Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 539.3

О ПОЛУДЕФОРМАЦИОННОМ ВАРИАНТЕ ГРАНИЧНЫХ ВЕЛИЧИН В ТЕОРИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН КАРМАНА [1]

Ермоленко А. В.

Дается альтернативный вывод полудеформационного варианта граничных величин, предложенного Е.И.Михайловским [1] для нелинейной теории гибких пластин Т.Кармана [2]. Используемые обозначения совпадают в основном с принятыми в монографии [1].

0. Система уравнений Кармана имеет вид

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = -\frac{1}{2}L(w,w),$$

$$D\Delta^2 w = q_n + L(\Phi, w). \tag{0.1}$$

Здесь w - прогиб (перемещение по нормали); Φ - функция напряжений; q_n - нормальная нагрузка; Е - модуль Юнга; h - толщина пластины; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^3)}$ - цилиндрическая жесткость; ν - коэффициент Пуассона;

$$L(u,v) = u_{,11}v_{,22} - 2u_{,12}v_{,12} + u_{,22}v_{,11}. \tag{0.2}$$

При этом предполагается, что граничные величины используются в следующем (кирхгофовском) варианте:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|} Q_{\nu\nu} & Q_{\nu t} & Q_{\nu n} & M_{\nu\nu} \\ \hline u_\nu & u_t & w & -w_{,\nu} \end{array}\right., \tag{0.3}$$

где

$$Q_{\nu\nu} = \Phi_{,tt} + \rho_t\Phi_{,\nu}, \quad Q_{\nu t} = -\Phi_{,\nu t} + \rho_t\Phi_{,t},$$

[1] Студенческая работа. Представлена проф. Е.И.Михайловским.

$$Q_{\nu n} = -D(\Delta w)_{,\nu} + Q_{\nu\nu} w_{,\nu} + Q_{\nu t} w_{,t} + M_{\nu t,t},$$

$$M_{\nu t} = -(1-\nu)D(w_{,\nu t} - \frac{1}{2}\rho_\nu w_{,\nu} - \frac{1}{2}\rho_t w_{,t}),$$

$$M_{\nu\nu} = -D(w_{,\nu\nu} + \nu w_{,tt} + \rho_\nu w_{,t} + \nu \rho_t w_{,\nu}),$$

$$(\rho_t = \gamma_{,t} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial s_t}, \quad \rho_\nu = -\gamma_{,\nu} \equiv -\frac{\partial \gamma}{\partial s_\nu}). \tag{0.3'}$$

Таким образом, через основные искомые функции w и Φ выражаются все граничные величины, за исключением тангенциальных смещений u_ν и u_t. Если граничные условия краевой задачи записываются в терминах этих величин (например, в случае жестко защемленного края), то кроме уравнений (0.1) приходится интегрировать систему

$$u_{1,1} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}) - \frac{1}{2}w_{,1}^2,$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,11} - \nu\Phi_{,22}) - \frac{1}{2}w_{,2}^2,$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}\Phi_{,12} - w_{,1}w_{,2}. \tag{0.4}$$

Иными словами, при использовании традиционного варианта граничных величин (0.3) уравнения (0.1) *не являются разрешающими.*

Е.И.Михайловским в работе [1] предложен т.н. полудеформационный вариант граничных величин

B_n	F_t	$Q_{\nu n}$	$M_{\nu\nu}$
κ_{tn}	$-\varepsilon_{tt}$	w	$-w_{,\nu}$

, (0.5)

