Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 517.51

Периодичность суммы непрерывных периодических функций

И. Л. Зинченко, С. Т. Сангаджиева

В работе полностью решен вопрос о том, когда сумма непрерывных периодических функций является периодической функцией.

Пусть $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ — непрерывные периодические функции с наименьшими положительными периодами $\omega_1,\ldots,\omega_n$ соответственно и $S(t)=x_1(t)+\ldots+x_n(t)$. Изменив, в случае необходимости, порядок функций, можно считать, что функции $x_1(t),\ldots,x_{r_1}(t)$ имеют попарно соизмеримые периоды, функции $x_{r_1+1}(t),\ldots,x_{r_1+r_2}(t)$ имеют попарно соизмеримые периоды, ..., функции $x_{r_1+\ldots+r_{k-1}+1}(t)$, $\ldots,x_{r_1+\ldots+r_k}(t)$ имеют попарно соизмеримые периоды, а периоды функций, входящих в разные группы, несоизмеримы. Положим

$$y_1(t)=x_1(t)+\ldots+x_{r_1}(t),$$

$$y_2(t)=x_{r_1+1}(t)+\ldots+x_{r_1+r_2}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k(t)=x_{r_1+\ldots+r_{k-1}+1}(t)+\ldots+x_{r_1+\ldots+r_k}(t)\,.$$

Функции $y_1(t),\ldots,y_k(t)$ являются периодическими. Кроме того, $S(t)=x_1(t)+\ldots+x_n(t)=y_1(t)+\ldots+y_k(t)$.

Теорема. *Если все функции $y_i(t)\equiv const$ или только одна из этих функций отлична от константы, то $S(t)$ является периодической функцией. Если по крайней мере две функции $y_i(t),y_j(t)$ $(i\neq j)$ отличны от константы, то $S(t)$ не является периодической функцией.*

Первая часть теоремы очевидна. Доказательство второй части вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть* $x_1(t), \dots, x_n(t)$ *— непрерывные периодические функции с наименьшими положительными периодами* $\omega_1, \dots, \omega_n$. *Если эти периоды попарно несоизмеримы, то функция* $S(t) = x_1(t) + \dots + x_n(t)$ *не является периодической.*

Доказательство. Запишем ряды Фурье для функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$

$$x_1(t) \sim \sum_m a_m^1 \exp(i \frac{2\pi}{\omega_1} mt),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n(t) \sim \sum_m a_m^n \exp(i \frac{2\pi}{\omega_n} mt).$$

Тогда почти периодической функции $S(t)$ соответствует ряд Фурье (см.[1]):

$$S(t) \sim \sum_m a_m^1 \exp(i \frac{2\pi}{\omega_1} mt) + \dots + \sum_m a_m^n \exp(i \frac{2\pi}{\omega_n} mt),$$

причем в силу несоизмеримости периодов в выражении справа нет подобных членов (за исключением констант). Значит, $S(t)$ имеет показатели Фурье $\frac{2\pi}{\omega_1} m_1, \dots, \frac{2\pi}{\omega_n} m_n$, где $m_1 \neq 0, \dots, m_n \neq 0$. Отношение любых двух из них не является рациональным числом. Значит, $S(t)$ не является периодической функцией. Лемма доказана.

Литература

1. **Левитан Б.М.** Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.

Summary

Zinchenko I. L., Sangadjieva S. T. Periodicity of a sum of continuous periodic functions

In this work the necessary and sufficient condition for periodicity of a sum of continuous periodic functions is obtained.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.12.95*