Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 512.6

KS-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНВОЛЮЦИИ НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР

А. В. Жубр

KS-преобразование — это некоторое билинейное отображение $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, использованное П. Кустаанхеймо и Е. Штифелем [1] для регуляризации задачи двух тел (с целью применения этой регуляризации к "возмущенной" задаче). Существуют и другие отображения $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, обладающие теми же формальными свойствами, что и преобразование Кустаанхеймо — Штифеля, и также пригодные для применения к возмущенной задаче двух тел. Идея поиска и применения таких "обобщенных" KS-преобразований принадлежит С.М.Полещикову. Решение задачи классификации KS-преобразований в случае $n = 4$ содержится в работе [2], а некоторые частичные результаты для случая $n = 8$ — в работе [3]. В настоящей работе предлагается простое общее решение задачи классификации, основанное на сведении ее к хорошо известной теории (конечномерных) нормированных алгебр.

Ортогональное умножение в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ — это билинейное отображение $\lambda : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию ортогональности

$$|\lambda(x,y)| = |x| \cdot |y| \,, \tag{1}$$

где $|x|$ — стандартная норма в $\mathbf{R}^n$. Наличие ортогонального умножения превращает $\mathbf{R}^n$ в *нормированную алгебру*; как хорошо известно, это возможно лишь при $n = 1, 2, 4$ или 8 (например, это следует из классической теоремы Гурвица — см. [4]).

Пусть $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — ортогональная инволюция, т. е. ортогональный оператор с $\sigma^2 = \mathbf{1}$ (через $\mathbf{1}$ здесь и в дальнейшем обозначается тождественный оператор). Такой оператор определяет разложение пространства $\mathbf{R}^n$ в ортогональную сумму собственных подпространств $P(\sigma)$ и $N(\sigma)$, соответствующих собственным значениям $+1$ и -1. Размерность "неподвижного подпространства" $P(\sigma)$ мы будем называть рангом инволюции σ и обозначать буквой p.

Умножение λ мы называем σ-симметричным, если выполнено тождество

$$\lambda(y,x) = \sigma\lambda(x,y) \ . \tag{2}$$

При $(n,p) = (4,3)$ понятие ортогонального σ-симметричного умножения совпадает с рассмотренным в [2] понятием обобщенного KS-преобразования: если положить $\lambda(x,y) = L(x) \cdot y$, где L — KS-матрица, и взять инволюцию σ, действующую по формуле

$$\sigma(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{при } 1 \le i \le 3 \ , \\ -e_i & \text{при } i = 4 \ , \end{cases} \tag{3}$$

то условие (1) превратится в [2, условие (1,4)], а условие (2) — в [2, условия (1,5), (1.6)]. В связи с этим, а также и для сокращения записи, мы будем вместо "ортогональное σ-симметричное умножение" писать короче "KS-умножение" и обозначать множество всех KS-умножений с данным σ через $\mathcal{KS}(\sigma)$. Условия (1) и (2) определяют $\mathcal{KS}(\sigma)$ как замкнутое ограниченное подмножество линейного пространства всех билинейных отображений $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, тем самым как компактное топологическое пространство (и даже вещественное алгебраическое многообразие). Очевидно, мы всегда можем предполагать, выбрав подходящий базис в $\mathbf{R}^n$, что инволюция σ имеет стандартный вид

$$\sigma(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{при } 1 \le i \le p \ , \\ -e_i & \text{при } p < i \le n \ , \end{cases} \tag{4}$$

и в этом стандартном случае мы пишем $\mathcal{KS}(n,p)$ вместо $\mathcal{KS}(\sigma)$.

Мы рассматриваем задачу классификации KS-умножений, то есть описания, для каждой инволюции $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, пространства $\mathcal{KS}(\sigma)$ (или, эквивалентным образом, для каждой пары (n,p) — пространства $\mathcal{KS}(n,p)$). При $n = 4$ это как раз та задача, которая решается в работе [2].

Мы будем употреблять следующие обозначения. Для произвольного (конечномерного) евклидова пространства V пусть $\mathrm{O}(V)$ — группа всех ортогональных операторов $\varphi : V \to V$ и $\mathrm{SO}(V)$ — подгруппа группы $\mathrm{O}(V)$, заданная условием $\det\varphi = 1$. Фиксация в пространстве V базиса отождествляет группы $\mathrm{O}(V)$ и $\mathrm{SO}(V)$ с группами ортогональных и специальных ортогональных матриц O_n и SO_n, $n = \dim V$.

Для подпространства $V_0 \subset V$ пусть $\mathrm{O}(V, V_0)$ (соответственно $\mathrm{SO}(V, V_0)$) обозначает подгруппу группы $\mathrm{O}(V)$ (соответственно $\mathrm{SO}(V)$), заданную условием $\varphi(V_0) = V_0$. "Координатное представление" группы $\mathrm{O}(V, V_0)$ есть, очевидно, $\mathrm{O}_p \times \mathrm{O}_{n-p}$, где $n = \dim V$ и $p = \dim V_0$.

