*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996*

УДК 521.1

Обобщенные KS-преобразования 4-го порядка [1]

С. М. Полещиков, А. А. Холопов

Определены матрицы, порождающие обобщенные преобразования Кустаанхеймо–Штифеля (KS-преобразования) четвертого порядка, и описана структура этих матриц. Исследована совместность определяющих соотношений. Доказана теорема о ранге KS-преобразования и дана классификация обобщенных KS-матриц.

1. Введение. Уравнение движения задачи двух тел с массами M и m в относительной системе координат имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\gamma(m+M)}{r^3}\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, \tag{1.1}$$

где $r = |\mathbf{x}|$ — расстояние между телами, γ — гравитационная постоянная.

KS-преобразование было использовано в работах [1, 2] для регуляризации уравнения (1.1), т.е. для устранения особенности при $\mathbf{x} = 0$, формулами

$$dt = r\,d\tau,$$

$$x = L(u)u\,, \quad x, u \in \mathbf{R}^4, \tag{1.2}$$

где τ — новая независимая переменная, $L(u)$ — KS-матрица, равная

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-02-03763а).

Можно убедиться, что матрица (1.3) обладает следующими свойствами,

$$L(u)L^\top(u) = |u|^2 E, \tag{1.4}$$

$$(L(u)v)_i = (L(v)u)_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

$$(L(u)v)_4 = -(L(v)u)_4. \tag{1.6}$$

Здесь u, v – произвольные векторы из $\mathbf{R}^4$, E— единичная матрица четвертого порядка. Уравнение (1.1) в новых переменных u будет иметь вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{h}{2}\, u = 0,$$

где h — зависящая лишь от начальных условий величина (постоянная интеграла энергии).

Из (1.6) следует $x_4 = (L(u)u)_4 = 0$, поэтому (1.2) задает отображение из четырехмерного пространства переменных u в трехмерное пространство переменных $\mathbf{x}$. Матрица (1.3) — не единственная с указанными свойствами.

Назовем все матрицы $L(u)$ со свойствами (1.4)-(1.6) *обобщенными* KS-матрицами.

В данной работе дается структура и способ построения всех обобщенных KS-матриц. Кроме того, показано, что распределение знаков "три плюс один" в правых частях (1.5), (1.6) вполне закономерно.

2. Определяющие соотношения. Заметим, что из (1.5), (1.6) следует *линейность* $L(u)$ относительно u. Пусть строки матрицы $L(u)$ записаны в виде $u^\top A_1, u^\top A_2, u^\top A_3, u^\top A_4$ соответственно, где $u^\top$ — вектор-строка, A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — матрицы 4×4:

$$L(u) = \begin{pmatrix} u^\top A_1 \\ u^\top A_2 \\ u^\top A_3 \\ u^\top A_4 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Условия (1.5), (1.6) дают, что A_1, A_2, A_3 — симметрические, а A_4 — кососимметрическая матрицы

$$A_1 = A_1{}^\top,\ A_2 = A_2{}^\top,\ A_3 = A_3{}^\top,\ A_4 = -A_4{}^\top. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (1.4), получаем ортогональность матриц A_i и кососимметричность произведений $A_iA_j{}^\top$, $i \neq j$. С учетом (2.2) получаем, что матрицы A_i должны удовлетворять также соотношениям

$$A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = E, \quad A_4^2 = -E, \tag{2.3}$$

$$A_1A_2 + A_2A_1 = 0,\ A_1A_3 + A_3A_1 = 0,\ A_2A_3 + A_3A_2 = 0, \tag{2.4}$$

$$A_1A_4 = A_4A_1,\ \ A_2A_4 = A_4A_2,\ \ A_3A_4 = A_4A_3. \tag{2.5}$$

Обратно, любые четыре матрицы A_1, A_2, A_3, A_4, связанные соотношениями (2.2)–(2.5), по формуле (2.1) задают обобщенную KS-матрицу.

