*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.2.1996*

**УДК 539.3**

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ПОДКРЕПЛЕНИИ [1]

*Д. Е. Терехин*

Рассматривается задача об устойчивости цилиндрической панели, подкрепленной внутренними абсолютно жесткими кольцами. Решается задача со свободной границей (с неизвестной областью контакта). Используется энергетический критерий устойчивости, заключающийся в минимизации найденной функции полной энергии системы. Решение находится сочетанием метода дихотомии и метода ветвей и границ. Результаты численных экспериментов приведены в виде таблиц.

Задачи на устойчивость упругих систем с ограничениями на деформацию являются мало изученными. Общие подходы к исследованию таких задач предложены в работе [1]. Конкретные задачи решены например в работе [2].

Рассмотрим задачу об устойчивости цилиндрической панели, подвергающейся действию нормальной нагрузки $q$, равномерно распределенной по панели. Будем считать, что панель шарнирно оперта по краям, толщина панели - h, длина - L, максимальный центральный угол - $\varphi_0$, радиус - R. Координата срединной поверхности $x$ изменяется вдоль образующей от 0 до L, центральный угол $\varphi$ - от 0 до $\varphi_0$. В качестве подкрепления используются N внутренних абсолютно жестких ребер. Требуется найти минимальное значение $q$, при котором панель теряет устойчивость. Для нахождения критического значения $q$ воспользуемся энергетическим критерием устойчивости. Вычислим полную энергию системы

$$Э = \mathbf{U}_{\text{р}} + \mathbf{U}_{\text{и}} - \mathbf{A}, \tag{1}$$

[1]Студенческая работа. Представлена доц. В.Н.Тарасовым.

где $\mathbf{U}_p$ - потенциальная энергия тангенциальной деформации, $\mathbf{U}_и$ - потенциальная энергия изгиба, $\mathbf{A}$ - работа внешних сил.

Эти величины определяются следующими формулами (см., например, [3], с. 497, с. 527):

$$\mathbf{U}_p = \frac{hR}{2E} \int\limits_0^L \int\limits_0^{\varphi_0} \Big[(\Delta\Phi)^2 - (1+\nu)\ L(\Phi,\Phi)\Big]\, dx d\varphi, \tag{2}$$

$$\mathbf{U}_и = \frac{DR}{2} \int\limits_0^L \int\limits_0^{\varphi_0} \Big[(\Delta w)^2 - (1-\nu)\ L(w,w)\Big]\, dx d\varphi, \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = qR \int\limits_0^L \int\limits_0^{\varphi_0} w dx d\varphi. \tag{4}$$

Здесь $w$ - прогиб, считающийся положительным, если он отсчитывается к центру кривизны, $\Phi$ - функция напряжений, $\nu$ - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость, $\Delta$ - оператор Лапласа, $L = \frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{d^2}{dxdy}\right)^2$.

Известно (см. [1], с.509), что функция напряжений $\Phi$ и прогиб $w$ связаны дифференциальным соотношенением

$$\frac{1}{E}\Delta^2\Phi = \frac{1}{R}\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{5}$$

Граничные условия шарнирного опирания будут выполнены, если прогиб $w$ искать в виде

$$w = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\ sin\xi_i x\ sin\psi_j\varphi, \tag{6}$$

где $\xi_i = \frac{\pi i}{L}$, $\psi_j = \frac{\pi j}{\varphi_0}$, $x \in [0, L]$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$.
Используя (6), находим

$$\Phi = \frac{E}{R}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\ \frac{\xi_i^2}{\alpha_{ij}}\ sin\xi_i x\ sin\psi_j\varphi\ -\ \frac{qRx^2}{2h},$$

$$\alpha_{ij} = (\xi_i^2 + \psi_j^2)^2.$$

Зная $w$ и $\Phi$, нетрудно получить следующие формулы:

$$\mathbf{U}_{\text{р}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \; \frac{hEL\xi_i^4 \varphi_0}{8R\alpha_{ij}},$$

$$\mathbf{U}_{\text{и}} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \; DRL\varphi_0 \alpha_{ij}.$$

При подстановке прогиба $w$ в виде (6) в формулу (4), убеждаемся, что $\mathbf{A} = 0$. В силу того, что работа внешних сил не должна быть равной нулю, следует учитывать нелинейное слагаемое в компоненте деформации $\epsilon_\varphi$, т.е. вычислять ее по формуле (см.[3], с.527)

$$\epsilon_\varphi = \frac{dv}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 - \frac{w}{R}. \tag{7}$$

Принимая для гибкой пластины $\epsilon_\varphi = 0$, получим

$$w = R\left[\frac{dv}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Условие периодичности можно записать в виде

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{dv}{d\varphi} d\varphi = 0. \tag{9}$$

Подставляя $w$ из (8) в (4) и учитывая (9), находим

$$\mathbf{A} = \frac{qR^2}{2} \int_0^L \int_0^{\varphi_0} \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 dx \; d\varphi$$

