Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 536.46

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В ГАЗАХ

В. М. Холопов, С. И. Худяев

Особенностью асимптотики волны горения газов даже в предположении равенства единице числа Льюиса (Lewis) является наличие второго погранслоя в зоне горения.

Введение. Построение асимптотики стационарной волны горения газов по большой энергии активации было начато в работе [1], где рассматривалась одностадийная реакция первого порядка. Дальнейшие работы показали существенную роль в конструкции асимптотики таких параметров, как порядок реакции n и число Льюиса L. По поводу особого случая $L = 0$ (отсутствие диффузии реагента, характерное для конденсированных сред) можно обратиться к [2, 3] и приводимой там литературе. В работе [4] предпринята попытка рассмотреть произвольные $n > 0$ и $L = O(1)$. Однако, как было отмечено в [2], составные решения неявно содержат ограничение $n \leqslant 1$. В работе [3] при $L = 0$ такое ограничение удалось снять путем построения второго погранслоя в зоне горения. В настоящей работе показано, что при $L = 1$ второй погранслой в зоне горения оказывается необходимым элементом конструкции асимптотики для $n > 1$.

1. Основное уравнение. Внешнее решение. Задача о распространении стационарной волны горения в газах в случае одностадийной необратимой экзотермической реакции n-го порядка в предположении аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры и в условиях подобия полей концентраций и температур описывается дифференциальным уравнением первого порядка [2]:

$$\frac{dp}{dt} + 1 = \frac{t^n}{\omega p \gamma^{n+1}} \exp\left(-\frac{t}{\gamma(1-\mu t)}\right), \quad p(0) = p(1) = 0, \qquad (1)$$

связывающим безразмерный поток тепла p и безразмерную относительную температуру t. Безразмерные переменные и параметры определяются формулами

$$t = \frac{T_* - T}{T_* - T_0},\ p(t) = \frac{\lambda T'}{Qm},\ \gamma = \frac{RT_*^2 c}{QE},\ \mu = \frac{T_* - T_0}{T_*},\ \omega = \frac{m^2 c}{\gamma^{n+1}\lambda k(T_*)}, \quad (2)$$

где $T_* = T_0 + \dfrac{Q}{c}$ – температура горения (температура полностью прореагировавшего вещества), T_0 – начальная температура, Q – тепловой эффект реакции, λ – коэффициент теплопроводности, c – теплоемкость, E – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, m – искомая массовая скорость горения, аррениусова функция $k(T) = k_0 \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)$ – задает температурную зависимость скорости химической реакции, k_0 – предэкспоненциальный фактор. Кроме неизвестной функции $p(t)$ в уравнении (1) искомой величиной является также безразмерная скорость горения ω. Наличие лишнего граничного условия позволяет, в принципе, ее определить.

Параметр γ, имеющий смысл относительной ширины зоны реакции, предполагается малым, что согласуется с представлениями о фронте пламени. Именно по этому параметру будет строиться асимптотика решения (1). Параметр μ, как видно из (2), ограничен $0 < \mu < 1$. Еще один существенный парамер, входящий в уравнение (1), – порядок реакции n. Для $0 \leqslant n \leqslant 1$ асимптотика построена в [2]. В этой же работе показано, что при $n > 1$ предложенная конструкция не является асимптотикой решения уравнения (1).

В настоящей работе строится асимптотика решения (1). Как всегда, при рассмотрении стационарной задачи горения требуется оговорка. Задача (1), строго говоря, не имеет решения (см. особенность при $t = 1$). Стационарная волна имеет смысл временной "промежуточной" асимптотики [5], которая, строго говоря, должна строиться одновременно с намеченной асимптотикой по γ. Однако (см. [5]) роль малого параметра в асимптотике по времени играет величина порядка $\exp(-\gamma^{-1})$, и при построении степенных асимптотик по γ она не сказывается.

Правая часть уравнения (1) сосредоточена в малой окрестности точки $t = 0$ и экспоненциально мала при $\gamma \to 0$ вне этой окрестности. Поэтому для построения асимптотики решения можно применить метод сращивания асимптотических разложений [6], построенных вне вышеупомянутой окрестности точки $t = 0$ (внешнее решение) и внутри нее (внутреннее решение). Устремляя γ к нулю в (1) и учитывая условие $p(1) = 0$, находим внешнее решение

$$\overline{p}(t) = 1 - t. \tag{3}$$

2. Первый погранслой. Для построения внутреннего решения перейдем в окрестности точки $t = 0$ к новой переменной $\tau = \dfrac{t}{\gamma}$. При этом уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dp}{d\tau} + \gamma = \frac{\tau^n}{p\omega} \exp\left(-\frac{\tau}{1 - \mu\gamma\tau}\right), \quad p(0) = 0. \tag{4}$$

