*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996*

УДК 539.3

Определяющие уравнения в контактной задаче при изгибе пластины по теории Тимошенко [1]

Ю. И. Мартынов

В контактной задаче для цилиндрически изгибаемой пластины в условиях гипотезы Тимошенко получены уравнения для нахождения зоны контакта.

Рассмотрим контактную задачу об изгибе плоской пластины, расположенной на расстоянии $\Delta > 0$ от жестского основания. Пусть на краях $x = 0$ и $x = 2l$ выполнены условия типа шарнирного опирания, а другие края загружены так, что реализуется цилиндрический изгиб пластины.

Предположим, что пластина прогибается в сторону основания под действием внешней нагрузки с плотностью $q(x, y) \equiv q(x)$. В результате контакта возникает сила реакции основания на пластину с плотностью $-R(x)$. Таким образом, общая нормальная нагрузка на пластину составляет:

$$f(x) = q(x) - R(x). \tag{1}$$

Обозначим через $\theta(x)$ — угол отклонения нормального сечения от перпендикуляра к поверхности и через $w(x)$ — прогиб пластины, тогда разрешающие уравнения и граничные условия в условиях гипотезы Тимошенко [1] записываются следующим образом:

$$K\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} + \theta\right) = -f(x), \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = h_0\left(\frac{dw}{dx} + \theta\right), \tag{2}$$

где K, h_0 — положительные константы,

$$w(0) = w(2l) = 0, \qquad \theta'(0) = \theta'(2l) = 0. \tag{3}$$

[1]Студенческая работа. Представлена доц. А.А.Холоповым.

Предположим, что контакт происходит по интервалу $(x_0, 2l - y_0)$, т. е. $w(x) \equiv \Delta$ при $0 < x_0 < x < 2l - y_0 < 2l$. Из физического смысла очевидны условия

$$w(x) \le \Delta, \quad R(x) \ge 0, \quad R(x)(w(x) - \Delta) = 0\,. \tag{4}$$

Задача (2)–(4) является контактной задачей для цилиндрического изгиба пластины по Тимошенко.

Так как внешняя нагрузка $q(x)$ и реакция $R(x)$ могут содержать слагаемые вида $c_i\delta(x - x_i)$, где $\delta(x - x_i)$ — дельта-функция [2] с точкой сосредоточения x_i, то все уравнения, равенства и неравенства, в которые входят $q(x)$ и $R(x)$, следует понимать в обобщенном смысле.

Исключая $\theta(x)$ из (2) и (3), получаем

$$Kw^{(4)}(x) = h_0 f(x) - f''(x), \tag{5}$$

$$w(0) = w(2l) = 0, \quad Kw''(0) = -f(0), \quad Kw''(2l) = -f(2l). \tag{6}$$

Чтобы избавиться от неоднородности в граничных условиях (6), решение $w(x)$ будем искать в виде

$$w(x) = w_0(x) + v(x), \tag{7}$$

где

$$w_0(x) = \frac{f(0)(x^3 - 6lx^2 + 8l^2x) + f(2l)(-x^3 + 4l^2x)}{12Kl}, \tag{8}$$

а $v(x)$ — решение соответствующей однородной краевой задачи. Функция Грина для данной краевой задачи имеет вид

$$G(x,t) = (1/12Kl)\{H(x-t)[t^3(x-2l) + tx^2(x-6l)] +$$
$$+ H(t-x)[x^3(t-2l) + xt^2(t-6l)] + 8l^2tx\}\,,$$

где $H(\cdot)$ — функция Хевисайда. Зная функцию Грина, можно записать

$$v(x) = \int_0^{2l} G(x,t)(h_0 f(t) - f''(t))dt.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_1(x,y) = 0, \quad F_2(x,y) = 0, \tag{9}$$

