Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 517.97

Об одной классической задаче вариационного исчисления

И. Л. Зинченко

В работе доказана аналитическая зависимость от координат точек времени наискорейшего скатывания в задаче о брахистохроне.

Напомним задачу о брахистохроне. В вертикальной плоскости даны две точки A и B (B находится ниже A). Требуется определить кривую, соединяющие эти точки, при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

В данной вертикальной плоскости поместим начало координат в точку A, ось x направим горизонтально, а ось y направим вертикально вниз. Пусть точка B имеет координаты $(a\ ,\ b)$, $a, b > 0$. Известно, что если точка скатывается по гладкой кривой $y(x)$, соединяющей A и B, то время скатывания задается формулой

$$L(y(x)) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx\,. \tag{1}$$

Экстремалями функционала L, выходящими из начала координат, являются циклоиды, которые параметрически задаются формулами:

$$\begin{cases} x = c(t-\sin t) & c>0 \\ y = c(1-\cos t) & 0 \le t \le 2\pi. \end{cases} \tag{2}$$

Если выбрать c из условия прохождения циклоиды через точку B, то полученная кривая и есть брахистохрона. Она доставляет сильный минимум функционалу (1), т.е. является кривой наискорейшего спуска. Обозначим через $T(a, b)$ время наискорейшего спуска из A в B.

Теорема. *Функция* $T(a,b)$ *аналитична в первом координатном угле* $\Delta = \{(a,b) \mid a,b > 0\}$.

Доказательство. Заметим, что циклоиды семейства (2) попарно не пересекаются (за исключением общей начальной точки) и заполняют первый координатный угол Δ. Отсюда следует, что отображение $\mathcal{F} : D \to \Delta$, где $D = \{(c,t) \mid c > 0, 0 < t < 2\pi\}$, а $\mathcal{F}$ определяется формулами (2), взаимно - однозначно и $\mathcal{F}(D) = \Delta$. Докажем, что якобиан J отображения $\mathcal{F}$ отличен от нуля в каждой точке D. Действительно, $J = cf(t)$, где $f(t) = t\sin t + 2\cos t - 2$, $f'(t) = t\cos t - \sin t$. Пусть t^* - корень уравнения $\mathrm{tg} t - t = 0$ при $0 < t < 2\pi$ (t^* определено однозначно). Так как $f'(t) < 0$ при $0 < t < t^*$, и $f'(t) > 0$ при $t^* < t \leq 2\pi$, и так как $f(0) = f(2\pi) = 0$, то $f(t) < 0$ при $0 < t < 2\pi$. Следовательно, $J \neq 0$ в D. Так как отображение $\mathcal{F}$ аналитично, то отсюда следует, что обратное отображение $\mathcal{F}^{-1} : \Delta \to D$ является аналитическим. Значит, система уравнений:

$$\begin{cases} c(t - \sin t) = a \\ c(1 - \cos t) = b \end{cases}$$

при $(a,b) \in \Delta$ однозначно разрешима относительно $(c,t) \in D$, при этом функции $c(a,b)$, $t(a,b)$, определяемые из этой системы, аналитичны в Δ. Найдем теперь время наискорейшего скатывания из A в B

$$T(a,b) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{c(a,b)} \cdot t(a,b) \, .$$

Эта функция аналитична в Δ. Теорема доказана.

Summary

Zinchenko I. L. About one classical problem of variational calculus

In this work the remark to one classical problem of variational calculus is proved.

Сыктывкарский университет *Поступила 30.01.96*