Аналогичным образом, для вектора $e \in V$ пусть $\mathrm{O}(V, e)$ и $\mathrm{SO}(V, e)$ — подгруппы групп $\mathrm{O}(V)$ и $\mathrm{SO}(V)$ заданные условием $\varphi(e) = e$ и изоморфные, соответственно, O_{n-1} и SO_{n-1}).

Заметим теперь, что условия (1) и (2) обладают естественной группой симметрий: если $\lambda \in \mathcal{KS}(\sigma)$, $f \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$ и $g \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^n, P(\sigma))$, то новое умножение λ_1, заданное формулой

$$\lambda_1(x, y) = g\lambda(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \ , \tag{5}$$

снова представляет собой элемент множества $\mathcal{KS}(\sigma)$. Формула (5) определяет, таким образом, действие группы $\mathrm{O}(\mathbf{R}^n, P(\sigma)) \times \mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$ на множестве $\mathcal{KS}(\sigma)$. Взяв в этой формуле $g = \mathbf{1}$, мы получим действие

$$\lambda(x, y) \mapsto = \lambda(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \tag{6}$$

на $\mathcal{KS}(\sigma)$ группы $\mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$. Это последнее рассматривается в п.6 работы [2] и будет играть существенную роль ниже.

В качестве первого приближения к задаче классификации KS-умножений мы определим, для каких σ существует хотя бы одно KS-умножение.

Теорема 1. *Множество $\mathcal{KS}(n, p)$ непусто тогда и только тогда, когда $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ и $p \in \left\{1, \frac{n}{2} + 1\right\}$.*

Необходимость условия $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ следует, как уже было отмечено, из теоремы Гурвица о нормированных алгебрах с единицей. Для доказательства остальных утверждений теоремы нам потребуется ряд более или менее стандартных фактов относительно таких алгебр. Пусть K — некоторая нормированная алгебра с единицей; мы будем обозначать произведение элементов $x, y \in K$ через $x \cdot y$, единицу — через e и ортогональное дополнение к e — через K'. Теорема Гурвица утверждает, что алгебра K изоморфна одной из четырех стандартных: действительные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа C, кватернионы H и октавы (числа Кэли) Ca. Мы, как ... будем считать, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset$ Ca.

Напомним, что автоморфизм (антиавтоморфизм) алгебры K — это линейный оператор $\varphi : K \to K$, удовлетворяющий тождеству $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ (соответственно, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$); ... оператор необходимо ортогонален (см. [5], с.303) и неподвижен на e, и поэтому определяется своим сужением на K'. Автоморфизм или антиавтоморфизм φ называется инволютивным, если $\varphi^2 =$ ... Каждая алгебра K обладает каноническим инволютивным антиавтоморфизмом — оператором сопряжения c_K, определенным формулой $c_K|_{K'} = -1$. Вместо $c_K(x)$ мы обычно будем писать короче ... Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 1. *Оператор сопряжения c_K перестановочен со всеми автоморфизмами и антиавтоморфизмами алгебры K. Оператор $\varphi : K \to K$ тогда и только тогда является автоморфизмом (инволютивным автоморфизмом), когда $c_K \circ \varphi$ — антиавтоморфизм (соответственно, инволютивный антиавтоморфизм).*

Пусть $A \subset K$ — ненулевая собственная подалгебра. Из неравенства $\dim A < \dim K$ и из теоремы Гурвица (примененной к обеим алгебрам) следует, что $\dim A \le \frac{1}{2} \dim K$. Мы называем подалгебру A *максимальной*, если $\dim A = \frac{1}{2} \dim K$. Следующая лемма устанавливает связь между максимальными подалгебрами и инволютивными автоморфизмами алгебры K.

Лемма 2. *Пусть $\varphi : K \to K$ — инволютивный автоморфизм, отличный от тождественного. Тогда его "неподвижное подпространство" $P(\varphi)$ — максимальная подалгебра в K. Обратно, если $A \subset K$ — некоторая максимальная подалгебра, то инволюция $\varphi : K \to K$, равная 1 на A и -1 на $A^\perp$, является автоморфизмом.*

Доказательство. Очевидно, то, что $A = \{x \,|\, \varphi(x) = x\}$ — подалгебра, верно для любого автоморфизма φ (не обязательно инволютивного). Для доказательства максимальности подалгебры A возьмем какой-нибудь единичный вектор $a \in A^\perp$ (из $\varphi \neq 1$ следует, очевидно, что $A^\perp \neq 0$) и рассмотрим ортогональный оператор $\hat{a} : K \to K$, действующий по формуле $\hat{a}(x) = a \cdot x$. Ввиду $a \in A^\perp$ имеем $\varphi(a) = -a$, и следовательно, $\varphi(a \cdot x) = -a \cdot \varphi(x)$, так что оператор $\hat{a}$ переводит A в $A^\perp$ и $A^\perp$ в A. Отсюда (и из невырожденности оператора $\hat{a}$) следует $\dim A = \dim A^\perp$, т. е. $\dim A = \frac{1}{2}\dim K$.