где

$$F_t = -\Phi_{,\nu}, \; B_n = \Phi,$$

$$\varepsilon_{tt} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,\nu\nu} - \nu\Phi_{,tt} + \rho_\nu \Phi_{,t} - \nu\rho_t\Phi_{,\nu}) - \frac{1}{2}w_{,t}^2,$$

$$-\kappa_{tn} = \frac{1}{Eh}(\Delta\Phi)_{,\nu} + \frac{1+\nu}{Eh}[(\Phi_{,tt} + \rho_t\Phi_{,\nu})_{,\nu} +$$

$$+(\Phi_{,tt} - \Phi_{,\nu\nu} + \rho_t\Phi_{,\nu})\rho_t - (2\Phi_{,\nu t} - \rho_t\Phi_{,t})\rho_\nu] +$$

$$+w_{,\nu}w_{,tt} + \frac{1}{2}(w_{,\nu}^2 + w_{,t}^2)\rho_t. \tag{0.5'}$$

Очевидно, что использование варианта граничных величин (0.5), (0.5′) делает систему уравнений (0.1) разрешающей.

Полудеформационный вариант граничных величин получен с использованиём интегрирования по частям в контурном интеграле вариационного уравнения Лагранжа в предположении, что область срединной поверхности пластины является односвязной. (В случае многосвязной области следует кроме (0.5), (0.5′) рассматривать условия однозначности тангенциальных перемещений [3].)

В данной работе дается альтернативный вывод полудеформационного варианта граничных величин комбинированным методом, основанным как на использовании вариационного уравнения Лагранжа, так и условий равновесия трехмерного тела. Такой подход может оказаться более предпочтительным при построении уточненных теорий, например, типа Кармана-Тимошенко.

1. Для описания деформации срединной поверхности вместо компонент тензора Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

используются компоненты тензора Грина

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}u_{\alpha,i}u_{\alpha,j}, \quad i,j = 1,2. \tag{1.1}$$

(По дважды повторяющемуся в одночлене индексу следует суммировать: греческому от 1-го до 3-х, латинскому от 1-го до 2-х.)

При этом в формулах (1.1) из нелинейных слагаемых учитываются лишь те, что связаны с нормальным перемещением (прогибом) $u_3 \equiv w$ согласно оценке

$$u_{i,j} \sim w_{,i}w_{,j}. \tag{1.2}$$

Это приводит к следующим приближенным соотношениям:

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j}, \quad i,j = 1,2. \tag{1.3}$$

Если пластина является тонкой, можно допустить, что функция w^ξ не зависит от трансверсальной координаты ($w^\xi = w(x_1, x_2)$), и что точки в параллельных срединной плоскостях получают дополнительное перемещение

$$u_i^\xi - u_i = -\xi w_{,i}, \quad i = 1,2. \tag{1.4}$$

Окончательно приходим к следующим формулам для тангенциальных деформаций пластины:

$$\gamma_{ij}^{\xi} = e_{ij} + \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j} - \xi w_{,ij}, \quad i,j = 1,2. \tag{1.5}$$

Что касается трансверсальных деформаций, то они определяются по линейной теории ($\gamma_{i3}^{\xi} = e_{ij}^{\xi}$) и при сделанных допущениях обращаются в нуль ($e_{i3}^{\xi} = 0,\ i = 1,2,3$), т.е. выполняется т.н. геометрическая гипотеза Кирхгофа.

Для получения определяющих уравнений используем упругий потенциал стандартного материала второго порядка, считая, что рассматриваются гибкие пластины из жесткого сжимаемого материала. Если при этом допустить, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной плоскости, пренебрежительно малы по сравнению с напряжениями в вертикальных сечениях (т.н. статическая гипотеза Кирхгофа), то первый инвариант тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа можно определить по приближенной формуле

$$\sigma^{\xi} = \sigma_{\alpha\alpha}^{\xi} \approx \sigma_{11}^{\xi} + \sigma_{22}^{\xi}.$$