Приведем соотношения (2.2)–(2.5) к соотношениям для четырех кососимметрических матриц. Пусть

$$A_1 = K_1K_4,\ A_2 = K_2K_4,\ A_3 = K_3K_4,\ A_4 = K_4. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.2)–(2.5) получаем

$$K_i^2 = -E, \quad K_i^{\mathsf{T}} = -K_i, \quad i = 1,2,3,4, \tag{2.7}$$

$$K_1K_2 + K_2K_1 = 0,\ K_1K_3 + K_3K_1 = 0,\ K_2K_3 + K_3K_2 = 0, \tag{2.8}$$

$$K_1K_4 = K_4K_1, \quad K_2K_4 = K_4K_2, \quad K_3K_4 = K_4K_3. \tag{2.9}$$

Таким образом, произвольная обобщенная KS-матрица определяет четыре кососимметрические ортогональные матрицы четвертого порядка со свойствами (2.7)–(2.9) и, наоборот, произвольный набор четырех матриц $K_1 - K_4$ со свойствами (2.7)–(2.9) по формулам (2.6) и (2.1) дает обобщенную KS-матрицу.

3. Группа базисных единиц в $M_4(\mathbf{R})$. Очевидно, что в кольце целочисленных квадратных матриц второго порядка ортогональными являются матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

и их противоположные $-e$, $-k$, $-m$, $-i$. Обозначим $\mathcal{E}_2 = \{e, k, m, i\}$.

Множество $\mathcal{E}_2$ является базисом в $M_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{\alpha+\delta}{2}e + \frac{\alpha-\delta}{2}k + \frac{\beta+\gamma}{2}m + \frac{\gamma-\beta}{2}i. \tag{3.2}$$

Множество $\mathcal{E}_2 \bigcup -\mathcal{E}_2$ является группой с операцией умножения матриц, единицей e и таблицей Кэли:

$$
\begin{aligned}
&e^2 = k^2 = m^2 = -i^2 = e,\\
&ek = ke = k, \quad em = me = m, \quad ei = ie = i;\\
&mk = -km = i, \quad mi = -im = k, \quad ik = -ki = m.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Рассмотрим тензорные произведения матриц (3.1):

$$
e \otimes h = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, k \otimes h = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}, m \otimes h = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix}, i \otimes h = \begin{pmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}
$$

и обозначим их через

$$
\begin{array}{lllll}
E = e \otimes e, & F = i \otimes i, & G = e \otimes k, & H = e \otimes m, & I = k \otimes e,\\
J = m \otimes m, & K = m \otimes k, & L = m \otimes e, & M = k \otimes m, & N = k \otimes k,\\
U = e \otimes i, & V = i \otimes k, & W = i \otimes m, & & \\
X = i \otimes e, & Y = k \otimes i, & Z = m \otimes i, & &
\end{array}
$$

а их множество (*множество базисных единиц*) — через $\mathcal{E}_4$. Операции умножения, транспонирования, обращения задаются формулами $(f, g, s, t \in \mathcal{E}_2)$:

$$
(f \otimes s)(g \otimes t) = fg \otimes st, \quad (f \otimes s)^{\top} = f^{\top} \otimes s^{\top} = (f \otimes s)^{-1}. \tag{3.5}
$$

Приведем ряд утверждений, справедливость которых проверяется непосредственно.

Утверждение 1. *$\mathcal{E}_4$ является базисом в $M_4(\mathbf{R})$.*

Представление произвольной матрицы $A \in M_4(\mathbf{R})$ в базисе $\mathcal{E}_4$ получается аналогично (3.2) при предварительном разбиении на блоки 2×2.

Утверждение 2. *Матрицы (3.4) являются ортогональными, десять из них $(E, \ldots, N)$ — симметрические, шесть $(U, \ldots, Z)$ — кососимметрические.*

Утверждение 3. *Множество $\mathcal{E}_4 \bigcup -\mathcal{E}_4$ является группой 32 порядка относительно операции умножения матриц.*

Рассмотрим множества единиц $T_1 = (U, V, W)$, $T_2 = (X, Y, Z)$, $G_1 = (\pm E, \pm U, \pm V, \pm W)$, $G_2 = (\pm E, \pm X, \pm Y, \pm Z)$.

Из приведенной ниже таблицы умножения кососимметрических матриц видна справедливость следующих утверждений.

