Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 513.8

Вычисление групп спинорных бордизмов некоторых пространств Эйленберга-Маклейна, II [1]

А. В. Жубр

Продолжено вычисление некоторых групп бордизмов, связанных с задачей классификации замкнутых односвязных 6-мерных многообразий: доказаны результаты, анонсированные в первой части работы.

Эта статья является продолжением работы [1], в которой вычислены группы $A_i^m = \Omega_i^{\text{spin}}(\mathbf{Z}_{2^m}, 2; \varkappa_m)$, $i \leq 6$, где $\varkappa_m$ обозначает проекцию $\mathbf{Z}_{2^m} \to \mathbf{Z}_2$, и сформулированы результаты вычисления групп

$$A_i^{m,n} = \Omega_i^{\text{spin}}(\mathbf{Z}_{2^m} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}, 2; \varkappa_m \oplus 0).$$

Напомним, что через $\Omega_i^{\text{spin}}(G, 2; w)$, где G — конечно-порожденная абелева группа и w — элемент группы $H^2(G, 2; \mathbf{Z}_2)$, в работе [1] обозначается группа классов бордизмов отображений вида

$$f : M^i \to K(G, 2) \quad ,$$

где M^i — замкнутое ориентированное i-мерное гладкое многообразие с $w_2(M^i) = f^*(w)$; или, если угодно, $\Omega_i^{\text{spin}}(G, 2; w)$ — это группа бордизмов пар (M^i, ω) с $\omega \in H^2(M^i; G)$, удовлетворяющих условию $w_2(M^i) = w_*(\omega)$, где через w_* обозначается гомоморфизм

$$H^2(\,\cdot\,; G) \to H^2(\,\cdot\,; \mathbf{Z}_2) \quad ,$$

индуцированный классом w, понимаемым теперь как элемент группы $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Z}_2)$. Группы $\Omega_i^{\text{spin}}(G, 2; w)$ (т.е., собственно говоря, группа $\Omega_6^{\text{spin}}(G, 2; w)$) представляют интерес в связи с задачей классификации 6-мерных многообразий (см. [2]–[4]), и рассматриваемые

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №95-01-00235

в [1] и в настоящей работе случаи $G = \mathbf{Z}_{2^m}$, $w = \varkappa_m$ и $G = \mathbf{Z}_{2^m} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}$, $w = \varkappa_m \oplus 0$ представляют собой первый этап вычисления групп $\Omega_6^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$ для произвольных G и $w \neq 0$ (случай $w = 0$ рассмотрен в работе [2]).

Мы воспроизведем здесь формулировку анонсированного в [1] результата о группах $A_i^{m,n}$ в слегка модифицированном виде. Заметим сначала, что (как и отмечено в [1]) достаточно вычислить прямое слагаемое $\widetilde{A}_i^{m,n}$ — ядро естественной проекции $A_i^{m,n} \to A_i^m$. Далее, мы можем считать, что $m \geq 2$ (поскольку $\widetilde{A}_i^{1,n}$ — не что иное как $\widetilde{\Omega}_i^{\mathrm{SO}}(\mathbf{Z}_{2^n}, 2)$, что сразу дает ответ; в частности, $\widetilde{A}_6^{1,n} \approx \mathbf{Z}_{2^n} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}$). Мы предполагаем, кроме того, что числа m и n конечны.

Теорема 1. *Группы $\widetilde{A}_i^{m,n}$ с $i \leq 6$ даются таблицей*

i	0	1	2	3	4	5	6
$\widetilde{A}_i^{m,n}$	0	0	$\mathbf{Z}_{2^n}$	0	$\mathbf{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{a-1}}$	$\mathbf{Z}_{2^a}$	$\mathbf{Z}_{2^n}^2 \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-2}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}}$

где $a = \min\{m, n\}$ *и* $b = \min\{m, n+1\}$.

Мы будем придерживаться обозначений и методов работы [1]. В частности, мы сокращаем $K(\mathbf{Z}_{2^n}, 2)$ до K_n. Можно очевидным образом построить гомологический функтор $\mathcal{A}_*^m(\,\cdot\,)$ на категории топологических пространств, для которого группы A_*^m будут группами коэффициентов (гомологий точки). Мы обозначаем спектр, отвечающий функтору $\mathcal{A}_*^m$, через $\mathbb{T}_m$ (в [1] он обозначался $\mathbf{T}_m$). Согласно стандартной формуле теории гомологий,

$$\widetilde{A}_i^{m,n} = \widetilde{\mathcal{A}}_*^m(K_n) \approx \pi_i(\mathbb{T}_m \wedge K_n) ,$$

что позволит нам вычислить группы $\widetilde{A}_i^{m,n}$, строя разложение Постникова спектра $\mathbb{T}_m \wedge K_n$, аналогично тому, как в [1] вычисляются группы A_i^m (и в [2] — группы $A_i^{0,n}$).

Статья состоит из 2 параграфов. В §1 мы приводим, в удобной для нас форме, несколько более или менее стандартных утверждений о когомологиях главных расслоений пространств и спектров. В §2 строится разложение Постникова спектра $\mathbb{T}_m \wedge K_n$ до размерности 6 и, тем самым, доказывается теорема 1.

§ 1. Несколько технических утверждений о когомологиях главных расслоений

1.1. Главные расслоения. Как и в [1], мы рассматриваем Ω-спектры $\mathbb{X} = \{X_0, X_1, \ldots\}$, в которых каждое пространство X_i является $(i-1)$-связным (в [5] такие спектры называются — не особенно удачно — *связными*). Отображение Ω-спектров $q : \mathbb{E} \to \mathbb{X}$ называется расслоением, если каждое $q_i : E_i \to X_i$ — расслоение в смысле Серра. В этом случае последовательность слоев (над подходящим образом выбранными точками) также образует некоторый Ω-спектр — слой расслоения q. *Главное расслоение* Ω-спектров — это просто расслоение, имеющее своим слоем некоторый спектр Эйленберга-Маклейна $\mathbb{K}(\pi, n) = \{K(\pi, n), K(\pi, n+1), \ldots\}$. Главное расслоение

$$\mathbb{K}(\pi, n) \xrightarrow{j} \mathbb{E} \xrightarrow{q} \mathbb{X} \tag{1}$$

однозначно (с точностью до естественной гомотопической эквивалентности) определяется своим "характеристическим классом"

$$c(q) = \tau_q^{n,\pi}(1_\pi) \in H^{n+1}(\mathbb{X}; \pi)\ ,$$

где $\tau_q^{i,A}$ обозначает трансгрессию

$$H^i(\mathbb{K}(\pi, n); A) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\mathbb{E}, \mathbb{K}(\pi, n); A) \xrightarrow{(q^*)^{-1}} H^{i+1}(\mathbb{X}; A)$$

∂ — связывающий гомоморфизм пары) и

$$1_\pi \in H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$$

— универсальный класс. Таким образом, группы $H^i(\mathbb{E}; \mathbf{Z})$ в принципе могут быть вычислены по $H^i(\mathbb{X}; \mathbf{Z})$ и $c(q)$. Действительно, те и другие группы связаны длинной точной последовательностью

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathbb{K}(\pi, n)) \xrightarrow{\tau_q} H^i(\mathbb{X}) \xrightarrow{q^*} H^i(\mathbb{E}) \xrightarrow{j^*} H^i(\mathbb{K}(\pi, n)) \to \ldots \tag{2}$$

подразумеваются целые коэффициенты), к которой сводится в нашем стабильном случае спектральная последовательность расслоения q, и, следовательно, определяются "с точностью до присоединенности" ядрами и коядрами трансгрессий $\tau_q^{i,\mathbf{Z}}$, которые, в свою очередь, вычисляются по $c(q)$ и по действию когомологических операций в $H^*(\mathbb{X}; \mathbf{Z})$. Сказанное, впрочем, не означает, что можно легко дать для $H^i(\mathbb{E};\, \mathbf{Z})$ "явную формулу". Основная цель этого параграфа — привести такую явную формулу (теорема 2 ниже) для того случая, когда $i = n + 1$ и группа π конечна. Как нетрудно видеть, в случае конечной π первая нетривиальная размерность — это как раз $n + 1$: все предыдущие группы $H^i(\mathbb{E};\, \mathbf{Z})$ совпадают с $H^i(\mathbb{X};\, \mathbf{Z})$. Для $i = n + 1$ мы получаем из (2) короткую точную последовательность

$$0 \to H^{n+1}(\mathbb{X};\, \mathbf{Z}) \to H^{n+1}(\mathbb{E};\, \mathbf{Z}) \to \operatorname{Ker} \tau_q^{n+1,\mathbf{Z}} \to 0\ , \tag{3}$$

определяющую элемент группы классов расширений

$$\operatorname{Ext}\left(\operatorname{Ker} \tau_q^{n+1,\mathbf{Z}}, H^{n+1}(\mathbb{X};\, \mathbf{Z})\right)\ .$$

Мы вычислим этот элемент (следовательно, и группу $H^{n+1}(\mathbb{E};\, \mathbf{Z})$), обобщив тем самым рассмотренный в [2, лемма 2.4] случай $\pi = \mathbf{Z}_m$.

Следующие утверждения являются следствиями стандартных фактов о главных расслоениях (топологических пространств) — см. [6] и т. д.