Окончательно, предполагая, что деформации малы, а большие перемещения реализуются за счет конечных углов поворота, соотношения упругости принимаем в следующем виде:

$$\sigma_{11}^{\xi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11}^{\xi} + \nu\gamma_{22}^{\xi}) = \frac{E}{1-\nu^2}(u_{1,1} + \nu u_{2,2} +$$
$$+\frac{1}{2}w_{,1}^2 + \frac{\nu}{2}w_{,2}^2) - \frac{E\xi}{1-\nu^2}(w_{,11}^2 + \nu w_{,22}^2),$$
$$\sigma_{22}^{\xi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{22}^{\xi} + \nu\gamma_{11}^{\xi}) = \frac{E}{1-\nu^2}(u_{2,2} + \nu u_{1,1} +$$
$$+\frac{1}{2}w_{,2}^2 + \frac{\nu}{2}w_{,1}^2) - \frac{E\xi}{1-\nu^2}(w_{,22}^2 + \nu w_{,11}^2),$$
$$\sigma_{12}^{\xi} = 2\mu\gamma_{12}^{\xi} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2} - 2\xi\mu w_{,12}), \tag{1.6}$$

(Здесь E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига.)

Вводя обозначения ($i,j = 1,2$)

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{\xi} d\xi, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{\xi}\xi d\xi, \tag{1.7}$$

на основании (1.6) имеем

$$T_{11} = B(u_{1,1} + \nu u_{2,2}) + \frac{1}{2}B(w_{,1}^2 + w_{,2}^2),$$

$$T_{22} = B(u_{2,2} + \nu u_{1,1}) + \frac{1}{2}B(w_{,2}^2 + w_{,1}^2),$$

$$T_{12} = \frac{1}{2}(1 - \nu)B(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2}),$$

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}),$$

$$M_{12} = -(1 - \nu)Dw_{,12}, \tag{1.8}$$

где

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \tag{1.8$'$}$$

Для вывода уравнений равновесия жестко-гибкой пластины примем следующие допущения:

i) объемными силами можно пренебречь;

ii) по лицевым поверхностям на пластину действует лишь нормальная нагрузка

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \text{ где } q_n^+ = \sigma_{33}^{\xi}(h/2), \quad q_n^- = \sigma_{33}^{\xi}(-h/2);$$

iii) боковая поверхность пластины свободна от нагрузки.

Вариационное уравнение Лагранжа имеет вид

$$\int_{\Omega} (T_{ij}\delta\gamma_{ij} + M_{ij}\delta\kappa_{ij} - q_n\delta w)d\Omega = 0, \tag{1.9}$$

где $\kappa_{ij} = -w_{,ij}$, Ω - односвязная область срединной плоскости пластины.

Естественно, при этом должны выполнятся трехмерные уравнения равновесия, имеющие вид

$$\sigma_{i\alpha,\alpha}^{\xi} = 0, \ i = 1, 2, 3. \tag{1.10}$$

Интегрируя первые два из этих уравнений по толщине пластины, с учетом обозначений (1.7) и допущения ii), получим

$$T_{ij,j} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Равенства (1.11) будут выполнены, если ввести функцию напряжения Φ так:

$$T_{11} = \Phi_{,22}, \quad T_{22} = \Phi_{,11}, \quad T_{12} = -\Phi_{,12}. \tag{1.12}$$

Соотношениям (1.5) можно придать вид

$$\gamma_{ij}^{\xi} - \frac{1}{2} w_{,i} w_{,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{\xi} + u_{j,i}^{\xi}) \equiv e_{ij}^{\xi}. \tag{1.13}$$

Нетрудно проверить, что величины e_{ij}^{ξ}, $i,j = 1,2$ удовлетворяют уравнению

$$e_{11,22}^{\xi} + e_{22,11}^{\xi} - 2e_{12,12}^{\xi} = 0, \tag{1.14}$$

которое на основании (1.13) можно записать так:

$$\gamma_{11,22}^{\xi} + \gamma_{22,11}^{\xi} - 2\gamma_{12,12}^{\xi} = w_{,12}^{2} - w_{11} w_{22}. \tag{1.15}$$

Разрешая далее уравнения (1.6) относительно γ_{ij}^{ξ} и учитывая соотношения (1.8), (1.12), получим

$$\gamma_{11}^{\xi} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}) - \xi w_{,11},$$

$$\gamma_{22}^{\xi} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,11} - \nu\Phi_{,22}) - \xi w_{,22},$$

$$\gamma_{12}^{\xi} = -\frac{1+\nu}{Eh}\Phi_{,12} - \xi w_{,12}. \tag{1.16}$$

Уравнения (1.15), (1.16) совместны относительно γ_{ij}^{ξ}, если выполняется равенство