Однако построение одного "погранслоя" в окрестности $t = 0$ относительно $\tau = \dfrac{t}{\gamma}$, $p = p(\tau)$ и сращивание его с внешним решением позволяет получить правильную асимптотику лишь при $n \leqslant 1$ [2]. При $n > 1$ такое построение становится невозможным. Уже в этой простейшей модели горения при $n > 1$ необходимым элементом асимптотики оказывается второй погранслой в окрестности $\tau = 0$ относительно переменных

$$\xi = \frac{\tau}{\gamma^\alpha}, \quad q = \frac{p}{\gamma^{1+\alpha}}, \quad \alpha = \frac{2}{n-1}, \tag{5}$$

в которых уравнение (4) переходит в уравнение

$$\frac{dq}{d\xi} + 1 = \frac{\xi^n}{\omega q} \exp\left(-\frac{\xi\gamma^\alpha}{1 - \mu\xi\gamma^{1+\alpha}}\right), \quad q(0) = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (6) видно, что асимптотику для ω и q, а следовательно и для p, следует искать в виде разложений по степеням γ вида $l + k\alpha$, где l, k – целые неотрицательные числа:

$$\begin{gathered}
\omega = \omega_0 + \omega_{10}\gamma + \omega_{01}\gamma^\alpha + \omega_{20}\gamma^2 + \omega_{11}\gamma^{1+\alpha} + \omega_{02}\gamma^{2\alpha} + \ldots, \\
q = q_0 + q_{10}\gamma + q_{01}\gamma^\alpha + q_{20}\gamma^2 + q_{11}\gamma^{1+\alpha} + q_{02}\gamma^{2\alpha} + \ldots, \\
p = p_0 + p_{10}\gamma + p_{01}\gamma^\alpha + p_{20}\gamma^2 + p_{11}\gamma^{1+\alpha} + p_{02}\gamma^{2\alpha} + \ldots.
\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя разложения (7) в уравнение (4), для определения коэффициентов разложения внутреннего решения $p(\tau)$ получим уравнения:

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{\tau^n e^{-\tau}}{\omega_0 p_0}, \quad p_0(0) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{dp_{10}}{d\tau}+1=-\frac{dp_0}{d\tau}\Big(\frac{\omega_{10}}{\omega_0}+\frac{p_{10}}{p_0}+\mu\tau^2\Big),\quad p_{10}(0)=0, \tag{9}$$

$$\frac{dp_{01}}{d\tau}=-\frac{dp_0}{d\tau}\Big(\frac{\omega_{01}}{\omega_0}+\frac{p_{01}}{p_0}\Big),\quad p_{01}(0)=0. \tag{10}$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$p_0(\tau)=\Big(\frac{2}{\omega_0}\int\limits_0^\tau s^n e^{-s}ds\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$p_{10}=-\frac{1}{p_0}\int\limits_0^\tau p_0(s)ds-\frac{\omega_{10}}{2\omega_0}p_0(\tau)-\frac{\mu}{2\omega_0 p_0}\int\limits_0^\tau s^{n+2}e^{-s}ds, \tag{12}$$

$$p_{01}=-\frac{\omega_{01}}{2\omega_0}p_0(\tau). \tag{13}$$

В дальнейшем, для сращивания первого внутреннего решения со вторым, нам потребуется асимптотика полученных выше коэффициентов p_0, p_{10} и p_{01}, при $\tau\to 0$. Опуская несложные вычисления, выпишем результат.

$$p_0=\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+$$

$$+\frac{(n+1)(n^2+4n+5)}{8(n+2)^2(n+3)}\tau^2+\ldots\Big), \tag{14}$$

$$p_{10}=-\frac{2}{n+3}\tau\Big(1+\frac{n+1}{2(n+2)(n+5)}\tau+$$

$$+\frac{(n+1)(n^2-2n-19)}{2(n+2)^2(n+3)(n+5)(n+7)}\tau^2+\ldots\Big)-$$

$$-\frac{\omega_{10}}{2\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+\frac{(n+1)(n^2+4n+5)}{8(n+2)^2(n+3)}\tau^2+\ldots\Big)-$$

$$-\frac{\mu}{2(n+3)}\sqrt{\frac{\omega_0(n+1)}{2}}\tau^{\frac{n+5}{2}}\Big(1-\frac{(n^2+5n+8)}{2(n+2)(n+4)}\tau+\ldots\Big), \tag{15}$$