Лемма 1. *Пусть имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(\pi_1, n) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{E}_1 \arrow[r, "q_1"] & \mathbb{X}_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{K}(\pi_2, n) \arrow[r, "j_2"] & \mathbb{E}_2 \arrow[r, "q_2"] & \mathbb{X}_2 \end{tikzcd} \tag{4}$$

строки которой — главные расслоения. Эта диаграмма может быть дополнена (с сохранением коммутативности) отображением $\mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ в том и только том случае, если выполнено соотношение $f^*c(q_2) = \varphi_* c(q_1)$.

Следствие: лемма 2. *Пусть*

$$\mathbb{K}(\pi, n) \xrightarrow{j} \mathbb{E} \xrightarrow{q} \mathbb{X}$$

— главное расслоение.

(а) *Отображение $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ тогда и только тогда накрывается отображением $F : \mathbb{Y} \to \mathbb{E}$, когда $f^*c(q) = 0$.*

(б) *Любой паре отображений $F_1, F_2 : \mathbb{Y} \to \mathbb{E}$, накрывающих отображение f, можно поставить в соответствие "различающий класс"*

$$\delta(F_1, F_2) \in H^n(\mathbb{Y};\, \pi)$$

таким образом, что для любого $x \in H^{n+i}(\mathbb{E};\, \pi_1)$ *будет выполнено соотношение*

$$F_1^*(x) - F_2^*(x) = \mathcal{P}\delta(F_1, F_2)\ , \tag{5}$$

где $\mathcal{P} : H^n(\,\cdot\,;\, \pi) \to H^{n+i}(\,\cdot\,;\, \pi_1)$ *— стабильная когомологическая операция, однозначно определенная соотношением* $j^*(x) = \mathcal{P}(1_\pi)$.

(в) *Для любого отображения* $F_1 : \mathbb{Y} \to \mathbb{E}$, *накрывающего* f, *и для любого класса* $y \in H^n(\mathbb{Y};\, \pi)$ *найдется (единственное с точностью до послойной гомотопии) отображение* $F_2 : \mathbb{Y} \to \mathbb{E}$ *с* $\delta(F_1, F_2) = y$.

В дальнейшем мы будем опускать группу коэффициентов $\mathbf{Z}$ как в обозначении групп когомологий, так и в обозначении трансгрессий — т. е. вместо $H^i(X;\, \mathbf{Z})$ и $\tau_q^{i,\mathbf{Z}}$ писать, соответственно, $H^i(X)$ и τ_q^i.

1.2. Вычисление τ_q^n в свободном случае. Пусть $q : \mathbb{E} \to \mathbb{X}$ — $\mathbb{K}(F, n)$-расслоение, где группа F конечно порождена и свободна. Трансгрессию

$$\tau_q^n : H^n(F, n) = \mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z}) \to H^{n+1}(\mathbb{X})$$

можно рассматривать как элемент группы

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z}), H^{n+1}(X))\ ,$$

а ввиду канонического изоморфизма (для любой абелевой группы A)

$$A \otimes F \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z}), A) \tag{6}$$

— и как элемент группы $H^{n+1}(\mathbb{X}) \otimes F = H^{n+1}(\mathbb{X};\, F)$.

Лемма 3. $\tau_q^n = c(q)$.

Доказательство. Изоморфизм (6) задается формулой

$$a \otimes f \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(f) \cdot a)$$

(где $a \in A$, $f \in F$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z})$). Для $A = H^{n+1}(\mathbb{X})$ и $a \otimes f = x \in H^{n+1}(\mathbb{X};\, F)$ эту формулу можно записать в виде

$$x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi_*(x))\ .$$

В частности, классу $c(q)$ соответствует гомоморфизм $\varphi \mapsto \varphi_* c(q)$, так что утверждение леммы можно переписать в виде тождества

$$\tau_q^n(\varphi) = \varphi_* c(q) = \varphi_* \circ \tau_q^{n,F}(1_F)\ . \tag{7}$$

С другой стороны, индуцированный гомоморфизм

$$\varphi_* : H^n(\mathbb{K}(F,n);\, F) \to H^n(\mathbb{K}(F,n))$$

переводит универсальный класс 1_F как раз в φ (понимаемый теперь как элемент группы $H^n(\mathbb{K}(F,n))$). Таким образом, тождество (7) может быть окончательно записано как

$$\tau_q^n \circ \varphi_*(1_F) = \varphi_* \circ \tau_q^{n,F}(1_F),$$

и в таком виде это, очевидно, просто следствие естественности трансгрессии.

1.3. Двойственность Понтрягина — несколько канонических изоморфизмов. Всюду ниже π будет обозначать конечную абелеву группу, а $\hat{\pi}$ — группу $\mathrm{Hom}(\pi, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ясно, что группы π и $\hat{\pi}$ всегда изоморфны, однако соответствие $\pi \mapsto \hat{\pi}$ контравариантно, так что, например, вложению $\pi_1 \subset \pi_2$ отвечает проекция $\hat{\pi}_2 \longrightarrow \hat{\pi}_1$ и т. д. Заметим, что $\mathrm{Hom}(\pi, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ можно отождествить с $\mathrm{Hom}(\pi, \mathbf{C}^*)$; таким образом $\hat{\pi}$ — это группа характеров группы π, а соответствие $\pi \mapsto \hat{\pi}$ — не что иное как специальный случай двойственности Понтрягина.

Мы будем использовать следующие (очевидно, хорошо известные) канонические изоморфизмы, никак их не обозначая (т. е. считая их просто отождествлениями):

$$\mathrm{Ext}(\pi, \mathbf{Z}) \approx \hat{\pi} \tag{8}$$

$$\mathrm{Ext}(\hat{\pi}, A) \approx A \otimes \pi \tag{9}$$

$$\mathrm{Hom}(\hat{\pi}, A) \approx A * \pi \tag{10}$$

(A — произвольная конечно-порожденная абелева группа). Мы рассмотрим здесь детали построения этих изоморфизмов, имея в виду потребности последующего изложения.

Чтобы получить (8), применим функтор $\mathrm{Hom}(\pi, \cdot\,)$ к инъективной резольвенте

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \tag{11}$$

группы $\mathbf{Z}$. Согласно определению $\mathrm{Ext}(\pi, \cdot\,)$ как производного функтора для $\mathrm{Hom}(\pi, \cdot\,)$, и учитывая, что $\mathrm{Hom}(\pi, \mathbf{Q}) = 0$, мы и получаем требуемый изоморфизм. Нам будет полезно также иметь более прямое описание этого изоморфизма, при котором элементы группы

$\mathrm{Ext}(\pi, \mathbf{Z})$ интерпретируются как классы расширений (группы π посредством группы $\mathbf{Z}$). Пусть точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \to G \to \pi \to 0 \tag{12}$$

представляет такой элемент. Вследствие конечности группы π мы имеем $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Q} = G \otimes \mathbf{Q}$, что дает канонический гомоморфизм $G \to \mathbf{Q}$, продолжающий тождественное отображение $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Мы получаем, таким образом, канонический гомоморфизм (12) в (11) и, в частности, группы π в группу $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Это и есть соответствие (8).

Для построения изоморфизмов (9) и (10) рассмотрим какую-либо проективную резольвенту

$$0 \to F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \pi \to 0 \tag{13}$$

группы π. Применив к (13) функтор $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \mathbf{Z})$ и обозначая $\mathrm{Hom}(F_i, \mathbf{Z})$ через F_i^*, мы получим точную последовательность

$$0 \to F_0^* \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} F_1^* \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} \mathrm{Ext}(\pi, \mathbf{Z}) = \hat{\pi} \to 0\ . \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{\alpha}$ обозначает индуцированный гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_F)$, а $\widetilde{\varepsilon}$ — просто естественная проекция, получающаяся при интерпретации $\mathrm{Ext}(\,\cdot\,, \mathbf{Z})$ как производного функтора для $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \mathbf{Z})$ (на этот раз по первому аргументу). Более содержательное описание гомоморфизма $\widetilde{\varepsilon}$ получается следующим образом. Пусть $\varphi : F_1 \to \mathbf{Z}$ — элемент группы F_1^*. Гомоморфизм φ можно продолжить до гомоморфизма (13) в (11); ввиду $F_1 \otimes \mathbf{Q} = F_0 \otimes \mathbf{Q}$, это продолжение единственно. В частности, мы получаем гомоморфизм $\pi \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — это и есть $\widetilde{\varepsilon}(\varphi)$.

Применим теперь к (14) функтор $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, A)$. Ввиду того, что (14) является, очевидно, проективной резольвентой для группы $\hat{\pi}$, мы имеем отождествления

$$\mathrm{Ext}(\hat{\pi}, A) = \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(F_1^*, A) \to \mathrm{Hom}(F_0^*, A)] \tag{15}$$

и

$$\mathrm{Hom}(\hat{\pi}, A) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(F_1^*, A) \to \mathrm{Hom}(F_0^*, A)]\ . \tag{16}$$

С другой стороны, ввиду $\mathrm{Hom}(F_i^*, A) = A \otimes F_i$, правые части (15) и (16) отождествляются соответственно с

$$\mathrm{Coker}[A \otimes F_1 \to A \otimes F_0] = A \otimes \pi$$

и

$$\mathrm{Ker}[A \otimes F_1 \to A \otimes F_0] = A * \pi ,$$

что и дает изоморфизмы (9) и (10).