Утверждение 4. *Множества G_1, G_2 являются подгруппами группы $\mathcal{E}_4 \bigcup -\mathcal{E}_4$.*

Таблица 1

	U	V	W	X	Y	Z
U	$-E$	W	$-V$	F	$-I$	$-L$
V	$-W$	$-E$	U	$-G$	$-J$	M
W	V	$-U$	$-E$	$-H$	K	$-N$
X	F	$-G$	$-H$	$-E$	Z	$-Y$
Y	$-I$	$-J$	K	$-Z$	$-E$	X
Z	$-L$	M	$-N$	Y	$-X$	$-E$

Утверждение 5. *Множества T_1 и T_2, так же как и подгруппы G_1, G_2, коммутируют между собой.*

Утверждение 6. *Произвольная ортогональная кососимметрическая матрица $\mathcal{K}$: $\mathcal{K}^\top = -\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^2 = -E$ равна либо*

$$\mathcal{K} = aU + bV + cW, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{3.6}$$

либо

$$\mathcal{K} = aX + bY + cZ, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{3.7}$$

то есть представляется единичным вектором $\bar{a} = (a, b, c)^\top$ и лежит в одном из двух линейных трехмерных подпространств $L_1 = \mathcal{L}\{U, V, W\}$, $L_2 = \mathcal{L}\{X, Y, Z\}$.

Доказательство. Из утверждения 2 следует, что $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = uU + vV + wW + xX + yY + zZ.$$

Тогда (см. таблицу 1)

$$\mathcal{K}\mathcal{K}^\top = -\mathcal{K}^2 = E = (u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2)E+$$
$$+2(-uxF + vxG + wxH + uyI + vyJ - wyK + uzL - vzM + wzN).$$

Из однозначности разложения по базису $\mathcal{E}_4$ получаем равенство $u^2+v^2+w^2+x^2+y^2+z^2 = 1$ и систему $ux = 0$, $vx = 0$, $wx = 0$, $uy = 0$, $vy = 0$, $wy = 0$, $uz = 0$, $vz = 0$, $wz = 0$, то есть или $u = v = w = 0$ или $x = y = z = 0$. Утверждение доказано.

Из приведенных выше утверждений следует,что линейные оболочки $H_1 = \mathcal{L}\{E, U, V, W\}$ и $H_2 = \mathcal{L}\{E, X, Y, Z\}$ являются подалгебрами алгебры $M_4(\mathbf{R})$. Каждая из них изоморфна алгебре кватернионов $\mathbf{H}$, а алгебра $M_4(\mathbf{R}) = H_1 \cdot H_2$ изоморфна тензорному квадрату $\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}$ алгебры кватернионов (что является хорошо известным фактом). Ортогональные кососимметрические матрицы являются кватернионами-векторами в алгебрах H_1 и H_2. Вектор $\bar{a}$ из (3.6), (3.7) будем называть *представляющим вектором* матрицы $\mathcal{K}$.

В дальнейшем под *нормой, скалярным и векторными произведениями* кососимметрических ортогональных матриц одного и того же пространства L_i будем понимать длину, скалярные и векторные произведения соответствующих представляющих векторов:

$$\|\mathcal{K}\| = |\bar{a}|, \quad (K_1, K_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2), \quad K_1 \times K_2 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2.$$

Будем говорить, что матрицы K_1, K_2, K_3 *образуют репер*, если их представляющие векторы образуют ортонормированный репер. Прозведение матриц K_1 и K_2 находится по формуле

$$K_1 K_2 = -(K_1, K_2)E + K', \tag{3.8}$$

где K' — матрица из L_i с координатами $K_1 \times K_2$.

Подчеркнем, что введенные понятия относятся к кососимметрическим ортогональным матрицам, принадлежащим одному и тому же пространству L_i.

4. Структура обобщенных KS-матриц. Из утверждения 6 следует, что искомые матрицы (2.7)–(2.9) принадлежат каждая либо L_1, либо L_2.