где

$$F_1(x,y) = -Y_1(y)\sqrt{h_0}x^3 + [\sqrt{h_0}xX_1(x)\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(2l-x-y))+$$

$$+X_2(x)\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(2l-x-y))]y^2,$$

$$F_2(x,y) = Y_2(y)x^3 + [\sqrt{h_0}xX_1(x)\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(2l-x-y))+$$

$$+X_2(x)\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(2l-x-y))]y^3,$$

$$X_i(x) = 6K\Delta - \int\limits_0^x g_i(x)q(t)dt, \quad i=1,2,$$

$$Y_i(y) = 6K\Delta - \int\limits_0^y g_i(y)q(2l-t)dt, \quad i=1,2,$$

$$g_1(z) = t(6+h_0z^2-h_0t^2), \quad g_2(z) = t(6+3h_0z^2-h_0t^2).$$

Теорема. *Пусть $q(x) \in C^2[0,2l]$, тогда x_0, y_0, определяющие зону контакта, являются решением системы уравнений (9), и*

$$R(x) = H(x-x_0)H(2l-y_0-x)R_1(x), \tag{10}$$

где

$$R_1(x) = C_1\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(l-x)) + C_2\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(l-x)) + q(x),$$

$$C_1 = \frac{X_1(x_0)\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(l-x_0))}{2x_0^2} + \frac{X_2(x_0)\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(l-x_0))}{2\sqrt{h_0}x_0^3},$$

$$C_2 = -\frac{X_1(x_0)\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(l-x_0))}{2x_0^2} - \frac{X_2(x_0)\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(l-x_0))}{2\sqrt{h_0}x_0^3}.$$

Доказательство. Пусть $(x_0, 2l-y_0)$ — зона контакта, тогда $w(x) \equiv \Delta$, $x_0 < x < 2l-y_0$. Следовательно, из (5) получаем, что $f''(x) = h_0f(x)$ в этой зоне, т. е.

$$f(x) = -C_1\operatorname{ch}(\sqrt{h_0}(l-x)) - C_2\operatorname{sh}(\sqrt{h_0}(l-x)).$$

На основании (1), (4) имеем

$$R(x) = H(x-x_0)H(2l-y_0-x)R_1(x)+$$

$$+\alpha_1\delta(x-x_0) + \alpha_2\delta(x-2l+y_0), \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0. \tag{11}$$

Подставляя (11) в правую часть уравнения (5), получаем

$$v(x) = \int_0^{x_0} G(x,t)(h_0 q(t) - q''(t))dt + \int_{2l-y_0}^{2l} G(x,t)(h_0 q(t) - q''(t))dt -$$

$$-R_1(x_0)G_t(x,x_0) + (R_1'(x_0) - h_0\alpha_1)G(x,x_0) +$$

$$+R_1(2l-y_0)G_t(x,2l-y_0) - (R_1'(2l-y_0) + h_0\alpha_2)G(x,2l-y_0) +$$

$$+\alpha_1 G_{tt}(x,x_0) + \alpha_2 G_{tt}(x,2l-y_0). \qquad (12)$$

Из (7), (8), (12) видно, что $w(x)$ непрерывна. Непрерывность $w'(x)$ может нарушаться за счет слагаемых, содержащих $G_{tt}(x,t)$. Поэтому $w'(x_0+0) - w'(x_0-0) = (\alpha_1/K) \geq 0$. Так как $w'(x_0+0) = 0$, то $w'(x_0-0) \leq 0$. Но $w(x)$ в окрестности точки x_0 может лишь возрастать. Отсюда следует, что $\alpha_1 = 0$. Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = 0$. Таким образом, сосредоточенные нагрузки в реакции $-R(x)$ отсутствуют и $R(x)$ определяется по формуле (10).

Найдем x_0, y_0, C_1, C_2. Так как $w(x) \equiv \Delta$ в окрестности точки x и функции $w_0(x)$, $G(x,t)$, $G_t'(x,t)$ являются полиномами 3-ей степени от x, то приравнивая к нулю коэффициенты при x, x^2, x^3, и к Δ при x^0 у функции $w(x)$, получаем систему из 4-х уравнений относительно C_1, C_2, x_0, y_0. Выразив из них C_1, C_2, приходим к системе уравнений (9). *Теорема доказана.*

Литература

1. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкарский университет. Сыктывкар, 1995. 251с.

2. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320с.

Summary

Martynov Y. I. The determining equations in the contact problem for bending of plate on the theory of Timoshenko

The determining equations for the contact problem of cylindrical bending of plate in conditions of hypothesis of Timoshenko is obtained.

Сыктывкарский университет *Поступила 13.05.96*