Дадим, наконец, прямое описание изоморфизма (9), исходя из интерпретации элементов группы $\mathrm{Ext}(\hat{\pi}, A)$ как расширений. Пусть

$$0 \to A \to B \to \hat{\pi} \to 0 \tag{17}$$

представляет элемент из $\mathrm{Ext}(\hat{\pi}, A)$. Тождественное отображение $\hat{\pi} \to \hat{\pi}$ можно продолжить до гомоморфизма (14) в (17). В частности, это дает гомоморфизм $F_0^* \to A$, или иначе (в силу уже упоминавшегося отождествления) элемент группы $A \otimes F_0$. Теперь остается спроектировать этот элемент в группу $A \otimes \pi$ посредством гомоморфизма $1_A \otimes \varepsilon$ — это и даст нам образ элемента (17) группы $\mathrm{Ext}(\hat{\pi}, A)$ при изоморфизме (9).

1.4. Некоторые операторы Бокштейна и соотношения между ними. Операторами Бокштейна называются, как известно, связывающие гомоморфизмы в длинных точных последовательностях гомологий и когомологий, индуцированных короткими точными последовательностями групп коэффициентов. Мы будем, в частности, использовать операторы Бокштейна

$$\beta : H^i(X; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^{i+1}(X) \tag{18}$$

и

$$\beta_\pi : H^i(X; \pi) \to H^{i+1}(X; F_1) , \tag{19}$$

индуцированные соответственно последовательностями (11) и (13). Заметим, что образ оператора β_π лежит в подгруппе

$$\mathrm{Ker}[\alpha_* : H^{i+1}(X; F_1) \to H^{i+1}(X; F_0)]$$

группы $H^{i+1}(X; F_1)$; эту подгруппу можно отождествить с

$$\mathrm{Ker}[1 \otimes \alpha : H^{i+1}(X) \otimes F_1 \to H^{i+1}(X) \otimes F_0] = H^{i+1}(X) * \pi ,$$

что позволяет интерпретировать оператор β_π как гомоморфизм

$$H^i(X; \pi) \to H^{i+1}(X) * \pi , \tag{20}$$

уже не зависящий от выбора резольвенты (13).

Заметим, что оператор β_π (в форме (20)) совпадает с проекцией в "точной последовательности универсальных коэффициентов"

$$0 \to H^i(X) \otimes \pi \to H^i(X;\pi) \to H^{i+1}(X) * \pi \to 0 .$$

Таким образом, $\operatorname{Ker}\beta_\pi$ совпадает с подгруппой $H^i(X) \otimes \pi$ группы $H^i(X;\pi)$, или иначе с образом гомоморфизма

$$\varepsilon_* : H^i(X;F_0) \to H^i(X;\pi) .$$

Мы будем называть классы когомологий, лежащие в подгруппе

$$\operatorname{Ker}\beta_\pi = H^*(X) \otimes \pi = \operatorname{Im}\varepsilon_*$$

группы $H^*(X;\pi)$, целочисленными.

Специальный случай оператора Бокштейна β_π, соответствующий резольвенте

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\alpha_m} \mathbf{Z} \xrightarrow{\varepsilon_m} \mathbf{Z}_m \to 0 , \qquad (21)$$

где α_m — умножение на m, а ε_m — стандартная проекция, мы обозначаем короче через β_m (вместо $\beta_{\mathbf{Z}_m}$), а для наиболее существенного для нас 2-примарного случая используем (в §2 ниже) сокращение $\delta_m = \beta_{2^m}$ (это же обозначение используется и в [1]). Следующее утверждение тривиально.

Лемма 4. *Гомоморфизм*

$$\beta_m : H^i(X;\mathbf{Z}_m) \to H^{i+1}(X)$$

является мономорфизмом, если порядок группы $H^i(X)$ взаимно прост с m (в частности, если $H^i(X)=0$), и эпиморфизмом, если порядок группы $H^{i+1}(X)$ делит m.

Операторы β и β_m связаны очевидным соотношением: пусть

$$i_m : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

— стандартное вложение (переводящее 1 в $\frac{1}{m}$), тогда

$$\beta \circ (i_m)_* = \beta_m . \qquad (22)$$

Мы приведем более общее утверждение. Для этого, используя изоморфизм (10), представим β_π как гомоморфизм

$$H^i(X;\pi) \to \operatorname{Hom}(\hat{\pi}, H^{i+1}(X))$$

или, что равносильно, как гомоморфизм

$$H^i(X; \pi) \otimes \hat{\pi} \to H^{i+1}(X) .$$

С другой стороны, мы имеем "свертку"

$$H^i(X; \pi) \otimes \hat{\pi} \to H^i(X; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) ,$$

действующую по формуле $c \otimes \xi \mapsto \xi_*(c)$, и гомоморфизм (18), замыкающий "треугольник". Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 5. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
H^i(X; \pi) \otimes \hat{\pi} \arrow[r, "\beta_\pi"] \arrow[d, "\text{свертка}"] & H^{i+1}(X) \\
H^i(X; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

1.5. Формулировка теоремы. Согласно формуле универсальных коэффициентов, группа $H^{n+1}(\mathbb{K}(\pi, n))$ — область определения гомоморфизма τ_q^{n+1} в точной последовательности (3) — изоморфна $\mathrm{Ext}(\pi, \mathbf{Z}) = \hat{\pi}$. Этот изоморфизм, как нетрудно видеть, совпадает с обратным к оператору Бокштейна

$$\beta : H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \hat{\pi} \to H^{n+1}(\mathbb{K}(\pi, n)) . \tag{23}$$

Мы обозначаем группу $\mathrm{Ker}\, \tau_q^{n+1} \subset \hat{\pi}$ через $\hat{\pi}_0$, а естественное вложение $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}$ — через $\hat{\rho}$. Переходя к двойственным группам, мы имеем проекцию $\rho : \pi \to \pi_0$, индуцирующую гомоморфизм

$$\rho_* : H^{n+1}(\mathbb{X}; \pi) \to H^{n+1}(\mathbb{X}; \pi_0) .$$

Мы обозначаем класс $\rho_* c(q)$ через $\widetilde{c}(q)$.

Рассмотрим теперь элемент $\Theta(q)$ группы $\mathrm{Ext}(\hat{\pi}_0, H^{n+1}(\mathbb{X}))$, представленный точной последовательностью (3). В силу изоморфизма (9), мы можем отождествить группу $\mathrm{Ext}(\hat{\pi}_0, H^{n+1}(\mathbb{X}))$ с группой

$$H^{n+1}(\mathbb{X}) \otimes \pi_0 \subset H^{n+1}(\mathbb{X}; \pi_0)$$

и, таким образом, считать, что $\Theta(q) \in H^{n+1}(\mathbb{X}; \pi_0)$.

Теорема 2. $\Theta(q) = -\tilde{c}(q)$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 2.

1.6. Вычисление τ_q^{n+1}. Трансгрессия τ_q^{n+1} — это элемент группы $\mathrm{Hom}(\hat{\pi}, H^{n+2}(\mathbb{X}))$; в этой же группе — в силу изоморфизма (10) — лежит и класс $\beta_\pi c(q)$.

Лемма 6. $\tau_q^{n+1} = \beta_\pi c(q)$.

Доказательство. Требуется доказать тождество

$$\tau_q^{n+1}(\xi) = \beta_\pi c(q)(\xi) \tag{24}$$

для всех $\xi \in \hat{\pi}$. Заметим во-первых, что в левой части тождества мы можем вместо ξ написать $\beta(\xi)$ (ввиду того, что мы как раз и отождествляем группу $H^{n+1}(\mathbb{K}(\pi, n))$ с группой $\hat{\pi}$ посредством изоморфизма (23)). Далее, класс $\xi \in H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ можно записать в виде $\xi_*(1_\pi)$, где

$$\xi_* : H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \pi) \to H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

— индуцированный гомоморфизм. Таким образом, левая часть (24) принимает вид $\tau_q^{n+1}\beta\xi_*(1_\pi)$. Правую же часть можно, ввиду леммы 5, записать в виде

$$\beta\xi_* c(q) = \beta\xi_* \tau_q^{n,\pi}(1_\pi)\ .$$

Остается воспользоваться перестановочностью трансгрессии с коэффициентными гомоморфизмами и с операторами Бокштейна.

1.7. Сведение теоремы 2 к случаю $\tau_q^{n+1} = 0$. Рассмотрим, наряду с расслоением q, расслоение

$$\mathbb{K}(\pi_0, n) \xrightarrow{j_0} \mathbb{E}_0 \xrightarrow{q_0} \mathbb{X}$$

с $c(q_0) = \widetilde{c}(q)$. Отображение $\mathbb{K}(\pi, n) \to \mathbb{K}(\pi_0, n)$, индуцирующее проекцию $\rho : \pi \to \pi_0$, продолжается (в силу леммы 1) до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(\pi, n) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho"] & \mathbb{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] & \mathbb{X} \arrow[d, "\mathrm{id.}"] \\
\mathbb{K}(\pi_0, n) \arrow[r, "j_0"] & \mathbb{E}_0 \arrow[r, "q_0"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}, \tag{25}$$

индуцирующей, в свою очередь, диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(\mathbb{X}) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & H^{n+1}(\mathbb{E}_0) \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "r^*"] & H^{n+1}(\mathbb{K}(\pi_0, n)) \arrow[r, "\tau_{q_0}"] \arrow[d, "\rho^*"] & H^{n+2}(\mathbb{X}) \arrow[d, "\mathrm{id.}"] \\
H^{n+1}(\mathbb{X}) \arrow[r, "q"] & H^{n+1}(\mathbb{E}) \arrow[r, "j"] & H^{n+1}(\mathbb{K}(\pi, n)) \arrow[r, "\tau_q"] & H^{n+2}(\mathbb{X})
\end{tikzcd}\ . \tag{26}$$

Очевидно, что индуцированный гомоморфизм ρ^* совпадает с вложением $\hat{\rho} : \hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}$; таким образом,

$$\tau_{q_0} = \tau_q|_{\hat{\pi}_0} = 0 ,$$

так что точная последовательность (3) для расслоения q_0 имеет вид

$$0 \to H^{n+1}(\mathbb{X}) \to H^{n+1}(\mathbb{E}_0) \to \hat{\pi}_0 \to 0 , \tag{27}$$

и диаграмма (26) устанавливает изоморфизм между (27) и (3), откуда $\Theta(q_0) = \Theta(q)$. С другой стороны, класс $\widetilde{c}(q_0)$ совпадает с $c(q_0)$, поэтому как утверждение теоремы 2 для расслоения q, так и утверждение этой же теоремы для расслоения q_0, сводятся к одному и тому же — а именно, к равенству $\Theta(q_0) = -c(q_0)$.