Обратно, пусть $A \subset K$ — максимальная подалгебра и $\varphi : K \to K$ — инволюция с $P(\varphi) = A$. Чтобы доказать, что φ — автоморфизм, достаточно проверить четыре включения:

(1) $A \cdot A \subset A$;

(2) $A \cdot A^\perp \subset A^\perp$;

(3) $A^\perp \cdot A \subset A^\perp$;

(4) $A^\perp \cdot A^\perp \subset A$.

В самом деле, проверку тождества $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ достаточно, в силу линейности, проделать для того случая, когда $x, y \in A \cup A^\perp$, а это сводится как раз к указанным включениям.

Первое включение означает, конечно, просто что A — подалгебра. Нетрудно убедиться, что включения (2) и (3) также верны для любой подалгебры. Для доказательства заметим, что, в силу ортогональности умножения, для любых x, y и z из $y \perp z$ следует $x \cdot y \perp x \cdot z$. В частности, мы имеем $x \cdot y \perp x \cdot z$ для любых $x, y \in A$ и $z \in A^\perp$. Записав это утверждение в виде $x \cdot A \perp x \cdot z$ и заметив, что $x \cdot A = A$ (при $x \neq 0$), получаем $x \cdot z \in A$, что дает включение (2). Точно так же доказывается и (3). Для доказательства последнего включения рассмотрим опять ортогональный оператор $\hat{a} : K \to K$, определенный, так же, как и выше, для произвольного единичного $a \in A^\perp$. Вследствие (3) мы имеем $\hat{a}(A) \subset A^\perp$. Если теперь A максимальна, то $\dim \hat{a}(A) = \dim A = \dim A^\perp$, так что включение означает в действительности равенство $\hat{a}(A) = A^\perp$, а тогда, в силу ортогональности оператора $\hat{a}$, имеем $\hat{a}(A^\perp) = A$. Таким образом, включение $a \cdot A^\perp \subset A$ выполняется для всех $a \in A^\perp$ с нормой 1, а тем самым и вообще для всех $a \in A^\perp$ ∎

В качестве немедленного следствия лемм 1 и 2 мы получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Существует взаимно однозначное соответствие между инволютивными антиавтоморфизмами алгебры K, отличными от c_K, и максимальными подалгебрами алгебры K. Это соответствие относит подалгебре $A \subset K$ антиавтоморфизм φ по формуле*

$$\begin{cases} \varphi|_A = c_A & , \\ \varphi|_{A^\perp} = \mathbf{1} & . \end{cases} \tag{7}$$

Мы будем обозначать результат продолжения инволюции

$$c_A : A \to A$$

на всю алгебру K по правилу (7) тем же символом c_A. Мы имеем, таким образом, некоторое описание всех инволюций алгебры K: во-первых, это семейство инволюций c_A ранга $\frac{1}{2}\dim K + 1$ (параметризованное максимальными подалгебрами A), и во-вторых, единственная инволюция c_K ранга 1.

Теперь мы можем доказать теорему 1.

Достаточность

Случай $p = 1$. При $n = 1, 2, 4$ или 8 возьмем в качестве K соответственно **R**, **C**, **H** или **Ca**; для $x, y \in K$ положим $\lambda(x, y) = x \cdot \bar{y}$. Имеем $\lambda(y, x) = \overline{\lambda(x, y)}$, так что $\lambda \in \mathcal{KS}(c_K)$.

Случай $p = (\frac{n}{2}) + 1$. При 2, 4 или 8 возьмем в качестве K соответственно **C**, **H** или **Ca**, а в качестве A — соответственно **R**, **C** или **H**; положим $\lambda(x, y) = x \cdot c_A(y)$. Аналогично первому случаю, $\lambda(y, x) = c_A\lambda(x, y)$, так что $\lambda \in \mathcal{KS}(c_A)$

Необходимость

Пусть $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — ортогональная инволюция и $\lambda \in \mathcal{KS}(\sigma)$. Фиксируем некоторый единичный вектор $e \in \mathbf{R}^n$. Мы теперь построим другое ортогональное умножение в $\mathbf{R}^n$, для которого e будет единицей. Для этого определим ортогональный оператор ρ формулой $\rho(x) = \lambda(x, e)$ и новую инволюцию τ формулой $\tau = \rho^{-1}\sigma\rho$. Заметим, что, по определению, $\rho(e) = \lambda(e, e) = \sigma\lambda(e, e) = \sigma\rho(e)$, так что $\tau(e) = e$. Определим, наконец, произведение $x \cdot y$, для $x, y \in \mathbf{R}^n$, формулой

$$x \cdot y = \rho^{-1}\lambda(x, \tau(y)). \tag{8}$$

Прямая проверка показывает, что $(\mathbf{R}^n, \cdot)$ — нормированная алгебра с единицей e, и что τ — ее антиавтоморфизм. Нам остается только заметить, что, так как инволюции σ и τ сопряжены, то их ранги одинаковы, и сослаться на лемму 3 ∎

Перейдем теперь к задаче классификации KS-отображений. Для этого нам потребуется некоторая дополнительная информация об автоморфизмах нормированных алгебр с единицей. Группу всех автоморфизмов алгебры K мы обозначаем через $\mathrm{Aut}(K)$. Для произвольной подалгебры $A \subset K$ мы обозначаем через $\mathrm{Aut}(K, A)$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}(K)$, составленную из автоморфизмов, сохраняющих A. Как уже отмечалось выше, всякий автоморфизм алгебры K

…еделяется своим действием на K' и ортогонален, так что можно …тать, что $\mathrm{Aut}(K) \subset \mathrm{O}(K')$ и $\mathrm{Aut}(K, A) \subset \mathrm{O}(K', A')$.

