in T$, то на этом кольце существует счетно-аддитивная мера $m=\nu\times\mu$, представимая полубилинейным μ-интегралом*

$$m(A)=\int_T \nu(A^t)\,d\mu,\qquad A\in\mathcal{A}(\delta,\mu). \tag{1}$$

Доказательство. Определим на $\mathcal{A}(\delta,\mu)$ меру-произведение. $A\in\mathcal{A}(\delta,\mu)$ и $A=\bigcup_{k=1}^{n} F_k\times E_k$, где $F_k\times E_k$ $(F_k\in\mathcal{N}, E_k\in$ $k=1,\cdots,n)$ являются попарно дизъюнктными измеримыми оугольниками, то положим

$$m(A)=\sum_{k=1}^{n} \nu(F_k)\bullet\mu(E_k).$$

о, что мера m определена корректно и конечно-аддитивна.

Для $A\in\mathcal{A}(\delta,\mu)$ рассмотрим функцию

$$\nu(A^t)=\sum_{k=1}^{n} \nu(F_k)\chi_{E_k}(t).$$

является μ-простой, а ее норма-функция $\|\,\nu(A^t)\,\|_X$ – $\widetilde{\mu}$-той. Так как $\|\,\nu(A^t)\,\|_X\leqslant\delta(A^t)$ $\widetilde{\mu}$-п.в. на T, то $\nu(A^t)$ μ-грируема на T. По определению μ-интеграла:

$$\int_T \nu(A^t)\,d\mu=\sum_{k=1}^{n} \nu(F_k)\bullet\mu(E_k).$$

самым представление (1) получено. Докажем счетную аддиость m на $\mathcal{A}(\delta,\mu)$.

Пусть $A\in\mathcal{A}(\delta,\mu)$ и (A_k) – его счетный A–образующий спектр жеств из $\mathcal{A}(\delta,\mu)$. Так как ν декартово μ–счетно-аддитивна, едовательность функций $h_n(t)=\nu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^t)$ сходится по $\widetilde{\mu}$ к кции $h(t)=\nu(A^t)$, причем $\|\,h_n(t)\,\|_X\leqslant\delta(A^t)$ $\widetilde{\mu}$ -п.в. на T. леммы 1 и аддитивности μ–интеграла имеем:

$$m(A)=\int_T h(t)\,d\mu=lim_n \int_T h_n(t)\,d\mu=$$

$$=lim_n \sum_{k=1}^{n}\int_T \nu(A_k^t)\,d\mu=lim_n\sum_{k=1}^{n} m(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Замечание 2. В теореме 1 потребована декартова μ-счетная аддитивность меры ν. Если ν счетно-аддитивна на $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ является σ-алгеброй, а $\widetilde{\mu}$ – н.в.мерой, то это свойство будет выполняться автоматически (см. теорему 1 из [3]).

В следующем примере показывается, что обоснованный в теореме 1 способ выделения "участка счетной аддитивности" произведения мер достаточно удобен. При этом следует заметить, что широта этого участка фактически зависит не только от функции множества δ и меры μ, но и от меры ν. В примере определяется нетривиальное кольцо $\mathcal{A}(\delta,\mu)$ при неограниченной мере ν.

Пример 1. Пусть $X = Z = l_\infty$ – пространства ограниченных числовых последовательностей с sup-нормой, Y – полугруппа ограниченных последовательностей неотрицательных чисел с sup-квазинормой. Полубилинейное отображение определим так: если $x = (x_n) \in X$, $y = (y_n) \in Y$, то $x \bullet y = (x_n y_n) \in Z$. Ясно, что $\| x \bullet y \|_Z \leqslant \| x \|_X \| y \|_Y$.

Пусть $T = S = \mathrm{N}$. $\mathcal{N}$ – алгебра, порожденная системой конечных подмножеств множества N, $\mathcal{M}$ – σ-алгебра всех подмножеств множества N. Меру $\nu : \mathcal{N} \to X$ зададим условиями: $\nu(S) = \nu(\emptyset) = O_X$, а для остальных множеств $F \in \mathcal{N}$ положим

$$\nu(F) = \begin{cases} \sum\limits_{s\in F} se_s, & \text{если } F \text{ конечно;} \\ \sum\limits_{s\in S\setminus F} -se_s, & \text{если } S\setminus F \text{ конечно.} \end{cases}$$

Меру $\mu : \mathcal{M} \to Y$ определим так: $\mu(\emptyset) = O_Y$, а если $E \neq \emptyset$, то для некоторого числа $p \geqslant 2$ положим:

$$\mu(E) = \sum_{t\in E} e_t/t^p.$$

Здесь e_s и e_t – единичные координатные векторы пространств X, Y.