1.8. "Геометрическая реализация" резольвенты для $\hat{\pi}$. Пусть N — некоторое натуральное число, большее 1. Рассмотрим "геометрическую реализацию" точной последовательности (13) — расслоение

$$K(F_1, N) \xrightarrow{\alpha} K(F_0, N) \xrightarrow{\varepsilon} K(\pi, N) \tag{28}$$

(пространств, а не спектров!), для которого соответствующая последовательность N-мерных гомологий совпадает с (13). Для когомологий мы получим "точную последовательность расслоения"

$$0 \to H^N(F_0, N) \xrightarrow{\alpha^*} H^N((F_1, N)) \xrightarrow{\tau_\varepsilon^N} H^{N+1}((\pi, N)) \to 0 . \tag{29}$$

Члены этой последовательности отождествляются с соответствующими членами диаграммы (14) и, очевидно, гомоморфизм α^* совпадает при этом с $\widetilde{\alpha}$. Следующая лемма завершает сравнение последовательностей (29) и (14).

Лемма 7. *При каноническом отождествлении групп F_1^* и $\hat{\pi}$ с группами $H^N(F_1, N; \mathbf{Z})$ и $H^{N+1}(\pi, N; \mathbf{Z})$ соответственно, гомоморфизм τ_ε^N совпадает с $-\widetilde{\varepsilon}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим специальный случай резольвенты (13) — последовательность (21). Расслоение (28) для этой последовательности имеет вид

$$K(\mathbf{Z}, N) \xrightarrow{\alpha_m} K(\mathbf{Z}, N) \xrightarrow{\varepsilon_m} K(\mathbf{Z}_m, N) , \tag{30}$$

и мы докажем в этом случае лемму, построив некоторую "клеточную аппроксимацию" расслоения (30) и вычислив оба гомоморфизма $\tau^N_{\varepsilon_m}$ и $\widetilde{\varepsilon}_m$.

Пусть $f : S^N \to S^N$ — отображение степени m. Обозначим через D^N_m "цилиндр" отображения f, т. е. результат приклеивания цилиндра $[0,1] \times S^N$ к сфере S^N посредством отображения $(1,x) \mapsto f(x)$. Обозначим, далее, через C^N_m "конус" отображения f, т. е. фактор-пространство $D^N_m/0 \times S^N$. Последовательность отображений

$$S^N \xrightarrow{g} D^N_m \xrightarrow{h} C^N_m\ , \tag{31}$$

где $g(x) = (0,x)$ и h — естественная проекция, представляет собой часть "последовательности Пуппе" для отображения f.

Пространство D^N_m имеет естественное клеточное разбиение с двумя N-мерными клетками $e^N = S^N \backslash (\text{точка})$ и $e^N_0 = 0 \times e^N$ и одной $(N+1)$-мерной клеткой $e^{N+1} = (0,1) \times e^N$, при этом

$$de^{N+1} = me^N - e^N_0\ . \tag{32}$$

При переходе от D^N_m к C^N_m клетка e^N_0 исчезает, и соотношение (32) превращается в

$$de^{N+1} = me^N\ . \tag{33}$$

Клетка e^N является во всех трех пространствах S^N, D^N_m и C^N_m циклом и представляет образующую в каждой из соответствующих групп гомологий; при таком выборе образующих последовательность

$$H_N\left(S^N\right) \xrightarrow{g_*} H_N\left(D^N_m\right) \xrightarrow{h_*} H_N\left(C^N_m\right) \tag{34}$$

как раз и совпадает с (21).

Рассмотрим теперь "сопряженную" с (34) последовательность

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(H_N\left(D^N_m\right), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\widetilde{g}} & \mathrm{Hom}(H_N\left(S^N\right), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\widetilde{h}} & \mathrm{Ext}(H_N\left(C^N_m\right), \mathbf{Z}) \\
\| & & \| & & \| \\
H^N\left(D^N_m\right) & & H^N\left(S^N\right) & & H^N\left(C^N_m; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\right)
\end{array} \tag{35}$$

(полученную из (34) тем же способом, каким в общем случае последовательность (14) получалась из (13)). Если взять в качестве образующих групп $H^N\left(D^N_m\right)$ и $H^N\left(S^N\right)$ классы λ и μ, принимающие на клетке e^N значение 1, а в качестве образующей группы $H^N\left(C^N_m; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\right)$ — класс ν, принимающий на клетке e^N значение

... нетрудно видеть, будут иметь место равенства ... (последнее вытекает из данного в п.1.3 описания ... ε). Далее, класс $J(\nu)$ принимает на клетке e^{N+1} значение 1 (что следует из соотношения (33)) и является, следовательно, образующей группы $H^{N+1}\left(C_m^N\right)$. С другой стороны, из соотношения (32) следует, что класс $\partial(\nu)$, где

$$\partial : H^N\left(S^N\right) \to H^{N+1}\left(D_m^N, 0\times S^N\right) = H^{N+1}\left(C_m^N\right)$$

— связывающий гомоморфизм пары, принимает на клетке e^{N+1} значение -1 и, значит, совпадает с $-\beta(\nu)$. Таким образом, точная последовательность (35) совпадает с

$$H^N\left(D_m^N\right) \xrightarrow{q^*} H^N\left(S^N\right) \xrightarrow{-\partial} H^{N+1}\left(C_m^N\right)\ . \tag{36}$$

Заметим теперь, что можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^N & \xrightarrow{g} & D_m^N & \xrightarrow{h} & C_m^N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbf{Z},N) & \xrightarrow{\alpha_m} & K(\mathbf{Z},N) & \xrightarrow{\varepsilon_m} & K(\mathbf{Z}_m,N) \end{array},$$

индуцирующую изоморфизм между (34) и (21), а следовательно (ввиду функториального характера всех конструкций) и изоморфизм между (36) и (21). Для доказательства леммы в нашем частном случае остается только заметить, что при вышеуказанном изоморфизме гомоморфизму ∂ отвечает как раз трансгрессия τ_ε^N, являющаяся связывающим гомоморфизмом пары $(K(\mathbf{Z},N), \alpha_m K(\mathbf{Z},N))$.

Для доказательства общего случая рассмотрим произвольный гомоморфизм вида $\varphi : \mathbf{Z}_m \to \pi$. Этот гомоморфизм можно продолжить до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\alpha_m} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\varepsilon_m} & \mathbf{Z}_m & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ 0 & \to & F_1 & \xrightarrow{\alpha} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \pi & \to & 0 \end{array}, \tag{37}$$

а также до соответствующего этой диаграмме отображения расслоения (30) в расслоение (28). Все это дает (опять ввиду естественности всех конструкций) коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
F_1^* \arrow[r, "\tau_\varepsilon^N+\widetilde{\varepsilon}"] \arrow[d, "\varphi_1^*"] & \widetilde{\pi} \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\
\mathbf{Z}^* \arrow[r, "\tau_{\varepsilon_m}^N+\widetilde{\varepsilon}_m"] & \widetilde{\mathbf{Z}}_m^*
\end{tikzcd}
$$

Вследствие доказанного раньше частного случая леммы, мы имеем $\tau_{\varepsilon_m}^N + \widetilde{\varepsilon}_m = 0$, откуда

$$\operatorname{Im}(\tau_\varepsilon^N + \widetilde{\varepsilon}) \subset \operatorname{Ker}\hat{\varphi} \, .$$

Ввиду произвольности φ, отсюда следует $\tau_\varepsilon^N + \widetilde{\varepsilon} = 0$ (так как очевидно, что пересечение ядер всех гомоморфизмов группы $\hat{\pi}$ в циклические группы тривиально).