Утверждение 7. *Пусть ортогональные кососимметрические матрицы K_1, K_2 взаимно антикоммутативны: $K_1 K_2 + K_2 K_1 = 0$. Тогда они принадлежат одному и тому же подпространству L_i, а представляющие их векторы являются ортогональными: $(K_1, K_2) = 0$.*

Доказательство. Принадлежность антикоммутативных матриц K_1, K_2 одному и тому же пространству следует из коммутативности L_1 и L_2. Действительно, если $K_1 \in L_1$, $K_2 \in L_2$, то $K_1 K_2 + K_2 K_1 = 2K_1 K_2 = 0$. Но ортогональные матрицы не могут быть вырожденными. Ортогональность представляющих векторов следует из (3.8): $K_1 K_2 + K_2 K_1 = -2\,(K_1, K_2)E = 0$.

Рассмотрим теперь условие (2.8). Из утверждения 7 получаем, что K_1, K_2, K_3 образуют репер в L_1 (или L_2). Так как произведение антикоммутативных кососимметрических матриц соответствует векторному произведению представляющих векторов, то на самом деле $K_3 = \pm K_1 K_2$.

Условие (2.9) в то же время показывает, что K_4 должно принадлежать "альтернативному" пространству L_2 (или L_1). Получаем окончательно:

Теорема 1. *Произвольная обобщенная KS-матрица имеет вид* (2.1), (2.6), *где ортогональные кососимметрические матрицы* K_1, K_2, K_3, K_4 *равны либо*

$$K_i = u_i U + v_i V + w_i W, \quad \|K_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$K_4 = xX + yY + zZ, \quad \|K_4\| = 1, \tag{4.1}$$

либо

$$K_i = x_i X + y_i Y + z_i Z, \quad \|K_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$K_4 = uU + vV + wW, \quad \|K_4\| = 1, \tag{4.2}$$

причем K_1, K_2, K_3 *образуют репер.*

Обратно, произвольные четыре кососимметрические матрицы вида (4.1) *или* (4.2) *задают KS-матрицу по формулам (2.1),(2.6).*

Как видно из (4.1), (4.2), семейство обобщенных KS-преобразований является пятипараметрическим (произвольный репер — три параметра, произвольный единичный вектор K_4– два параметра). Топологически оно изоморфно $O_3 \times S^2 \times O_1$. Другой способ введения параметров описан в [3].

5. Ранг KS-преобразования. Пусть теперь в определяющих формулах (1.5), (1.6) выбрано произвольное распределение знаков:

$$(L(u)v)_i = (L(v)u)_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{5.1}$$

$$(L(u)v)_j = -(L(v)u)_j, \quad j = p+1, \ldots, 4. \tag{5.2}$$

Число $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ будем называть *рангом* KS-преобразования.

Теорема 2(о ранге KS-преобразования). *Условие ортогональности* (1.4) *и условия* (5.1), (5.2) *совместны лишь при* $p = 1$ *или* $p = 3$.

Доказательство. Случай $p = 3$ рассмотрен выше и дает обобщенные KS-матрицы.

а) Случай $p = 0$ дает $L(u)u = 0$ для всех $u \in \mathbf{R}^4$, что противоречит (1.4).

b) Случай $p = 1$. Из (2.1), (2.6), (5.1), (5.2) получаем (2.7) и соотношения

$$K_2K_3 + K_3K_2 = 0, \ K_2K_4 + K_4K_2 = 0, \ K_3K_4 + K_4K_3 = 0,$$

$$K_1K_2 + K_2K_1 = 0, \ K_1K_3 + K_3K_1 = 0, \quad K_1K_4 = K_4K_1.$$

Тогда тройки матриц (K_1, K_2, K_3) и (K_2, K_3, K_4) образуют репер в одном и том же пространстве (L_1 или L_2). Это возможно, если только $K_4 = \pm K_1$. Тогда $A_1 = \pm K_1K_1 = \mp E$, а матрицы A_2, A_3, A_4 образуют репер. Это возможный случай. KS-преобразование сводится к проектированию на первую координату.