Лемма 4. (1) *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ *совпадает с* $\mathrm{O}(\mathbf{C}')$ *и состоит, …довательно, из двух элементов.*

(2) *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathbf{H})$ *совпадает с* $\mathrm{SO}(\mathbf{H}')$ *— следовательно, …зна и имеет размерность* 3.

(3) *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathbf{Ca})$ *связна и имеет размерность* 14.

Утверждение (1) тривиально. По поводу утверждений (2) и (3) … например, [5], стр. 307 и 325.

Лемма 5. *Действие группы* $\mathrm{Aut}(K)$ *на множестве макси…льных подалгебр алгебры* K *транзитивно.*

Доказательство. В случае $K = \mathbf{C}$ утверждение тривиально — в $\mathbf{C}$ всего одна максимальная подалгебра $\mathbf{R}$. В случае $K = \mathbf{H}$ …ая максимальная подалгебра изоморфна $\mathbf{C}$ и, следовательно, …ождается (мультипликативно) одним вектором, который можно …тать единичным и принадлежащим $\mathbf{H}'$; очевидно, что группа …$\mathbf{H}) = \mathrm{O}(\mathbf{H}')$ переводит любые два таких вектора друг в друга. …логично, в случае $K = \mathbf{Ca}$ всякая максимальная подалгебра изо…фна $\mathbf{H}$ и, следовательно, порождена парой единичных взаимно …пендикулярных векторов из $\mathbf{Ca}'$. Из описания группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{Ca}')$, …держащегося в [5] (лемма 1 на стр. 325), непосредственно следует, … эта группа переводит друг в друга любые две такие пары ∎

Лемма 6. *Пусть* A *— максимальная подалгебра алгебры* K. *…гда группа* $\mathrm{Aut}(K, A)$ *гомеоморфна (как топологическое про…странство) прямому произведению* $\mathrm{Aut}(A) \times S(A^\perp)$, *где* $S(A^\perp)$ *…означает множество единичных векторов пространства* $A^\perp$ *(т.е. сферу размерности* $\dim A - 1$*). При этом гомеоморфизме …оекция на первый сомножитель совпадает с оператором суже…ния* $\mathrm{Aut}(K, A) \to \mathrm{Aut}(A)$.

Доказательство. Фиксируем единичный вектор $e \in A^\perp$ и опре…лим непрерывное отображение

$$\mathrm{Aut}(K, A) \to \mathrm{Aut}(A) \times S(A^\perp)$$

…ормулой $\varphi \mapsto (\varphi|_A, \varphi(e))$. Взаимная однозначность этого отобра…жения тривиальна при $K = \mathbf{C}$ (в этом случае $\mathrm{Aut}(A)$ состоит из одного элемента), а в случаях $K = \mathbf{H}$ и $K = \mathbf{Ca}$ прямо следует из описания групп $\mathrm{Aut}(\mathbf{H})$ и $\mathrm{Aut}(\mathbf{Ca})$ (см. опять лемму 1 на стр. 325 в [5] по поводу случая $K = \mathbf{Ca}$) ∎

Для того, чтобы сформулировать теорему о структуре множества KS-умножений, введем еще несколько обозначений. Пусть опять $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ и $p \in \left\{1, \frac{n}{2} + 1\right\}$. Всюду ниже K обозначает стандартную алгебру размерности n (т.е. $\mathbf{R}$ при $n = 1$, $\mathbf{C}$ при $n = 2$ и т. д.), а A — ее стандартную подалгебру размерности $n + 1 - p$ (т.е. стандартную максимальную подалгебру при $p = \frac{n}{2} + 1$, и саму алгебру K при $p = 1$). Пусть $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — ортогональная инволюция ранга p. Через $X(\sigma)$ мы обозначаем множество ортогональных отображений $\alpha : K \to \mathbf{R}^n$ с $\alpha(A') = N(\sigma)$ — другими словами, удовлетворяющих соотношению

$$\sigma\alpha = \alpha c_A \ . \tag{9}$$

Если фиксировать некоторый элемент α_0 множества $X(\sigma)$, то любой другой его элемент α можно единственным образом записать в виде $\alpha_0 f$ с $f \in \mathrm{O}(K, A')$. Таким образом, $X(\sigma)$ можно отождествить с $\mathrm{O}(K, A')$ (это отождествление зависит, конечно, от выбора α_0), и тем самым с $\mathrm{O}_p \times \mathrm{O}_{n-p}$.