1.9. Доказательство теоремы 2. Согласно пп. 1.4, 1.6 и 1.7, мы можем предполагать, что класс $c(q)$ целочислен (и $\operatorname{Ker}\tau_q^{N+1} = \hat{\pi}$). Существует, следовательно, такое расслоение

$$\mathbb{K}(F_0, n) \xrightarrow{j_0} \mathbb{E}_0 \xrightarrow{q_0} \mathbb{X}, \tag{38}$$

для которого $\varepsilon_* c(q_0) = c(q)$ (где F_0 и ε — из диаграммы (13)). Мы можем объединить теперь последовательности (1), (38) и (28) в коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(F_1,n) \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{K}(F_1,n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & * \arrow[d] \\
\mathbb{K}(F_0,n) \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathbb{E}_0 \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & \mathbb{X} \arrow[d, "\mathrm{id.}"] \\
\mathbb{K}(\pi,n) \arrow[r, "j"] & \mathbb{E} \arrow[r, "q"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}
\tag{39}
$$

(все строки и столбцы которой — расслоения). Первые два столбца этой диаграммы представляют собой отображение расслоения ε в расслоение ε_0. Это отображение индуцирует гомоморфизм соответствующих длинных точных последовательностей целочисленных групп когомологий, и в частности, коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
H^n(F_1,n) \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d, "\tau_{\varepsilon_0}^n"] & H^n(F_1,n) \arrow[d, "\tau_\varepsilon^n"] \\
H^{n+1}(\mathbb{E}) \arrow[r, "j^*"] & H^{n+1}(\pi,n)
\end{tikzcd}
\tag{40}
$$

Далее, из диаграммы (39) можно извлечь отображение расслоени

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(F_1,n) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{K}(F_0,n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_0} \\ \mathbb{E}_0 & \xrightarrow{\text{id.}} & \mathbb{E}_0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_0} \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{q} & \mathbb{X} \end{array},$$

дающее, в свою очередь, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(F_0,n) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(F_1,n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau^n_{q_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau^n_{\varepsilon_0}} \\ H^{n+1}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{q^*} & H^{n+1}(\mathbb{E}) \end{array} \qquad (41)$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^n(F_0,n) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(F_1,n) & \xrightarrow{-\tau^n_\varepsilon} & H^{n+1}(\pi,n) & \to 0 \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle -\tau^n_{q_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle -\tau^n_{\varepsilon_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{id.}} & \\ 0 \to & H^{n+1}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{q^*} & H^{n+1}(\mathbb{E}) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+1}(\pi,n) & \to 0 \end{array} \qquad (42)$$

Эта диаграмма коммутативна — составляющие ее два квадрата совпадают, с точностью до обозначений, с (40) и (41). Верхняя строка диаграммы (42) отождествляется, в силу леммы 7, с резольвентой (14), а нижняя представляет элемент $\Theta(q)$. Таким образом, диаграмма (42) представляет собой не что иное как "геометрическую реализацию" изоморфизма (9) (в том его варианте, который описан в конце п.1.3) в применении к элементу $\Theta(q)$.

Теперь, чтобы получить образ элемента $\Theta(q)$ в группе $H^{n+1}(\mathbb{X};\pi)$, мы должны интерпретировать гомоморфизм

$$-\tau^n_{q_0} : H^n(F_0,n) \to H^{n+1}(\mathbb{X})$$

как элемент группы $H^{n+1}(\mathbb{X};F_0)$ и затем взять его образ при индуцированном гомоморфизме

$$\varepsilon_* : H^{n+1}(\mathbb{X};F_0) \to H^{n+1}(\mathbb{X};\pi)\,.$$

Используя лемму 3, мы имеем

$$\varepsilon_*(-\tau^n_{q_0}) = -\varepsilon_* c(q_0) = -c(q)$$

— что и требовалось доказать.

1.10. О группах $H^i(\mathbb{E})$, $i > n+1$. Пусть опять $q : \mathbb{E} \to \mathbb{X}$ — главное $\mathbb{K}(\pi, n)$-расслоение. Для каждого $i > n+1$ мы можем написать аналогичную (3) короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Coker} \tau_q^{i-1} \xrightarrow{q^*} H^i(\mathbb{E}) \xrightarrow{j^*} \operatorname{Ker} \tau_q^i \to 0\,. \tag{43}$$

Предположим теперь, что группа π не только конечна, но и 2-примарна. В этом случае группы $H^i(\mathbb{K}(\pi, n)$ с $i > n+1$, как хорошо известно, являются $\mathbf{Z}_2$-модулями (см. [7]). Пусть зафиксирован некоторый изоморфизм

$$\pi \approx \bigoplus_k \mathbf{Z}_{2^{n(k)}}\,, \tag{44}$$

и пусть $x_k \in H^n(\mathbb{K}(\pi, n); \mathbf{Z}_{2^{n(k)}}) = \operatorname{Hom}(\pi, \mathbf{Z}_{2^{n(k)}})$ соответствуют стандартным проекциям. Тогда множество классов когомологий вида

$$\delta_1 \mathrm{Sq}^I \overline{x}_k,\ \delta_1 \mathrm{Sq}^I \overline{\beta x}_k\,, \tag{45}$$

где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_t)$ — допустимые последовательности с четным i_1 и с $i_t \geq 2$, образуют базис $\mathbf{Z}_2$-модуля $\bigoplus_{i > n+1} H^i(\mathbb{K}(\pi, n))$. Действие трансгрессии τ_q на классы (45) вычисляется очевидным образом — в силу естественности трансгрессии,

$$\begin{aligned} \tau_q\left(\delta_1 \mathrm{Sq}^I \overline{x}_k\right) &= \delta_1 \mathrm{Sq}^I (\overline{x}_k)_* c(q) \\ \tau_q\left(\delta_1 \mathrm{Sq}^I \overline{\beta x}_k\right) &= \delta_1 \mathrm{Sq}^I \beta (\overline{x}_k)_* c(q)\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Остается, таким образом, лишь вопрос о восстановлении группы $H^i(\mathbb{E})$ по известным крайним членам последовательности (43). В большинстве случаев эта задача будет легко решаться с помощью следующей очевидной леммы.

Лемма 8. *Пусть $y \in \operatorname{Coker} \tau_q^{i-1}$ — ненулевой класс. Класс $q^*(y) \in H^i(\mathbb{E})$ неделим (т. е. порождает в группе $H^i(\mathbb{E})$ прямое слагаемое) в том и только том случае, если $\overline{y} \notin \operatorname{Im} \tau_q^{i-1, \mathbf{Z}_2}$.*

Достаточно, таким образом, уметь вычислять трансгрессию $\tau_q^{i, \mathbf{Z}_2}$, что делается посредством формул, аналогичных (46), примененных к образующим $\mathrm{Sq}^J \overline{x}_k$ и $\mathrm{Sq}^J \overline{\beta x_k}$ группы $\bigoplus_{i > n+1} H^i(\mathbb{K}(\pi, n); \mathbf{Z}_2)$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Разложения Постникова. Разложение Постникова спектра $\mathbb{Y}$ — это гомотопически коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
* & \mathbb{X}_0 \arrow[l, "q_0"'] & \dots \arrow[l, "q_1"'] & \mathbb{X}_i \arrow[l, "q_i"'] & \dots \arrow[l, "q_{i+1}"'] \\
& \mathbb{Y} \arrow[u, "f_0"] \arrow[urr, "f_i"'] & & &
\end{tikzcd}$$

удовлетворяющая условиям:

(1) каждое q_i является $\mathbb{K}(\pi_i, i)$-расслоением;

(2) каждое f_i является $(i+1)$-эквивалентностью, что озна[...] что индуцированные гомоморфизмы $\pi_j\mathbb{Y} \to \pi_j\mathbb{X}_i$ — мономорфи[...] при $j \leq i$ и эпиморфизмы при $j = i + 1$.

В действительности мы будем, вместо условия (2), проверять с[...] дующее — как легко видеть, достаточное — условие (2′):

(2′) гомоморфизмы $f_i^* : H^j(\mathbb{X}_i) \to H^j(\mathbb{Y})$ являются изоморф[...] мами при $j \leq i + 1$ и мономорфизмами при $j = i + 2$.

Соответствующее условие в [1] (см. п. 2.3, равенства (7)) вы[...] дит чуть сложнее, что связано с возможной бесконечностью гру[...] $H^j(\mathbb{Y})$. В интересующем нас здесь 2-примарном случае условие [...] из [1] как раз и превращается в (2′); более того, в этом случае ус[...] вия (2) и (2′), как легко видеть, эквивалентны.

2.2. Когомологии спектра $\mathbb{T}_m \wedge K_n$. Группы $H^i(\mathbb{T}_m)$ с $i \leq$[...] и $\operatorname{Tors} H^8(\mathbb{T}_m)$ приведены в [1, п. 2.6(е)] (нужно только умнож[...] указанные там образующие на класс Тома $U \in H^0(\mathbb{T}_m)$), а груп[...] $H^i(K_n)$ с $i \leq 8$ — в [1, п. 2.5(б)]. Пользуясь формулой Кюннет[...] обозначая стандартные спаривания

$$H^*(\mathbb{T}_m; A) \otimes \widetilde{H}^*(K_n; B) \to H^*(\mathbb{T}_m \wedge K_n; A \otimes B)$$

(для всевозможных A и B) через $\otimes$, мы получаем представленны[...] таблице 1 результат (здесь a и b обозначают по-прежнему $\min\{m,$[...] и $\min\{m, n+1\}$; образующие циклических слагаемых указаны в т[...] же порядке, что и сами эти слагаемые).