c) Случай $p = 2$. Из (2.1), (2.6), (5.1), (5.2) получаем (2.7) и соотношения

$$K_1K_2 + K_2K_1 = 0, \ K_1K_3 + K_3K_1 = 0, \ K_2K_3 + K_3K_2 = 0,$$

$$K_3K_4 + K_4K_3 = 0, \quad K_1K_4 = K_4K_1, \ K_2K_4 = K_4K_2.$$

Тогда K_1, K_2, K_3 образуют репер в пространстве $L_1(L_2)$, а K_4 коммутативно с K_1 и K_2. Тогда или $K_4 = \pm K_1$, $K_4 = \pm K_2$, или K_4 принадлежит альтернативному пространству $L_2(L_1)$ (см. утверждение 5). Первое невозможно, так как K_1, K_2 антикоммутативны и поэтому $K_1 \neq \pm K_2$. Второе невозможно, так как K_4 и K_3 антикоммутативны и должны принадлежать одному пространству. Этот случай невозможен.

d) Пусть, наконец, $p = 4$ и пусть снова $A_1 = K_1A_4$, $A_2 = K_2A_4$, $A_3 = K_3A_4$, где теперь A_4 симметрическая. Тогда вместо (2.7)–(2.9) получим

$$K_i^2 = -E, \quad K_i^{\mathsf{T}} = -K_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad A_4^2 = A_4A_4^{\mathsf{T}} = E, \tag{5.3}$$

$$K_1K_2 + K_2K_1 = 0, \ K_1K_3 + K_3K_1 = 0, \ K_2K_3 + K_3K_2 = 0, \tag{5.4}$$

$$K_1A_4 + A_4K_1 = 0, \ K_2A_4 + A_4K_2 = 0, \ K_3A_4 + A_4K_3 = 0. \tag{5.5}$$

Из (5.3)-(5.4) следует, что K_1, K_2, K_3 образуют репер, например, в L_2. Пусть

$$A_4 = eE + fF + gG + hH + iI + jJ + kK + lL + mM + nN.$$

Подставив в равенства (5.5) выражения (4.2), получим систему относительно матриц $A_4X + XA_4$, $A_4Y + YA_4$, $A_4Z + ZA_4$:

$$x_1(A_4X + XA_4) + y_1(A_4Y + YA_4) + z_1(A_4Z + ZA_4) = 0,$$
$$x_2(A_4X + XA_4) + y_2(A_4Y + YA_4) + z_2(A_4Z + ZA_4) = 0,$$
$$x_3(A_4X + XA_4) + y_3(A_4Y + YA_4) + z_3(A_4Z + ZA_4) = 0.$$

В координатах базиса $\mathcal{E}_4$ все 16 числовых систем имеют нулевые решения, так как определитель систем не равен нулю в силу (5.4) (он равен ± 1). Поэтому $A_4X + XA_4 = 0$, $A_4Y + YA_4 = 0$, $A_4Z + ZA_4 = 0$. Равенство $A_4X + XA_4 = 0$ дает (см. таблицу 1) $e = f = g = h = 0$, так как X коммутативно с E, F, G, H. Равенства $A_4Y + YA_4 = 0$, $A_4Z + ZA_4 = 0$ дают $i = j = k = 0$ и $l = m = n = 0$ соответственно. Отсюда $A_4 = 0$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

6. Подобие обобщенных KS-матриц. Рассмотрим линейное преобразование в пространстве параметров u : $u = S\hat{u}$. Тогда KS-преобразование $x = L(u)u$ имеет вид $x = \hat{L}(\hat{u})\hat{u}$, где

$$\hat{L}(v) = L(Sv)S. \tag{6.1}$$

В обозначениях (2.1), (2.6) получаем равенства

$$\hat{A}_i = S^\top A_i S, \quad \hat{K}_i = S^\top K_i S, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{6.2}$$

Утверждение 8. *Матрица $\hat{L}(v)$ из (6.1) является обобщенной KS-матрицей тогда и только тогда, когда S — ортогональна.*

Доказательство. Необходимость. Из (1.4) получаем равенства

$$|v|^2 E = \hat{L}(v)\hat{L}^\top(v) = \hat{L}^\top(v)\hat{L}(v) = S^\top L^\top(Sv)L(Sv)S = S^\top S|Sv|^2.$$

Следовательно, $|Sv|^2 = v^\top S^\top Sv = \dfrac{|v|^4}{|Sv|^2}$, или $|Sv| = |v|$, то есть S ортогональна.