Эти меры конечно-аддитивны, причем ν не ограничена по норме пространства X, а X-полувариация $\widetilde{\mu}$ меры μ определяется равенством $\widetilde{\mu}(E) = sup\{1/t^p,\ t \in E\}$ и является н.в.мерой.

Для определения класса $\mathcal{A}(\delta,\mu)$ зададим на T какую-либо неотрицательную $\widetilde{\mu}$-интегрируемую функцию, например $g(t) = t^q$, где $0 < q < p-1$. Это неограниченная функция, ее можно записать в виде $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^q\, \chi_{\{n\}}(t)$. Она $\widetilde{\mu}$-измерима, ибо последовательность простых функций $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^q \chi_{\{k\}}(t)$ сходится к g по $\widetilde{\mu}$. Для интегралов от g_n верны неравенства

$$J(g_n, E, \widetilde{\mu}) \leqslant \sum_{k \leqslant n,\ k \in E} 1/k^{p-q}, \quad E \in \mathcal{N}.$$

Нетрудно проверить, что последовательность интегралов $J(g_n, E, \widetilde{\mu})$, $n \in \mathbb{N}$, равностепенно абсолютно непрерывна относительно $\widetilde{\mu}$. Следовательно, функция g действительно $\widetilde{\mu}$–интегрируема.

Теперь определим на множествах $F \in \mathcal{N}$ неотрицательную монотонную и субаддитивную функцию множества δ:

$$\delta(F) = \begin{cases} 0, & F = \emptyset; \\ sup\{s : s \in F\}, & F \neq \emptyset. \end{cases}$$

Для множеств $A \in \mathcal{A}$, таких, что $A^t \subset \{s \in S : s \leqslant t^q\}$, $t \in T$, функции $\delta(A^t)$ $\widetilde{\mu}$–интегрируемы, ибо $\delta(A^t) \leqslant t^q$, $t \in T$. Все такие множества A и объединим в класс $\mathcal{A}(\delta, \mu)$. Для $A \in \mathcal{A}(\delta, \mu)$ верны неравенства $\| \nu(A^t) \| \leqslant \delta(A^t)$, $t \in T$.

Пусть теперь (A_k) – A-образующий спектр множеств из $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ и $A \in \mathcal{A}(\delta, \mu)$. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдется такое $t_0 \in T$, что $\widetilde{\mu}(E_{t_0}) = \widetilde{\mu}(\{t \in T : t \geqslant t_0\}) < \varepsilon$. По конструкции класса $\mathcal{A}(\delta, \mu)$, при любом $a > 0$ $\exists\, n_0 \in$ N: $n \geqslant n_0 \Rightarrow$

$$T(\| \nu(A^t) - \nu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^t) \| \geqslant a) \subset E_{t_0}.$$

Следовательно, мера ν декартово μ-счетно-аддитивна на $\mathcal{A}(\delta, \mu)$.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и на построенном классе $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ можно определить счетно аддитивное произведение $m = \nu \times \mu$.

Обратим внимание на то, что в примере 1 класс $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ может быть тем шире, чем меньше значения $\widetilde{\mu}$. Если в определении меры μ взять $p = 2$, то широту этого класса можно определять функцией $g(t) = \sqrt{t}$, если $p = 4$, то функцией $g(t) = t^2$. Ясно, что в последнем случае класс $\mathcal{A}(\delta, \mu)$ охватит больший участок из $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В статье [3] при подготовке к публикации допущены неточности: 1) пространство Z должно быть полным; 2) в теореме 1 алгебра M должна быть σ–алгеброй.

Литература

1. **Swartz C.** A generalisation of a theorem of Duchon on product of vector measures.// *Math. Anal. Appl.* 1975. 51. P. 621-628.

2. **Chivukula R.R., Sastry A.S.** Product vector measures via Bartle integrals // *J. Math. Anal. Appl.* 1983. 96. P. 180-195.

3. **Арешкин Г.Я, Исаков В.Н.** О счетной аддитивности произведения мер/ Коми гос. пед. ин-т. Сыктывкар, 1994. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.94, № 954-В94.

4. **Bartle R.G.** A general bilinear vector integral.// *Studia Math.* 1956. 15. P. 337-352.

5. **Алексюк В.Н.** Функции множеств/ Коми гос. пед. ин-т. Сыктывкар, 1981. 165 с. Деп. в ВИНИТИ 21.09.81, № 4543-81. (См. также: Функции множеств: учебное пособие. Л.: Лен. гос. пед. ин-т им. А.И.Герцена, 1982. С. 77.)

Summary

Isakov V. N. On the problem of countable additivity of the abstract measures product

Vector-valued and semigroup-valued finitely additive measures on algebra of sets are considered. The method of picking out the class of sets is given where the product of these measures exists and is countably additive.

Коми педагогический институт

Поступила 5.02.96