2.3. Разложение Постникова спектра $\mathbb{T}_m \wedge K_n$: шаги 0–[...]
Спектр $\mathbb{T}_m \wedge K_n$ односвязен, и мы можем взять $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}_1 = *$. Да[...]

i	H^i	образующие
$0, 1, 2$	0	—
3	$\mathbb{Z}_{2^n}$	$U \otimes \delta_n \varkappa_n$
4	0	—
5	$\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^a}$	$U \otimes \delta_{n+1} P(\varkappa_n)$ $\delta_a(\omega_m U \otimes \varkappa_n)$
6	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^a}$	$U \otimes (\delta_n \varkappa_n)^2$ $\delta_m \omega_m \cdot U \otimes \delta_n \varkappa_n$
7	$\mathbb{Z}_{2^n}^2 \oplus \mathbb{Z}_{2^a} \oplus \mathbb{Z}_{2^b}$	$U \otimes \delta_n (\varkappa_n)^3$ $p_1 U \otimes \delta_n \varkappa_n$ $\delta_a(\theta_m U \otimes \varkappa_n)$ $\delta_b(\omega_m U \otimes P(\varkappa_n))$
8	$\mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_{2^a} \oplus \mathbb{Z}_{2^b}$	$U \otimes \delta_n \varkappa_n \cdot \delta_{n+1} P(\varkappa_n)$ $\delta_1(\mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_m \omega_m} \cdot U \otimes \varkappa_n)$ $\delta_1(\omega_m U \otimes \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_n \varkappa_n})$ $\delta_m \theta_m \cdot U \otimes \delta_n \varkappa_n$ $\delta_m \omega_m \cdot U \otimes \delta_{n+1} P(\varkappa_n)$

Табл. 1: группы $H^i(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$, $i \leq 8$

Положим $\mathbb{X}_2 = \mathbb{K}_n(2)$ (напомним, что $\mathbb{K}_n(i)$ — это сокращение для $K(2^n, i)$) и определим отображение

$$f_2 : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{X}_2$$

условием $f_2^*(\alpha) = U \otimes \varkappa_n$, где α — универсальный класс. Группы $H^i(\mathbb{X}_2)$ имеют при $i \leq 8$ пять образующих: $\delta_n \alpha$, $\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}$, $\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_n \alpha}$, $\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\alpha}$ и $\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_n \alpha}$. Образы этих классов при гомоморфизме f_2^* находятся посредством вполне рутинного вычисления, с использованием соотношений из §2 работы [1] и тождеств $\mathrm{Sq}^i \overline{U} = w_i U$. Например, для класса $\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}$:

$$f_2^*(\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}) = \delta_1 \mathrm{Sq}^2 (\overline{U} \otimes \overline{\varkappa_n}) = \delta_1 \big(\overline{U} \otimes \overline{\varkappa_n^2} + w_2 U \otimes \overline{\varkappa_n}\big) =$$
$$= \delta_1 \big(\overline{U} \otimes \overline{P(\varkappa_n)} + \overline{\omega_m U} \otimes \overline{\varkappa_n}\big) = [1, \text{соотн. } (4) \text{ и утв. } 2.6(\text{а})]$$
$$= U \otimes \delta_1 \overline{P(\varkappa_n)} + \delta_1 \overline{\omega_m U \otimes \varkappa_n} = [1, \text{соотн. } (1)]$$

$$= 2^n \cdot U \otimes \delta_{n+1} P(\varkappa_n) + 2^{a-1} \delta_a(\omega_m U \otimes \varkappa_n) .$$

Последнее выражение мы можем, имея в виду изоморфизм

$$H^5 (\mathbb{T}_m \wedge K_n) \approx \mathbf{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbf{Z}_{2^a}$$

(таблица 1), записать короче как $(2^n \bmod 2^{n+1}, 2^{a-1} \bmod 2^a)$, или еще короче — как $(2^n, 2^{a-1})$. Записав в этом же духе результаты остальных вычислений, мы получим представление гомоморфизма f_2^* в виде таблицы 2.

i	H^i	образующие	образы
$0,1,2$	0	—	—
3	$\mathbf{Z}_{2^n}$	$\delta_n \alpha$	1
4	0	—	—
5	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}$	$(2^n, 2^{a-1})$
6	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_n \alpha}$	$(1, 2^{m-1})$
7	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\alpha}$	$(0, 0, 2^{a-1}, 2^{b-1})$
8	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_n \alpha}$	$\begin{cases} (0,0,1,2^{a-1},0) & m \le n \\ (0,0,1,0,0) & m > n \end{cases}$

Табл. 2: гомоморфизм $f_2^* : H^i (\mathbb{X}_2) \to H^i (\mathbb{T}_m \wedge K_n)$

В соответствии с п.2.1, отображение f_2 является 4-эквивалентностью, поэтому мы можем положить $\mathbb{X}_3 = \mathbb{X}_2$ и $f_3 = f_2$.

2.4. Разложение Постникова: подготовка шага 4 в случае $a > 1$. Определим спектр $\mathbb{X}_4'$ посредством расслоения

$$\mathbb{K}_{a-1}(4) \xrightarrow{j_4'} \mathbb{X}_4' \xrightarrow{q_4'} \mathbb{X}_2$$

с $c(q_4') = \rho_{a-1} \delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}$. Класс $c(q_4')$, очевидно, целочислен, так что $\tau^5_{q_4'} = 0$ и точная последовательность (3) для расслоения q_4' имеет вид

$$0 \to H^5 (\mathbb{X}_2) = \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{(q_4')^*} H^5 (\mathbb{X}_4') \xrightarrow{(j_4')^*} H^5 (\mathbb{K}_{a-1}(4)) = \mathbf{Z}_{2^{a-1}} \to 0 .$$

Ввиду $c(q'_4) \neq 0$ и теоремы 2, эта последовательность не расщепляется, поэтому $H^5(\mathbb{X}'_4) \approx \mathbf{Z}_{2^a}$. В силу леммы 4, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
H^4(\mathbb{X}_2;\, \mathbf{Z}_{2^a}) \arrow[r, "(q'_4)^*"] \arrow[d, "\delta_a"] & H^4(\mathbb{X}'_4;\, \mathbf{Z}_{2^a}) \arrow[r, "(j'_4)^*"] \arrow[d, "\delta_a"] & H^4(\mathbb{K}_{a-1}(4);\, \mathbf{Z}_{2^a}) \arrow[d, "\delta_a"] \\
H^5(\mathbb{X}_2) \arrow[r, "(q'_4)^*"] & H^5(\mathbb{X}'_4) \arrow[r, "(j'_4)^*"] & H^5(\mathbb{K}_{a-1}(4))
\end{tikzcd}$$

все вертикальные стрелки — изоморфизмы, откуда следует, в частности, что группа $H^4(\mathbb{X}'_4;\, \mathbf{Z}_{2^a})$ изоморфна $\mathbf{Z}_{2^a}$, и что

$$(j'_4)^* : H^4(\mathbb{X}'_4;\, \mathbf{Z}_{2^a}) \to H^4(\mathbb{K}_{a-1}(4);\, \mathbf{Z}_{2^a})$$

— эпиморфизм. Мы можем, следовательно, выбрать в качестве образующей γ группы $H^4(\mathbb{X}'_4;\, \mathbf{Z}_{2^a})$ какой-либо из двух классов, удовлетворяющих соотношению

$$(j'_4)^*(\gamma) = \iota_1\ , \tag{47}$$

где ι_1 — стандартная образующая группы

$$H^4(\mathbb{K}_{a-1}(4);\, \mathbf{Z}_{2^a}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_{2^{a-1}}, \mathbf{Z}_{2^a})\ .$$

Рассмотрим теперь три оставшиеся размерности 6, 7, 8, действуя так, как это описано в п. 1.10.

Размерность 6

Ввиду $\tau^5_{q'_4} = 0$ и $H^6(\mathbb{K}_{a-1}(4)) = 0$, точная последовательность (43) сводится здесь к изоморфизму

$$(q'_4)^* : H^6(\mathbb{X}_2) \to H^6(\mathbb{X}'_4)\ .$$

Размерность 7

Группа $H^7(\mathbb{K}_{a-1}(4))$ порождена классом $\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{1}_{a-1}$, где

$$1_{a-1} \in H^4(\mathbb{K}_{a-1}(4);\, \mathbf{Z}_{2^{a-1}}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_{2^{a-1}}, \mathbf{Z}_{2^{a-1}})$$

— универсальный класс. В соответствии с соотношениями (46),

$$\begin{aligned}
\tau^7_{q'_4}(\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{1}_{a-1}) &= \delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{c(q'_4)} = \delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\alpha}} = \\
&= \delta_1 \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^3 \overline{\alpha} = \delta_1(\mathrm{Sq}^5 + \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^1)\overline{\alpha} = \delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_1 \overline{\alpha}} =
\end{aligned}$$

$$= 2^{n-1}\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\delta_n\alpha} = 0$$

(последнее равенство — ввиду $n-1 \geq a-1 > 0$). Таким образом, трансгрессия $\tau^7_{q'_4}$, так же как и две предыдущие, тривиальна, и последовательность (48) имеет вид

$$0 \to H^7(\mathbb{X}_2) = \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(q'_4)^*} H^7(\mathbb{X}'_4) \xrightarrow{(j'_4)^*} H^7(\mathbb{K}_{a-1}(4)) = \mathbb{Z}_2 \to 0\ . \quad (48)$$

Рассмотрим теперь $\mathbb{Z}_2$-трансгрессию

$$\tau : H^6(\mathbb{K}_{a-1}(4); \mathbb{Z}_2) \to H^7(\mathbb{X}_2; \mathbb{Z}_2)\ .$$

Мы имеем:

$$\tau(\mathrm{Sq}^2\overline{1}_{a-1}) = \mathrm{Sq}^2\overline{c(q'_4)} = \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^3\overline{\alpha} = \mathrm{Sq}^5\overline{\alpha} = \overline{\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\alpha}}\ .$$

Таким образом, образующая $\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\alpha}$ группы $H^7(\mathbb{X}_2)$ при "приведении по модулю 2" попадает в образ трансгрессии τ. В силу леммы 8, последовательность (48) не расщепляется и, следовательно, группа $H^7(\mathbb{X}'_4)$ порождена некоторым классом ζ порядка 4.