или (с учетом (6))

$$\mathbf{A} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \; qR^2 L\varphi_0 \psi_j^2.$$

Складывая энергетические слагаемые $\mathbf{U}_{\text{р}}$, $\mathbf{U}_{\text{и}}$, $\mathbf{A}$, получим следующее выражение для полной энергии системы:

$$Э = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \left[\frac{hEL\varphi_0 \xi_i^4}{8R\alpha_{ij}} + \frac{DRL\varphi_0 \alpha_{ij}}{8} - \frac{qR^2 L\varphi_0 \psi_j^2}{8}\right]. \tag{10}$$

Согласно энергетическому критерию, проблема устойчивости сводится к вычислению минимального значения $q$, при котором экстремальная задача

$$\left.\begin{aligned} Э &\longrightarrow \min_{w_{ij}} \\ w(x_k, \varphi) &\le 0, \;\; k{\in}1:N \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

имеет нетривиальное решение ($x_k$ - координаты ребер подкрепления).

Ограничения в задаче (11) вытекают из того факта, что ввиду абсолютной жесткости ребер, панель не может прогнуться, то есть $w(x_k, \varphi)$ не может быть больше 0. Возможны случаи $w(x_k, \varphi) < 0$ (выпучивание) и $w(x, \varphi) = 0$ (прижимание).

При численном решении задачи (11) непрерывные ограничения для прогиба $w$ заменяются на дискретные на сетке из M точек по координате $\varphi$. Тогда задачу (11) можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{hEL\varphi_0\xi_i^4}{8R\alpha_{ij}} + \frac{DRL\varphi_0\alpha_{ij}}{8}\right] w_{ij}^2 - q\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{R^2L\varphi_0\psi_j^2}{8}\, w_{ij}^2 \longrightarrow \min_{w_{ij}} \\ &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\; sin\xi_i x_k\; sin\psi_j\varphi_l \le 0, \quad k{\in}1:N,\; l{\in}1:M. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

С использованием обозначений

$$c_{ij} = \frac{hEL\varphi_0\xi_i^4}{8R\alpha_{ij}} + \frac{DRL\varphi_0\alpha_{ij}}{8},\; d_i = \frac{R^2L\varphi_0\psi_j^2}{8},\; a_{ijkl} = sin\xi_i x_k\; sin\psi_j\varphi_l,$$

задача (12) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}w_{ij}^2 - q\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_i w_{ij}^2 \longrightarrow \min_{w_{ij}} \\ &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijkl}w_{ij}{\le}0, \quad k{\in}1:N, \quad l{\in}1:M \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

т.е. является задачей квадратичного программирования. Ее можно записать в следующей матричной постановке:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(Cx, x) - \tfrac{1}{2}q(Dx, x) &\longrightarrow \min_{x} \\ Ax &\le 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $C$ и $D$ - это диагональные матрицы.

Число переменных в задаче (14) равно $mn$. Каждая строка матрицы $A$ соответствует одному из ребер и выбранной точке сетки по ребру. Число строк ограничений равно $MN$.

Задача (14) представляет собой задачу квадратичного программирования относительно неизвестных $w_{ij}$. Изменим систему обозначений, перейдя к привычной для подобных задач символике. Двумерные переменные $w_{ij}$ заменим на ординарные $x_j$, где $j \in 1 : k$, $k = mn$, коэффициенты сумм целевой функции обозначим $b_j$ и $d_j$, параметр $q$ заменим на $\lambda$.

В новых обозначениях задача примет вид

$$\left.\begin{array}{c} F(x,\lambda) = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k} (b_j - \lambda d_j)x^2 \longrightarrow \min\limits_{x} \\ Ax \leq 0, \end{array}\right\} \qquad (15)$$

т.е. является задачей невыпуклого квадратичного программирования. Решение таких задач довольно проблематично, в отличие от задач выпуклого квадратичного программиривания, имеющих единственную точку минимума.

Отметим, что $F(kx,\lambda) = k^2 \cdot F(x,\lambda)$, $b_j > 0$, $d_j > 0$, $j \in 1 : N$, а векторы $x$, удовлетворяющие ограничениям, образуют конус

$$C = \left\{x \in \mathrm{R}^N : Ax \leq 0\right\}.$$

Если $x_0 \neq 0$, $x_0 \in C$ и $F(x_0,\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda > 0$, то $F(kx_0,\lambda) = 0$ для любого $k > 0$.

Если же $x_0 \neq 0$, $x_0 \in C$ и $F(x_0,\lambda) < 0$ для некоторого $\lambda > 0$, то $F(kx_0,\lambda) < 0$ для любого $k > 0$ и $F(kx_0,\lambda) \to -\infty$ при $k \to -\infty$. При достаточно больших $\lambda$ все $c_j < 0$. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае $F(x,\lambda) = -\infty$ при $x \in C$. При $\lambda = 0$ все $c_j > 0$. В этом случае задача (15) имеет единственное тривиальное решение.