$$p_{01}=-\frac{\omega_{01}}{2\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+$$

$$+\frac{(n+1)(n^2+4n+5)}{8(n+2)^2(n+3)}\tau^2+\ldots\Big). \qquad (16)$$

3. Второй погранслой. Для построения второго внутреннего решения подставим разложения (7) в уравнение (6). Раскладывая правую часть уравнения по γ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях γ, получим уравнения для определения коэффициентов q_0, q_{10}, q_{01} разложения второго внутреннего решения

$$\frac{dq_0}{d\xi}+1=\frac{\xi^n}{\omega_0 q_0}, \quad q_0(0)=0, \qquad (17)$$

$$\omega_0\frac{dq_{10}}{d\xi}+\frac{\xi^n}{q_0^2}q_{10}=-\omega_{10}\Big(\frac{dq_0}{d\xi}+1\Big), \quad q_{10}(0)=0, \qquad (18)$$

$$\omega_0\frac{dq_{01}}{d\xi}+\frac{\xi^n}{q_0^2}q_{01}=-\omega_{10}\Big(\frac{dq_0}{d\xi}+1\Big)-\frac{\xi^{n+1}}{q_0}, \quad q_{01}(0)=0, \qquad (19)$$

Уравнение (17) не интегрируется в квадратурах, и для его решения необходимо использовать приближенные методы, а уравнения (18) и (19) являются линейными, и их интегрирование при известной q_0 не составляет труда.

Для согласования с первым внутренним решением $p(\tau)$ необходимо найти асимптотику q_0, q_{10}, q_{01} при $\xi\to\infty$. Подставив $q_0=C\xi^k$ в уравнение (17), найдем $k=\dfrac{n+1}{2}=1+\dfrac{1}{\alpha}$, $\quad C=\sqrt{\dfrac{2}{\omega_0(n+1)}}$, т.е. главный член асимптотики q_0 имеет вид $\sqrt{\dfrac{2}{\omega_0(n+1)}}\,\xi^{1+\frac{1}{\alpha}}$. Дальнейшие члены можно найти методом неопределенных коэффициентов

$$q_0=C\xi^{1+\frac{1}{\alpha}}(1+a_{10}\xi^{-1}+a_{01}\xi^{-\frac{1}{\alpha}}+a_{20}\xi^{-2}+a_{11}\xi^{-1-\frac{1}{\alpha}}+a_{02}\xi^{-\frac{2}{\alpha}}+\ldots). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (17) и определяя коэффициенты a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, получим асимптотику q_0 при $\xi\to\infty$

$$q_0=C\xi^{1+\frac{1}{\alpha}}\Big(1-\frac{\alpha}{C(2\alpha+1)}\xi^{-\frac{1}{\alpha}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2C^2(2\alpha+1)^2}\xi^{-\frac{2}{\alpha}}+\ldots\Big), \qquad (21)$$

Аналогично находим асимптотики q_{10} и q_{01} при $\xi\to\infty$.

$$q_{10}=-C^3\omega_{10}\frac{\alpha+1}{2\alpha}\xi^{1+\frac{1}{\alpha}}\Big(1-\frac{\alpha(\alpha+1)^2}{2C^2(2\alpha+1)^2}\xi^{-\frac{2}{\alpha}}+\ldots\Big), \qquad (22)$$

$$q_{01} = -C\frac{\alpha+1}{3\alpha+2}\xi^{2+\frac{1}{\alpha}}\Big(1+\frac{\alpha^2}{C(2\alpha+1)(3\alpha+1)}\xi^{\frac{1}{\alpha}}-$$

$$-C^2\frac{\omega_{01}(3\alpha+2)}{2\alpha}\xi^{-1}+\ldots\Big). \qquad (23)$$

Здесь выписаны лишь те члены асимптотики, которые будут участвовать в сращивании.

Подставляя во вторую из формул (5) разложение для q (7) и возвращаясь к переменной τ, получим функцию

$$\widetilde{p}(\tau) = \gamma^{1+\alpha}q_0\Big(\frac{\tau}{\gamma^\alpha}\Big)+\gamma^{2+\alpha}q_{10}\Big(\frac{\tau}{\gamma^\alpha}\Big)+\gamma^{1+2\alpha}q_{10}\Big(\frac{\tau}{\gamma^\alpha}\Big)+\ldots \qquad (24)$$

Заменим здесь q_0, q_{10}, q_{01} на асимптотики (21)-(23) и перегруппируем слагаемые, расположив их по соответствующим степеням γ.