Пусть, далее, $e \in \mathbf{R}^n$ — некоторый единичный вектор. Через $Y(E)$ мы обозначаем множество ортогональных отображений $\varphi : K \to \mathbf{R}^n$ с $\varphi(1) = e$ (здесь 1 — единица алгебры K). Если фиксировать некоторый $\varphi_0 \in Y(e)$, то любой другой φ можно единственным образом записать в виде $\varphi_0 g$ с $g \in \mathrm{O}(K, 1)$, что позволяет отождествить $Y(e)$ с $\mathrm{O}(K, 1) \approx \mathrm{O}_{n-1}$.

Наконец, обозначим декартово произведение $X(\sigma) \times Y(e)$ через $Z(\sigma, e)$, а $\mathrm{O}(K, A') \times \mathrm{O}(K, 1)$ — через $G(K, A)$. В силу сказанного выше, любая пара $(\alpha_0, \varphi_0) \in Z(\sigma, e)$ дает отождествление множества $Z(\sigma, e)$ с группой Ли $G(K, A)$. Группа $\mathrm{Aut}(K, A)$ является подгруппой как в $\mathrm{O}(K, A')$, так и в $\mathrm{O}(K, 1)$ и, следовательно, действует на множестве $Z(\sigma, e)$ по формуле

$$(\alpha, \varphi) \mapsto (\alpha h, \varphi h), \ h \in \mathrm{Aut}(K, A) \ .$$

При указанном выше отождествлении это действие, очевидно, соответствует правому умножению элементов группы $G(K, A)$ на элементы образа "диагонального" вложения $\mathrm{Aut}(K, A) \to G(K, A)$. Мы будем далее обозначать этот образ так же, как и саму группу — через $\mathrm{Aut}(K, A)$.

Теорема 2. (а) *Для любой пары* $(\alpha, \varphi) \in Z(\sigma, e)$ *формула*

$$\lambda(x, y) = \alpha\left(\varphi^{-1}(x) \cdot c_A \varphi^{-1}(y)\right) \tag{10}$$

определяет некоторое KS*-умножение* $\lambda \in \mathcal{KS}(\sigma)$.

(б) *Отображение*

$$Z(\sigma, e) \to \mathcal{KS}(\sigma) \ , \tag{11}$$

определенное формулой (10), *сюръективно.*

(в) *Две пары* (α, φ), $(\alpha_1, \varphi_1) \in Z(\sigma, e)$ *переводятся отображением* (11) *в один элемент множества* $\mathcal{KS}(\sigma)$ *в том и только том случае, если* $\alpha_1 = \alpha h$ *и* $\varphi_1 = \varphi h$ *для некоторого* $h \in \mathrm{Aut}(K, A)$.

Доказательство.

<u>Утверждение (а)</u>

То, что формула (10) дает KS-умножение, проверяется тривиально: выполнение условия (1) следует из ортогональности отображений α и φ, а выполнение условия (2) — из соотношения (9) и из того, что c_A — антиавтоморфизм (ср. доказательство достаточности в теореме 1).

<u>Утверждение (б)</u>

Пусть $\lambda \in \mathcal{KS}(\sigma)$. Рассуждая опять как при доказательстве теоремы 1, мы получим некоторое ортогональное умножение в $\mathbf{R}^n$ с единицей e, связанное с λ формулой (8). Обозначив подалгебру алгебры $(\mathbf{R}^n, \cdot)$, соответствующую антиавтоморфизму τ, через B, мы запишем формулу (8) в виде

$$\lambda(x, y) = \rho\left(x \cdot c_B(y)\right) \ . \tag{12}$$

Теперь мы воспользуемся теоремой Гурвица, в силу которой существует изоморфизм $\varphi : K \to \mathbf{R}^n$, а также (в случае $p = \frac{n}{2} + 1$) леммой 5, в силу которой можно считать $\varphi(A) = B$, что эквивалентно соотношению

$$\varphi c_A = c_B \varphi \ . \tag{13}$$

Переписав правую часть (12) в виде $\rho\varphi\left(\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1} c_B(y)\right)$ и заменив, пользуясь (13), $\varphi^{-1} c_B$ на $c_A \varphi^{-1}$, мы и получим представление (10) с $\alpha = \rho\varphi$ (соотношение (9), и тем самым включение $\alpha \in X(\sigma)$, следует из (13) ввиду $c_B = \tau = \rho^{-1}\sigma\rho$).

Утверждение [illegible]

Пусть для всех $x, y \in \mathrm{R}^n$ выполнено

$$\alpha\left(\varphi^{-1}(x) \cdot c_A\varphi^{-1}(y)\right) = \alpha_1\left(\varphi_1^{-1}(x) \cdot c_A\varphi_1^{-1}(y)\right) \ . \tag{14}$$

Обозначив $\varphi_1^{-1}(x)$ через u, $\varphi_1^{-1}(y)$ через v, $\alpha^{-1}\alpha_1$ через g и $\varphi^{-1}\varphi_1$ через h, запишем (14) в виде

$$h(u) \cdot c_A h(v) = g\left(u \cdot c_A(v)\right) \ . \tag{15}$$

Из $\varphi, \varphi_1 \in Y(e)$ следует $h(1) = 1$, поэтому, положив в тождестве (15) $v = 1$, получаем из него, что $h = g$. Далее, из $\alpha, \alpha_1 \in X(\sigma)$ следует $g(A') = A'$, откуда $c_A g = g c_A$. Теперь мы можем переписать (15) в виде

$$h(u) \cdot h(c_A(v)) = h(u \cdot c_A(v)) \ ,$$

откуда, очевидно, следует, что h — автоморфизм. Ввиду $h(A') = A'$, он принадлежит группе $\mathrm{Aut}(K, A)$ ■