При отсутствии ограничений, задача (15) решается просто. Параметр $\lambda$ является искомым, если при нем какой-либо коэффициент $c_j = 0$. Тогда соответствующая переменная $x_j$ может принимать любые значения, остальные переменные равны нулю и $F(x,\lambda) = 0$. Критическое значение $\lambda^*$ определяется по формуле $\lambda_* = \min(\frac{b_j}{d_j})$, $j \in 1 : N$. При наличии же ограничений в (15) $x^*$ может не принадлежать конусу.

Разобьем множество индексов $\mathrm{N} = \{1, \ldots, N\}$ на два подмножества (при некотором значении $\lambda$)

$$N_- = \{j \in N : c_j > 0\},$$
$$N_+ = \{j \in N : c_j \leq 0\}$$

и рассмотрим задачу

$$\left.\begin{array}{c} F(x,\lambda) = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{N} c_j x_j^2 \longrightarrow \min\limits_x \\ Ax \leq 0 \\ p \leq x_i \leq q, \ i \in N_- \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Задача (16) в отличие от (15) всегда имеет конечное решение. Пусть $\Upsilon(\lambda) = F(x^*, \lambda)$, где $x^*$-точка глобального минимума. Можно доказать, что существует единственное значение $\lambda^*$, обладающее следующими свойствами:

a) если $\lambda < \lambda^*$, то $x^* = 0$ - единственное решение и $\Upsilon(\lambda) = 0$;

b) если $\lambda = \lambda^*$, то существует $x^* \neq 0$ и $\Upsilon(\lambda^*) = 0$;

c) если $\lambda > \lambda^*$, то существует $x^* \neq 0$ и $\Upsilon(\lambda) < 0$.

Глобальный минимум в задаче (16) ищется методом "ветвей и границ". (см. ,например, [4]). Зная глобальный минимум задачи (16), параметр $\lambda^*$ можно найти методом дихотомии.

В качестве примера применения кратко изложенного выше метода, приведем результаты расчетов устойчивости панели с различным количеством и расположением ребер подкрепления. Расчеты проводились для панели из стали со следующими параметрами: $L = 4$ м, $R = 0,5$ м, $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м$^2$, $\nu = 0,3$, $h$ и $\varphi_0$ менялись. Число гармоник $m$ и $n$ в (6) принималось равным 6. Количество точек сетки на ребре бралось равным 10. Числа $p$ и $q$ в (16) взяты соответственно -1 и 2. В табл. 1 приведены результаты расчетов критической нагрузки $q$ для панелей с различным расположением одного ребра при $\varphi_0 = 90^0$, $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м. В табл. 2 даны результаты расчетов для панелей с одним ребром, поставленным посередине, но различными центральными углами $\varphi_0$, при $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м. В табл. 3 показаны результаты расчетов для панелей различной толщины. В табл. 4 приведены результаты расчетов для панелей, подкрепленных двумя ребрами. Расчеты показывают, что критическая нагрузка увеличивается при увеличении центрального угла, толщины и длины участка панели, свободного от ребер.

Таблица 1

| Координаты ребра (м) | 0 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Нагрузка ($10^5$ Н/м$^2$) | 3,08 | 3,25 | 3,67 | 4,27 |

Таблица 2

| $\varphi_0$, град. | 60 | 75 | 90 | 120 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|
| Нагрузка ($10^5$ Н/м$^2$) | 2,48 | 3,44 | 4,26 | 4,75 | 4,80 |

Таблица 3

| Толщина h ($10^{-2}$ м) | 0,10 | 0,25 | 0,50 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|
| Нагрузка ($10^5$ Н/м$^2$) | 0,31 | 0,94 | 4,06 | 19,92 |

Таблица 4

| Координаты ребер (м) | 1,33 2,66 | 2,00 3,00 | 1,95 2,05 |
|---|---|---|---|
| Нагрузка ($10^5$ Н/м$^2$) | 4,75 | 4,25 | 4,27 |

## Литература


1. **Тарасов В.Н.** Задачи на собственные значения для положительно-однородных операторов//*Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер. 1.* Вып.1. 1995. С. 192–204.

2. **Герасин М.Л.** Устойчивость цилиндрической оболочки с односторонним подкреплением//*Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер. 1.* Вып.1. 1995. С.128–140

3. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984с.

4. **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания. Математические методы в исследовании операций. М.: Изд-во МГУ, 1983. 193с.

**Summary**

**Teryohin D. E.** The stability of cylindrical panel with the inside strengthenings

This work devotes to the research of the stability of cylindrical panel with the inside strengthenings. For finding critical value of loading the energetic criterion of stability was used. Half division method and branch and borders method were applied for the solution of the optimisation problem. The gradient projection method was used for solution of the problem of quadratical programming. Program results are shown in the tables.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 18.04.96*