$$\widetilde{p}(\tau) = C\tau^{1+\frac{1}{\alpha}}\Big(1-\frac{\alpha+1}{3\alpha+2}\tau\Big)-\gamma\Big(\frac{\alpha}{2\alpha+1}\tau\Big(1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{(3\alpha+1)(3\alpha+2)}\tau^2\Big)-$$

$$-\omega_{10}C^3\frac{\alpha+1}{2\alpha}\tau^{1+\frac{1}{\alpha}}\Big)+\gamma^\alpha C^3\omega_{01}\frac{\alpha+1}{2\alpha}\tau^{1+\frac{1}{\alpha}}. \qquad (25)$$

Эта формула должна быть согласована с разложением (7) для $p(\tau)$, коэффициенты которого заменяются их асимптотиками (14)-(16):

$$p(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+$$

$$+\frac{(n+1)(n^2+4n+5)}{8(n+2)^2(n+3)}\tau^2+\ldots\Big)-$$

$$-\gamma\Big(\frac{2}{n+3}\tau\Big(1+\frac{n+1}{(n+2)(n+5)}\tau+$$

$$+\frac{(n+1)(n^2-2n-19)}{2(n+2)^2(n+3)(n+5)(n+7)}\tau^2+\ldots\Big)-$$

$$-\frac{\omega_{10}}{2\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+\ldots\Big)-$$

$$-\frac{\mu}{2(n+3)}\sqrt{\frac{\omega_0(n+1)}{2}}\tau^{\frac{n+5}{2}}+\ldots\Big)-$$

$$-\gamma^{\alpha}\frac{\omega_{01}}{2\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau+\ldots\Big). \tag{26}$$

Вспоминая, что $C=\sqrt{\dfrac{2}{\omega_0(n+1)}}$, $\alpha=\dfrac{2}{n-1}$, видим, что в разложениях (25) и (26) у коэффициентов при $\gamma^0,\gamma^1,\gamma^{\alpha}$ старшие члены совпадают. Именно в этом смысле и понимается согласование, т.е. возможность сращивания.

Асимптотика составного решения уравнения (4) будет иметь вид:

$$\widehat{p}(\tau)=\Big(\frac{2}{\omega_0}\int\limits_0^{\tau}s^ne^{-s}ds\Big)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{n+1}{2(n+2)}\tau\Big)-$$

$$-\gamma\Big(\frac{1}{p_0}\int\limits_0^{\tau}p_0(s)ds-\frac{\omega_{10}}{2\omega_0}p_0(\tau)-\frac{\mu}{2p_0}\int\limits_0^{\tau}s^{n+2}e^{-s}ds-$$

$$-\frac{2}{n+3}\tau\Big(1+\frac{n+1}{(n+2)(n+5)}\tau\Big)-\frac{\omega_{10}}{2\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big)-$$

$$-\gamma^{\alpha}\frac{\omega_{01}}{2\omega_0}\Big(p_0(\tau)+2\sqrt{\frac{2}{\omega_0(n+1)}}\tau^{\frac{n+1}{2}}\Big)+$$

$$+\gamma^{1+\alpha}\Big(q_0\Big(\frac{\tau}{\gamma^{\alpha}}\Big)+\gamma q_{10}\Big(\frac{\tau}{\gamma^{\alpha}}\Big)+\gamma^{\alpha}q_{01}\Big(\frac{\tau}{\gamma^{\alpha}}\Big)\Big)+$$

$$+O(\gamma^2+\gamma^{1+\alpha}+\gamma^{2\alpha}). \tag{27}$$

3. Асимптотика скорости. Поскольку первое и второе внутренние решения согласуются при любых ω_0,ω_{10} и ω_{01}, то эти величины могут быть найдены из условия сращивания внешнего решения (3) с внутренним решением

$$\underline{p}(\tau)=p_0(\tau)+\gamma p_{10}(\tau)+\gamma^{\alpha}p_{01}(\tau), \tag{28}$$

где p_0,p_{10},p_{01} определяются формулами (11)-(13). Условие сращивания имеет вид $\overline{p}(0)=\underline{p}(\infty)$, что для коэффициентов p_0,p_{10},p_{01} дает

$$p_0=1,\quad p_{10}\sim-\tau,\quad p_{lk}=0,\quad (k\neq0)\ \text{ при }\ \tau\to\infty. \tag{29}$$

Из формул (11)-(13) с учетом (29) находим коэффициенты разложения безразмерной скорости ω :

$$\omega_0=2\Gamma(n+1), \tag{30}$$

$$\omega_{10} = 2\Big(\omega_0 \int\limits_0^{+\infty} (1 - p_0(s))ds - \mu\Gamma(n+3)\Big), \qquad (31)$$

$$\omega_{01} = 0, \qquad (32)$$

где $\Gamma(n) = \int\limits_0^{+\infty} s^{n-1} e^{-s} ds$ – гамма-функция Эйлера. Так как $\omega_{01} = 0$, то из (13) имеем $p_{01} = 0$.