Теорема 2 дает представление $\mathcal{KS}(\sigma)$ в виде множества орбит действия группы $\mathrm{Aut}(K, A)$ на $Z(\sigma, e)$ или, учитывая отождествление $Z(\sigma, e)$ с группой $G(K, A)$, с факторпространством $G(K, A)/\mathrm{Aut}(K, A)$. В частности, мы видим, что $\mathcal{KS}(\sigma)$ — однородное пространство компактной группы Ли $G(K, A)$ и, следовательно, замкнутое гладкое многообразие. Мы определим для начала размерность многообразия $\mathcal{KS}(\sigma)$ и число его компонент связности. Заметим, что, в силу однородности, все компоненты диффеоморфны друг другу.

Теорема 3. *Число компонент и размерность многообразия $\mathcal{KS}(n, p)$ даются таблицей*

n	p	*число компонент*	*размерность*
1	1	2	0
2	1	4	0
2	2	2	1
4	1	8	3
4	3	4	5
8	1	8	28
8	5	8	28

Доказательство. Мы рассмотрим каждый случай отдельно. Напомним, что $G(K, A) \approx \mathrm{O}_p \times \mathrm{O}_{n-p} \times \mathrm{O}_{n-1}$.

Случай $(n,p)=(1,1)$. В этом случае $K=A=\mathbf{R}$, $G(K,A)=O_1=\{\pm1\}$ и $\mathrm{Aut}(K,A)=\mathrm{Aut}(\mathbf{R})=\{1\}$. Таким образом, множество $\mathcal{KS}(1,1)$ состоит из двух точек, которым соответствуют два умножения в $\mathbf{R}$: xy и $-xy$.

Случай $(n,p)=(2,1)$. В этом случае $K=A=\mathbf{C}$, $G(K,A)=O_1^3$ — группа из 8 элементов и $\mathrm{Aut}(K,A)=\mathrm{Aut}(\mathbf{C})=\{1,c_{\mathbf{C}}\}$ — группа из 2 элементов. Следовательно, множество $\mathcal{KS}(2,1)\approx O_1^3/\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ состоит из 4 точек. Соответствующие им KS-умножения также нетрудно выписать в явном виде: очевидно, что это $x\bar{y}$, $-x\bar{y}$, $\bar{x}y$ и $-\bar{x}y$.

Случай $(n,p)=(2,2)$. Здесь $K=\mathbf{C}$, $A=\mathbf{R}$, $G(K,A)=O_2\times O_1$ — группа размерности 1, имеющая 4 компоненты (т.е. топологически это 4 окружности) и $\mathrm{Aut}(K,A)=\mathrm{Aut}(\mathbf{C},\mathbf{R})=\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ — опять группа из 2 элементов. При этом элементы 1 и $c_{\mathbf{C}}$ группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{C},\mathbf{R})$ по-разному ведут себя по отношению к ориентации пространства $A^-=i\mathbf{R}$ и поэтому попадают в различные компоненты группы $G(K,A)$. Отсюда следует, что при факторизации число компонент уменьшится вдвое, так что $\mathcal{KS}(2,2)$ — две окружности, как и утверждалось. Как нетрудно догадаться, эти окружности — не что иное как два семейства умножений $e^{it}xy$ и $e^{it}\bar{x}\bar{y}$, $t\in\mathbf{R}$.

Случай $(n,p)=(4,1)$. Здесь $K=A=\mathbf{H}$, группа

$$G(K,A)=O_1\times O_3\times O_3$$

имеет 8 компонент размерности 6, а группа $\mathrm{Aut}(K,A)=\mathrm{Aut}(\mathbf{H})=SO_3$ связна и имеет размерность 3, что и дает требуемое утверждение. Вопрос о топологическом типе компонент в этом и последующих случаях мы рассмотрим позже.

Случай $(n,p)=(4,3)$. Это как раз тот случай, который изучен в работе [2]. Здесь $K=\mathbf{H}$, $A=\mathbf{C}$, группа

$$G(K,A)=O_3\times O_1\times O_3$$

устроена как и в предыдущем случае, а группа $\mathrm{Aut}(K,A)=\mathrm{Aut}(\mathbf{H},\mathbf{C})=\mathrm{Aut}(\mathbf{C})\times S^1$ (см. лемму 6) имеет 2 компоненты размерности 1. При этом две компоненты группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{H},\mathbf{C})$ по-разному ведут себя по отношению к ориентации пространства $A=$ [illegible] и, следовательно, попадают в различные компоненты группы

$G(K,A)$, так что при факторизации получаем 4 компоненты. Заметим, что в терминах теоремы 1 работы [2] эти 4 компоненты получаются путем комбинации двух выборов: (1) одного из двух 3-мерных подпространств в 6-мерном пространстве матриц и (2) ориентации репера в выбранном подпространстве.