Размерность 8

Группа $H^8(\mathbb{K}_{a-1}(4))$ порождена классом $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_{a-1}1_{a-1}}$; действуя как выше, легко проверить, что $\tau^8_{q'_4}(\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_{a-1}1_{a-1}}) = 0$. Таким образом, трансгрессия снова тривиальна, и мы имеем точную последовательность

$$0 \to H^8(\mathbb{X}_2) = \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(q'_4)^*} H^8(\mathbb{X}'_4) \xrightarrow{(j'_4)^*} H^8(\mathbb{K}_{a-1}(4)) = \mathbb{Z}_2 \to 0\ . \quad (49)$$

В отличие от предыдущей размерности, последовательность (49) не расщепляется: легко проверяется, что класс $\mathrm{Sq}^5\overline{\delta_n\alpha}$ — mod 2-образ образующей $\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\delta_n\alpha}$ группы $H^8(\mathbb{X}_2)$ — не принадлежит образу трансгрессии $\tau^{7,\mathbb{Z}_2}_{q'_4}$ (она просто равна нулю). Следовательно, группа $H^8(\mathbb{X}'_4)$ есть $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; в качестве одной из ее образующих мы можем взять класс $(q'_4)^*(\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\delta_n\alpha})$, а в качестве другой — любой из двух прообразов класса $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_{a-1}1_{a-1}}$, например $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma}$. В самом деле,

$$\begin{aligned}
&(j'_4)^*(\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma}) = [\text{соотношение } (47)]\\
&= \delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\iota_1(1_{a-1})} = [[1], \text{соотношение } (2)]\\
&= \delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_{a-1}(1_{a-1})}\ .
\end{aligned}$$

i	H^i	образующие
$0,1,2$	0	$-$
3	$\mathbf{Z}_{2^n}$	$\delta_n\alpha$
4	0	$-$
5	$\mathbf{Z}_{2^a}$	$\delta_a\gamma$
6	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\delta_n\alpha}$
7	$\mathbf{Z}_4$	ζ
8	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	$\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\delta_n\alpha}$, $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma}$

Табл. 3: группы $H^i\,(\mathbb{X}_4')$, $i \leq 8$

Результаты этих вычислений собраны в таблице 3.

В этой таблице мы под α понимаем $(q_4')^*(\alpha)$ и т. д. (иначе говоря, отождествляем группы $H^s\,(\mathbb{X}_2)$ с их образами в $H^s\,(\mathbb{X}_4')$ при мономорфизме $(q_4')^*$). "По построению" имеют место соотношения

$$\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\alpha} = 2^{a-1}\delta_a\gamma \tag{50}$$

и

$$\delta_1\mathrm{Sq}^4\overline{\alpha} = 2\zeta\ . \tag{51}$$

Заметим теперь, что

$$f_2^* c(q_4') = f_2^*(\rho_{a-1}\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\alpha}) = \rho_{a-1}(2^n, 2^{a-1}) = (0,0)\ ,$$

так что по лемме 2 отображение f_2 накрывается отображением

$$f_4' : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{X}_4'\ .$$

Для вычисления индуцированного гомоморфизма

$$(f_4')^* : H^*\,(\mathbb{X}_4') \to H^*\,(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$$

в размерностях до 8 достаточно определить его действие на три класса $\delta_a\gamma$, ζ и $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma}$ (для остальных образующих действие указано в таблице 2).

Класс $\delta_a\gamma$

Ввиду (50), и в соответствии с таблицей 2, мы имеем

$$2^{a-1}(f_4')^*(\delta_a\gamma) = f_2^*(\hat{c}_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\alpha}) = (2^n, 2^{a-1}) ,$$

откуда следует

$$(f_4')^*(\delta_a\gamma) = (2^{n-a+1}\cdot(2k+1), 2l+1)$$

(с некоторыми $k, l \in \mathrm{Z}$), или, что то же,

$$(f_4')^*(\delta_a\gamma) = 2^{n-a+1}(2k+1)U\otimes\delta_{n+1}P(\varkappa_n) + (2l+1)\delta_a(\omega_m U\otimes\varkappa_n) =$$
$$= \delta_a\left[(2k+1)U\otimes\rho_a(\varkappa_n^2) + (2l+1)\omega_m U\otimes\varkappa_n\right] .$$

Гомоморфизм

$$\delta_a : H^4(\mathbb{T}_m\wedge K_n; \mathrm{Z}_{2^a}) \to H^5(\mathbb{T}_m\wedge K_n)$$

является, согласно лемме 4, мономорфизмом, поэтому полученное выше соотношение равносильно

$$(f_4')^*(\gamma) = (2k+1)U\otimes\rho_a(\varkappa_n^2) + (2l+1)\omega_m U\otimes\varkappa_n . \tag{52}$$

Мы можем упростить вид соотношения (52), воспользовавшись леммой 2: согласно этой лемме, существует другое отображение

$$f_4'' : \mathbb{T}_m\wedge K_n \to \mathbb{X}_4'$$

(также накрывающее f_2) с

$$\delta(f_4', f_4'') = k\cdot U\otimes\rho_{a-1}(\varkappa_n^2) + l\cdot\rho_{a-1}(\omega_m U\otimes\varkappa_n) .$$

Ввиду соотношения (47), классу γ соответствует (в том смысле, о котором говорится в лемме 2) когомологическая операция

$$\iota_1 : H^*(\,\cdot\,; \mathrm{Z}_{2^{a-1}}) \to H^*(\,\cdot\,; \mathrm{Z}_{2^a})$$

(т. е. гомоморфизм, индуцированный стандартным вложением $\mathrm{Z}_{2^{a-1}} \to \mathrm{Z}_{2^a}$). Очевидно,

$$\iota_1\delta(f_4', f_4'') = 2k\cdot U\otimes\rho_a(\varkappa_n^2) + 2l\cdot\omega_m U\otimes\varkappa_n .$$

Отсюда и из (5) следует

$$(f_4'')^*(\gamma) = U\otimes\rho_a(\varkappa_n^2) + \omega_m U\otimes\varkappa_n \tag{53}$$

и, соответственно,

$$(f_4'')^*(\delta_a\gamma) = (2^{n-a+1}, 1) .$$

Класс ζ

Ввиду соотношения (51), и в соответствии с таблицей 2, мы имеем

$$2 \cdot (f_4'')^*(\zeta) = f_2^*(\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\alpha}) = (0, 0, 2^{a-1}, 2^{b-1}) \ ,$$

откуда

$$(f_4'')^*(\zeta) = (2^{n-1}\zeta_1, 2^{n-1}\zeta_2, 2^{a-2}\zeta_3, 2^{b-2}\zeta_4) \ ,$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in \{0, 1\}$ и $\zeta_3, \zeta_4 \in \{\pm 1\}$. В действительности мы можем считать, что $\zeta_4 = 1$, заменив при необходимости ζ на $-\zeta$.

Класс $\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_a \gamma}$

Образ этого класса вычисляется в явном виде из соотношения (53). Опуская это довольно длинное, но вполне стандартное вычисление, приведем окончательный результат:

$$(f_4'')^*(\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_a \gamma}) = \begin{cases} (0, 1, 0, 0, 0) & \text{при } m < n, \\ (0, 1, 1, 2^{a-1}, 0) & \text{при } m = n, \\ (0, 0, 1, 0, 0) & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Объединяя полученные результаты с данными из таблицы 2, получаем описание гомоморфизма $(f_4'')^*$ в виде таблицы 4.

i	H^i	образующие	образы
$0,1,2$	0	–	–
3	$\mathbf{Z}_{2^n}$	$\delta_n \alpha$	1
4	0	–	–
5	$\mathbf{Z}_{2^a}$	$\delta_a \gamma$	$(2^{n-a+1}, 1)$
6	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_n \alpha}$	$(1, 2^{m-1})$
7	$\mathbf{Z}_4$	ζ	$(2^{n-1}\zeta_1, 2^{n-1}\zeta_2, \pm 2^{a-2}, 2^{b-2})$
8	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_n \alpha}$	$\begin{cases} (0,0,1,2^{a-1},0) & m \le n \\ (0,0,1,0,0) & m > n \end{cases}$
		$\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_a \gamma}$	$\begin{cases} (0,1,0,0,0) & m < n \\ (0,1,1,2^{a-1},0) & m = n \\ (0,0,1,0,0) & m > n \end{cases}$

Табл. 4: гомоморфизм $(f_4'')^* : H^i(\mathbb{X}_4') \to H^i(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$

2.5. Разложение Постникова: шаг 4. Определим отображение

$$g : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{K}_{n+1}(4)$$

формулой $g^*(\eta) = U \otimes P\varkappa_n$, где η — универсальный класс. Гомоморфизм

$$g^* : H^i\left(\mathbb{K}_{n+1}(4)\right) \to H^i\left(\mathbb{T}_m \wedge K_n\right)$$

с $i \leq 8$ описывается таблицей 5.

i	H^i	образующие	образы
$0,\ldots,4$	0	–	–
5	$\mathrm{Z}_{2^{n+1}}$	$\delta_{n+1}\eta$	$(1,0)$
6	0	–	–
7	Z_2	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\eta}$	$(0,0,0,2^{b-1})$
8	Z_2	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\delta_{n+1}\eta}$	$(1,0,0,0,2^{b-1})$

Табл. 5: гомоморфизм $g^* : H^i\left(\mathbb{K}_{n+1}(4)\right) \to H^i\left(\mathbb{T}_m \wedge K_n\right)$

Определим, наконец, спектр $\mathbb{X}_4$ формулой

$$\mathbb{X}_4 = \begin{cases} \mathbb{X}_4' \times \mathbb{K}_{n+1}(4) & \text{при } a > 1, \\ \mathbb{X}_2 \times \mathbb{K}_{n+1}(4) & \text{при } a = 1 \end{cases}$$

и отображение

$$f_4 : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{X}_4$$

— как (f_4'', g) при $a > 1$ и как (f_2, g) при $a = 1$. Описание гомоморфизма $f_4^* : H^i(\mathbb{X}_4) \to H^i\left(\mathbb{T}_m \wedge K_n\right)$ получается посредством объединения таблиц 5 и 4 (5 и 2 при $a = 1$), и нетрудно видеть, что мы получаем 5-эквивалентность.