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = w_{,12}^{2} - w_{,11} w_{,22} \tag{1.17}$$

или в вариационной форме

$$\delta(\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi - w_{,12}^{2} + w_{,11} w_{,22}) = 0. \tag{1.17$'$}$$

Умножая (1.17′) на множитель Лагранжа $\lambda(x_1, x_2)$, интегрируя по области Ω и складывая с (1.9), получим вариационное уравнение

$$\int_{\Omega} (T_{ij}\delta\gamma_{ij} + M_{ij}\delta\kappa_{ij} - q_n\delta w +$$

$$+\lambda\delta(\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi - w_{,12}^{2} + w_{,11} w_{,22}))d\Omega = 0. \tag{1.18}$$

Применяя интегрирование по частям и переходя на границе к производной по нормали, после довольно громоздких выкладок уравнение (1.18) приводим к следующему виду:

$$\int_\Omega \frac{1}{Eh}\Delta^2(\Phi+\lambda)\delta\Phi d\Omega + \int_\Omega \big(D\Delta^2 w - q_n + L(w,\lambda)\big)\delta w d\Omega +$$

$$+\int_{\partial\Omega}(\Phi\delta\kappa_{tn} + \Phi_{,\nu}\delta\varepsilon_{tt} + Q_{\nu n}\delta w - M_{\nu\nu}\delta w_{,\nu})ds_t = 0, \tag{1.19}$$

где ε_{tt}, κ_{tn} и $Q_{\nu n}$, $M_{\nu\nu}$ определяются соответственно формулами $(0.3')$ и $(0.5')$.

Технология преобразования контурного интеграла заключалась в том, что формировались четыре группы слагаемых с коэффициентами $\Phi, \Phi_{,\nu}, \delta w, \delta w_{,\nu}$. При этом учитывались следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial s_\nu} = \nu_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial s_t} = t_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \nu_i = \boldsymbol{\nu}\cdot \mathbf{e}_i, \quad t_j = \mathbf{t}\cdot\mathbf{e}_j,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_\nu\partial s_t} - \rho_t\frac{\partial\Phi}{\partial s_t} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_t\partial s_\nu} - \rho_\nu\frac{\partial\Phi}{\partial s_\nu},$$

$$\Delta(\;) = \frac{\partial^2(\;)}{\partial s_\nu^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial s_t^2} + \rho_t\frac{\partial(\;)}{\partial s_\nu} + \rho_\nu\frac{\partial(\;)}{\partial s_t},$$

$$\boldsymbol{\nu}_{,t} = \rho_t\mathbf{t}, \quad \mathbf{t}_{,t} = -\rho_t\boldsymbol{\nu}.$$

Из первого интеграла в уравнении (1.19) с учетом положительности бигармонического оператора следует, что

$$\lambda = -\Phi. \tag{1.20}$$

Из второго интеграла, используя (1.20), имеем

$$D\Delta^2 w = q_n + L(w,\Phi). \tag{1.21}$$

Таким образом, вновь приходим к системе уравнений Кармана ((1.17), (1.21)) с граничными условиями в виде (0.5).

Литература

1. **Михайловский Е.И., Торопов А.В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1995. 251с.

2. **Karman Th.** Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV Teilband IV. 1910. S.349.

3. **Михайловский Е.И.,Черных К.Ф.** О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. N2. С. 155-162.

Summary

Ermolenko A. V. On the semideformational variant of the boundary values in Karman's theory of the flexible plates.

Alternative approach to the semideformational variant of the boundary values suggested by E.I.Mikhailovskii [1] is modified for non-linear Karman's theory of the flexible plates.

Сыктывкарский университет *Поступила 19.04.96*