<u>Случай $(n,p) = (8,1)$</u>. В этом случае $K = A = \mathbf{Ca}$, группа

$$G(K,A) = \mathrm{O}_1 \times \mathrm{O}_7 \times \mathrm{O}_7$$

имеет 8 компонент размерности 42, а группа $\mathrm{Aut}(K,A) = \mathrm{Aut}(\mathbf{Ca})$ связна и имеет размерность 14 (см. лемму 6).

<u>Случай $(n,p) = (8,5)$</u>. В этом случае $K = \mathbf{Ca}$, $A = \mathbf{H}$, группа

$$G(K,A) = \mathrm{O}_5 \times \mathrm{O}_3 \times \mathrm{O}_7$$

имеет 8 компонент размерности 34, а группа $\mathrm{Aut}(K,A) = \mathrm{Aut}(\mathbf{Ca},\mathbf{H})$, гомеоморфная $S^3 \times \mathrm{SO}_3$ (см. опять лемму 6), связна и имеет размерность 6 ∎

Рассмотрим теперь действие группы O_n на множестве $\mathcal{KS}(\sigma)$, заданное формулой (6). В первую очередь нас интересует стационарная подгруппа этого действия (ввиду однородности, она одна и та же для всех точек множества $\mathcal{KS}(\sigma)$). Нам понадобится следующая простая лемма. Пусть, как и выше, K — некоторая нормированная алгебра с единицей, а A — либо максимальная подалгебра в K, либо сама алгебра K.

Лемма 7. *Множество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} x \cdot \bar{x} = 1 \\ x \cdot c_A(x) = 1 \end{cases} \tag{16}$$

совпадает с единичной сферой пространства A.

Доказательство. Случай $K = A$ очевиден, так что пусть A — максимальная подалгебра. В этом случае K является стандартным удвоением алгебры A (см. [5, 4]). Это означает, что всякий вектор $x \in K$ однозначно записывается в виде $x = u + ve$, где $u, v \in A$ и e — некоторый фиксированный вектор из $A^\perp$. При этом, очевидно, $c_A(x) = \bar{u} + ve$. Стандартное вычисление дает (см., например, [4], стр. 103):

$$x \cdot c_A(x) = u\bar{u} - v\bar{v} + 2vue\ .$$

...м образом, система (16) превращается в

$$\begin{cases} |u|^2 + |v|^2 = 1 \\ |u|^2 - |v|^2 = 1 \\ 2vu = 0 \end{cases},$$

...да доказываемое утверждение немедленно и следует ■

Теорема 4. *Стационарная подгруппа действия* (6) *группы* O_n *...* $\mathcal{KS}(n,p)$ *изоморфна группе* S^1 *в случаях* $(n,p) = (2,1)$ *и* $(n,p) =$ *...3) и группе* S^3 *в случае* $(n,p) = (4,1)$, *а во всех остальных слу...* *состоит из двух элементов* $\{\pm E\}$, *где* E — *единичная ма...ца.*

Доказательство. Нам нужно найти все $g \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$ с

$$\lambda\left(g^{-1}(x), g^{-1}(y)\right) = \lambda(x,y)$$

...я какого-либо фиксированного $\lambda \in \mathcal{KS}(n,p)$). Для сокращения ...сей мы просто отождествим пространство $\mathbf{R}^n$ с алгеброй K и ...ьмем $\lambda(x,y) = x \cdot c_A(y)$. Мы будем, кроме того, вместо $c_A(x)$ пи...ть $\tilde{x}$.

Итак, мы ищем все $g \in \mathrm{O}(K)$, удовлетворяющие тождеству

$$g(x) \cdot \widetilde{g(y)} = x \cdot \tilde{y}\ ,\ x,y \in K\ . \tag{17}$$

...означим $\widetilde{g(1)}^{-1}$ через a. Подставив в (17) $y = 1$, получаем $g(x) =$ ...a. Таким образом, (17) можно записать в виде

$$(xa)(\widetilde{ya}) = x\tilde{y}\ ,$$

...и — обозначая $\tilde{y}$ через z и пользуясь тем, что c_A — антиавтомор...зм — в виде

$$(xa)(\tilde{a}z) = xz\ . \tag{18}$$

...дставив в (18) $x = z = 1$, получаем

$$a\tilde{a} = 1\ . \tag{19}$$

...метим, кроме того, что — ввиду ортогональности оператора g — ...ктор a единичный, т.е.

$$a\bar{a} = 1\ . \tag{20}$$

Уравнения (19), (20) определяют, согласно лемме 7, единичную сферу $S(A)$ в пространстве A. Далее мы будем различать случаи $n = 2,4$ и $n = 8$. В первом из них, в силу ассоциативности алгебры $\mathcal{K}$, равенства (18) и (19) равносильны, так что искомая стационарная подгруппа — это и есть сфера $S(A)$, что дает соответствующую часть теоремы 4. Во втором случае (т.е. при $n = 8$) ассоциативности нет, и это меняет дело. Ввиду транзитивности группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}, A)$ на $S(A)$, мы можем считать, что a имеет вид $\cos t + i \sin t$, $t \in \mathbf{R}$. Теперь положим в равенстве (18) $x = j$ и $z = e$ (где i, j, k и e обозначают стандартные мнимые единицы в алгебре октав). Произведя стандартный подсчет (см. [5] или [4]), получим:

$$(xa)(\widetilde{a}z) = je(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2ke \sin t \cos t = je \cos 2t - ke \sin 2t \ .$$