2.6. Разложение Постникова: шаг 5. Определим отображение

$$h : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{K}_a(5)$$

формулой

$$h^*(\lambda) = \begin{cases} \omega_m U \otimes \delta_n \varkappa_n & \text{при } m \leq n, \\ \delta_m \omega_m \cdot U \otimes \varkappa_n & \text{при } m > n, \end{cases}$$

i	H^i	образующие	образы
$0,\ldots,5$	0	—	—
6	$\mathbf{Z}_{2^a}$	$\delta_a\lambda$	$(0,1)$
7	0	—	—
8	$\mathbf{Z}_2$	$\delta_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\lambda}$	$\begin{cases}(0,0,1,0,0) & m \le n\\ (0,1,0,2^{a-1},2^{b-1}) & m > n\end{cases}$

Табл. 6: гомоморфизм $h^* : H^i(\mathbb{K}_a(5)) \to H^i(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$

где λ — универсальный класс. Гомоморфизм $h^* : H^i(\mathbb{K}_a(5)) \to H^i(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$ описывается таблицей 6. Положим $\mathbb{X}_5 = \mathbb{X}_4 \times \mathbb{K}_a(5)$ и $f_5 = (f_4, h)$. Нетрудно видеть, что отображение f_5 — 6-эквивалентность.

2.7. Разложение Постникова: шаг 6, случай $m \le n$. Заметим, что в этом случае $a = b = m \ge 2$.

Рассмотрим расслоение

$$\mathbb{K}(\mathbf{Z}_{2^{a-2}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}}, 6) \xrightarrow{j'_6} \mathbb{X}'_6 \xrightarrow{q'_6} \mathbb{X}_5$$

с $c(q'_6) = (\rho_{a-2}\zeta, \rho_{b-1}\delta_1 \mathrm{Sq}^2\overline{\eta})$. Ввиду теоремы 2 последовательность (3) для этого расслоения изоморфна последовательности

$$\mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\iota_{a-2} \oplus \iota_{b-1}} \mathbf{Z}_{2^a} \oplus \mathbf{Z}_{2^b} \xrightarrow{\rho_{a-2} \oplus \rho_{b-1}} \mathbf{Z}_{2^{a-2}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}}, \qquad (54)$$

так что, в частности, $H^7(\mathbb{X}'_6) \approx \mathbf{Z}_{2^a} \oplus \mathbf{Z}_{2^b}$. Ввиду равенства $f_5^*(c(q'_6)) = 0$ и леммы 2, отображение f_5 накрывается отображением

$$f'_6 : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{X}'_6 \,.$$

Определим теперь отображения

$$r_1, r_2 : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{K}_n(6)$$

условиями $r_1^*(\mu) = U \otimes \varkappa_n^3$ и $r_2^*(\mu) = p_1 U \otimes \varkappa_n$ (где μ — универсальный класс) и отображение

$$f_6 : \mathbb{T}_m \wedge K_n \to \mathbb{X}_6 = \mathbb{X}'_6 \times \mathbb{K}_n(6) \times \mathbb{K}_n(6)$$

формулой $f_6 = (f_6', r_1, r_2)$. Гомоморфизм

$$f_6^* : H^7(\mathbb{X}_6) \to H^7(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$$

является, в силу построения, изоморфизмом, а гомоморфизм

$$f_6^* : H^8(\mathbb{X}_6) \to H^8(\mathbb{T}_m \wedge K_n)$$

(совпадающий в этой размерности с f_5^*) — мономорфизмом. В частности, мы получаем

$$\pi_6(\mathbb{T}_m \wedge K_n) = \pi_6(\mathbb{X}_6) = \mathbf{Z}_{2^n}^2 \oplus \mathbf{Z}_{2^{a-2}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}} ,$$

причем ввиду $a = b$ этот результат можно записать и как

$$\mathbf{Z}_{2^n}^2 \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-2}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}}$$

— в соответствии с формулировкой теоремы 1.

2.8. Разложение Постникова: шаг 6, случай $m > n > 1$. Теперь, очевидно, мы имеем $a = b - 1 \geq 2$.

Заметим, что (как видно из таблицы 4) в рассматриваемом случае гомоморфизм

$$f_5^* : H^8(\mathbb{X}_5) \to H^8(\mathbb{T}_m \wedge K_n) \tag{55}$$

имеет ненулевое ядро:

$$\operatorname{Ker} f_5^* = \operatorname{Ker} f_4'' = \left\langle \delta_1 \mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_n \alpha} + \delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_a \gamma} \right\rangle .$$

Мы определяем расслоение

$$\mathbb{K}(\mathbf{Z}_{2^{a-1}} \oplus \mathbf{Z}_{2^{b-1}}, 6) \xrightarrow{j_6'} \mathbb{X}_6' \xrightarrow{q_6'} \mathbb{X}_5$$

условием

$$c(q_6') = \left(\rho_{a-1}\zeta + \iota_{a-2}(\mathrm{Sq}^4 \overline{\delta_n \alpha} + \mathrm{Sq}^2 \overline{\delta_a \gamma})\ , \rho_{b-1}\delta_1 \mathrm{Sq}^2 \overline{\eta}\right) .$$

В силу леммы 6 (и п.1.4), трансгрессия $\tau_{q_6'}^7$ переводит стандартные образующие группы

$$H^7(\mathbb{K}_{a-1}(6) \times \mathbb{K}_{b-1}(6)) = \hat{\mathbf{Z}}_{2^{a-1}} \oplus \hat{\mathbf{Z}}_{2^{b-1}}$$

ответственно в $\delta_1(\mathrm{Sq}^4\overline{\delta_n\alpha}+\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma})$ и в 0; таким образом, гомоморфизм (55) становится (при переходе от $\mathbb{X}_5$ к $\mathbb{X}_6'$) снова мономорфизмом. Группа $\hat{\pi}_0$ из п.1.5 совпадает здесь с подгруппой

$$2\hat{\mathbf{Z}}_{2^{a-1}}\oplus\hat{\mathbf{Z}}_{2^{b-1}}\ ,$$

а соответственно проекция ρ — с

$$\rho_{a-2}\oplus\mathrm{id.}:\mathbf{Z}_{2^{a-1}}\oplus\mathbf{Z}_{2^{b-1}}\to\mathbf{Z}_{2^{a-2}}\oplus\mathbf{Z}_{2^{b-1}}\ .$$

Следовательно, мы имеем

$$\widetilde{c}(q_6')=(\rho_{a-2}\oplus\mathrm{id.})c(q_6')=(\rho_{a-2}\zeta,\rho_{b-1}\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\eta})$$

— то же, что $c(q_6')$ в предыдущем пункте. Дальнейшие рассуждения выглядят так же, как и там (с той разницей, что проверка равенства $f_5^*(c(q_6'))=0$ требует несколько более длинного вычисления). Мы получаем

$$\pi_6(\mathbb{T}_m\wedge K_n)=\pi_6(\mathbb{X}_6)=\mathbf{Z}_{2^n}^2\oplus\mathbf{Z}_{2^{a-1}}\oplus\mathbf{Z}_{2^{b-1}}\ ,$$

причем ввиду $a=b-1$ этот результат можно опять записать в том же виде как в п.2.7.

2.9. Разложение Постникова: шаг 6, случай $m>n=1$. В этом случае ядро гомоморфизма (55) снова тривиально (поскольку класс $\delta_1\mathrm{Sq}^2\overline{\delta_a\gamma}$ исчезает), и мы определяем $\mathbb{X}_6'$ посредством расслоения

$$\mathbb{K}_1(6)\to\mathbb{X}_6'\xrightarrow{q_6'}\mathbb{X}_5$$

с $c(q_6')=\mathrm{Sq}^3\overline{\eta}$. Дальнейшие рассуждения не отличаются от приведенных в п.2.7.

Литература

1. **Жубр А. В.** Вычисление групп спинорных бордизмов некоторых пространств Эйленберга-Маклейна// *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер. 1* . Вып. 1. 1995. С. 24–46.

2. **Жубр А. В.** Классификация односвязных шестимерных спинорных многообразий// *Известия АН СССР.Сер.мат.*. 1975. Т. 39. С. 839–859.

3. Zhubr A. V. Classification of simply-connected topological 6-manifolds// Lecture Notes in Math., Springer-Verlag. 1989. V. 1346. P. 325-339.

4. Жубр А. В. Классификация односвязных шестимерных многообразий// *Доклады АН СССР*. 1980. Т. 255. С. 1312–1315.

5. **Свитцер Р. М.** Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. М.: Наука, 1985. 608с.

6. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971. 680с.

7. **Стинрод Н., Эпстейн Д.** Когомологические операции. М.: Мир, 1983. 232с.

Summary

Zhubr A. V. Calculation of spin bordism groups of some Eilenberg-MacLane spaces, II

The calculation of some bordism groups which are related to the problem of classification of closed simply-connected 6-manifolds has been continued; proofs of the results announced in the first part are given.

Сыктывкарский университет

Поступила 29.03.96