Чтобы отметить особенность асимптотики скорости горения, выпишем уравнения для коэффициентов p_{11} и p_{02}

$$\frac{dp_{11}}{d\tau} = -\frac{dp_0}{d\tau}\Big(\frac{2\omega_{10}\omega_{01} - \omega_{11}\omega_0}{\omega_0^2} + \frac{2p_{10}p_{01} - p_{11}p_0}{p_0^2} +$$

$$+\frac{\omega_{10}p_{01}}{\omega_0 p_0} + \frac{\omega_{01}p_{10}}{\omega_0 p_0} + \frac{\omega_{01}}{\omega_0}\mu\tau^2 + \frac{p_{01}}{p_0}\mu\tau^2\Big), \quad p_{11}(0) = 0, \qquad (33)$$

$$\frac{dp_{02}}{d\tau} = -\frac{dp_0}{d\tau}\Big(\frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}\omega_0}{\omega_0^2} + \frac{p_{01}^2 - p_{02}p_0}{p_0^2} + + \frac{\omega_{01}p_{01}}{\omega_0 p_0}\Big), \quad p_{11}(0) = 0, \quad (34)$$

интегрируя которые и учитывая, что $\omega_{01} = 0$ и $p_{01} = 0$, получим

$$p_{11} = -\frac{\omega_{11}}{2\omega_0} p_0(\tau). \qquad (35),$$

$$p_{02} = -\frac{\omega_{02}}{2\omega_0} p_0(\tau). \qquad (36).$$

Откуда, с учетом условий сращивания (29), получаем $\omega_{11} = 0$, $p_{11} = 0$, $\omega_{02} = 0$, $p_{02} = 0$. Аналогично, нетрудно показать, что вообще $\omega_{lk} = 0$, $p_{lk} = 0$ при $k \neq 0$. Поэтому асимптотика скорости будет содержать лишь целые степени γ.

Итак, асимптотика безразмерной скорости ω имеет вид

$$\omega = 2\Gamma(n+1) + 2\gamma\Big(2\Gamma(n+1) \int\limits_0^{+\infty} (1 - p_0(s))ds - \mu\Gamma(n+3)\Big) + O(\gamma^2), \quad (37)$$

где $p_0(s)$ – определяется формулой (11). Используя последнюю из формул (2), получаем асимптотику массовой скорости горения

$$m^2 = \frac{\gamma^{n+1}\lambda k(T_*)}{c}\Big(2\Gamma(n+1) + 2\gamma\Big(2\Gamma(n+1) \int\limits_0^{+\infty} (1 - p_0(s))ds -$$

$$-\mu\Gamma(n+3)) + O(\gamma^2)\Big). \tag{38}$$

Составное решение уравнения (1)

$$p(t) = \widehat{p}\Big(\frac{t}{\gamma}\Big), \tag{39}$$

где $\widehat{p}$ задается формулой (27).

Разложение (37) допускает предельный переход при $n \to 1$. С учетом численного значения интеграла имеем

$$\omega = 2(1 + 6\gamma(0{,}448\ldots - \mu)) + O(\gamma^2). \tag{40}$$

Поправка порядка γ может принимать значения разных знаков в зависимости от μ, $0 < \mu < 1$.

Асимптотика скорости (33), вообще говоря, ухудшается с ростом n.

Литература

1. **Bush W. B., Fendell F. E.** Asymptotic Analysis of Laminar Flame propagation for General Lewis Nambers// *Comb. Sci. and Technology.* 1970.V.1.P.421-428.

2. **Худяев С. И.** К асимптотической теории стационарной волны горения // *Хим. физика.* 1987.Т.6.№ 5.С.681-691.

3. **Ильин А. М., Худяев С. И.** Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде // *Хим. физика.* 1989. Т.8.№ 4.С. 525-532.

4. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений // *ПММ.* 1972. Т.36.С.659-666.

5. **Худяев С. И.** К математической теории распространения пламени // *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.* Вып.1.1995.С.234-243.

6. **Найфе А.Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Summary

Kholopov V. M., Khudyaev S. I. To Asymptotic Theory of Combustion Wave in Gases

Peculiarity of asymptotic of combustion wave in gases even if Lewis number equality to 1 is presented is the second boundary layer in zone of combustion.

Сыктывкарский университет *Поступила 26.03.96*