Равенство $je \cos 2t - ke \sin 2t = je$ равносильно $t \in \pi\mathbf{Z}$, что и дает $a = \pm 1$ ∎

Учитывая, что каждая орбита действия (6) диффеоморфна факторпространству группы O_n по соответствующей стационарной подгруппе, и что все стационарные подгруппы лежат в SO_n, мы получаем следствие теоремы 4.

Следствие 1. *Каждая орбита действия* (6) *состоит из двух компонент, размерности которых даются таблицей:*

n	p	*размерность*
2	1	0
2	2	1
4	1	3
4	3	5
8	1	28
8	5	28

Сравнивая приведенные здесь размерности с размерностями пространств $\mathcal{KS}(n,p)$, известными из теоремы 3, мы видим, что все они совпадают, сткуда следует, что орбит конечное число. Это число есть, очевидно, просто отношение числа компонент пространства $\mathcal{KS}(n,p)$ к числу компонент одной орбиты (то есть к двум). Мы имеем, таким образом

Следствие 2. *Число орбит действия* (6) *равно (при $n > 1$) половине числа компонент пространства $\mathcal{KS}(n,p)$.*

Нам осталось определить топологический тип компонент пространств $\mathcal{KS}(n,p)$ при $n > 2$. В принципе, ответ содержится в формуле $\mathcal{KS}(n,p) \approx G(K,A)/\operatorname{Aut}(K,A)$, следующей, как было отмечено выше, из теоремы 2. Мы придадим ему более явный вид, используя в случае $n = 8$ теорему 4.

Теорема 5. *Каждая из компонент пространства* $\mathcal{KS}(n,p)$ *гомеоморфна* SO_3 *при* $(n,p) = (4,1)$, $S^2 \times \mathrm{SO}_3$ *при* $(n,p) = (4,3)$ *и* $\mathrm{SO}_3/\{\pm 1\}$ *при* $n = 8$.

Доказательство.

Случай $(n,p) = (4,1)$. Из доказательства теоремы 3 мы видим, что компонента множества $\mathcal{KS}(4,1)$ гомеоморфна факторпространству группы $\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3$ по "диагональному образу" группы SO_3. Как нетрудно показать, это факторпространство гомеоморфно SO_3 (отображение

$$\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3 \to \mathrm{SO}_3 ,$$

заданное формулой $(a,b) \mapsto ab^{-1}$, факторизуется по диагональной подгруппе и задает требуемый гомеоморфизм).

Случай $(n,p) = (4,3)$. В этом случае компонента множества $\mathcal{KS}(4,3)$ гомеоморфна факторпространству $\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3/\mathrm{SO}_2$, где группа SO_2 вложена в $\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3$ опять диагональным образом. Отображение

$$\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3 \to (\mathrm{SO}_3/\mathrm{SO}_2) \times \mathrm{SO}_3 ,$$

заданное формулой $(a,b) \mapsto \left(a \cdot \mathrm{SO}_2, ab^{-1}\right)$, факторизуется по образу SO_2 и дает опять гомеоморфизм. Остается только заметить, что факторпространство $\mathrm{SO}_3/\mathrm{SO}_2$ есть не что иное как двумерная сфера.

Случай $n = 8$. Здесь утверждение сразу следует из теоремы 4: ввиду конечности числа орбит, компонента орбиты совпадает с одной из компонент множества $\mathcal{KS}(n,p)$ ∎

Литература

1. **Kustaanheimo P., Stiefel E.** Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization// *J. Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P.204–219.

2. **Полещиков С. М., Холопов А. А.** Обобщенные KS-преобразования 4-го порядка// *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.*Вып.2.1996.С.201–212.

3. **Полещиков С. М.** О применении непрерывного векторного поля на 7-мерной сфере.Ч. I. Деп. ВИНИТИ 18.05.94, №1249-В94.

4. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144с.

5. **Постников М.М.** Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии, семестр V. М.: Наука, 1982. 448с.

Summary

Zhubr A. V. KS-transformations and involutions of normed algebras

KS-transformation is some bilinear map $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ which has been used by P. Kustaanheimo and E. Stiefel for the regularization of the two-body problem (with the aim of applying this regularization for the "perturbed" problem). There exist other maps $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ having the same formal properties as the Kustaanheimo-Stiefel transformation, which can also be applied to the perturbed two-body problem. The idea of finding and applying such "generalized" KS-transformations belongs to S. M. Poleschikov. The classification of KS-transformations for the case $n = 4$ is given in [2], and some partial results for the case $n = 8$ have been obtained in [3]. This paper gives a simple solution of the general classification problen for KS-transformations which is based on the well-known theory of (finite-dimensional) normed algebras.

Сыктывкарский университет *Поступила 29.03.96*