Достаточность. Из (6.2) получаем, что $\hat{A}_i$, $\hat{K}_i$ ортогонально подобны соответственно матрицам A_i, K_i с одной и той же матрицей подобия S. Тогда для $\hat{K}_i$ выполняются (2.7)–(2.9), то есть $\hat{L}(v)$ является KS-матрицей. Утверждение доказано.

KS-матрицу $\hat{L}(v)$ из (6.1) естественно назвать *подобной* KS-матрице $L(v)$ (с матрицей подобия S).

Для подобия двух *произвольных* KS-матриц $\hat{L}(u), L(u)$ необходимым условием является одинаковая ориентация реперов из (4.1), (4.2), так как подобие матриц $\hat{K}_1$, K_1 и $\hat{K}_2$, K_2 с одной и той же матрицей подобия влечет подобие произведений $\hat{K}_1\hat{K}_2$ и K_1K_2, а ориентация реперов равна знаку в равенствах $\hat{K}_3 = \pm\hat{K}_1\hat{K}_2$, $K_3 = \pm K_1K_2$. Например, две KS-матрицы, определяемые равенствами $\hat{K}_1 = X$, $\hat{K}_2 = Y$, $\hat{K}_3 = Z$, $\hat{K}_4 = U$ и $K_1 = X$, $K_2 = Y$, $K_3 = -Z$, $K_4 = U$, не являются подобными.

Различием ориентаций реперов исчерпывается различие классов эквивалентности ортогонального подобия.

Теорема 3(о подобии обобщенных KS-матриц). *Две обобщенные KS-матрицы подобны тогда и только тогда, когда они одинаково ориентированы.*

Лемма. *1. Обобщенные KS-матрицы* (4.1) *подобны стандартной KS-матрице, задаваемой четверкой* $(U, V, \pm W, X)$. *2. Обобщенные KS-матрицы* (4.2) *подобны стандартной KS-матрице, задаваемой четверкой* $(X, Y, \pm Z, U)$. *Знак в четверке равен знаку ориентации KS-матрицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. По теореме Эйлера одинаково ориентированные трехмерные реперы совмещаются поворотом вокруг некоторой оси, задаваемой единичным вектором $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ на угол θ. Этот поворот в алгебре кватернионов задается преобразованием $\bar{v} \to q\bar{v}\bar{q}$, где единичный кватернион q дается формулой [4]

$$q = c + s\,\bar{b},$$

где $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$. Кватернион q легко выражается в терминах матрицы $B = (b_{ij})$ коэффициентов разложения (4.1):

$$K_i = b_{i1}U + b_{i2}V + b_{i3}W, \quad i = 1, 2, 3.$$

Справедливы формулы

$$c = \frac{\sqrt{1 + tr\,B}}{2}; \quad s = \frac{\sqrt{3 - tr\,B}}{2},$$

где $tr\,B$ — след матрицы B.

Вектор $\bar{b}$ является собственным вектором B, соответствующим собственному числу $\lambda = 1$. Если B является диагональной (с единицей на k-м месте), то $\bar{b}$ — единичный орт (с единицей на k-м месте). Если B не является диагональной (в этом случае $0 < s, c < 1$), то

$$\bar{b} = \frac{1}{4sc}(b_{23} - b_{32}, b_{31} - b_{13}, , b_{12} - b_{21})^\top.$$

Кватерниону q в H_1 соответствует ортогональная матрица

$$Q' = c\,E + s\,(b_1U + b_2V + b_3W), \tag{6.3}$$

сопряженному $\bar{q}$ — матрица $Q'^{\top}$.

Итак, существует Q' такая, что

$$Q'K_1 = UQ', \quad Q'K_2 = VQ', \quad Q'K_3 = \pm WQ'.$$

Ортогональную матрицу Q'' подобия K_4 и X в пространстве H_2 можно задать, например, формулой

$$Q'' = \begin{cases} \dfrac{K_4 + X}{\sqrt{2(1 + (K_4, X))}} & \text{при } K_4 \neq -X, \\ Y & \text{при } K_4 = -X. \end{cases} \tag{6.4}$$

Равенство $Q''K_4 = XQ''$ проверяется непосредственно.

Искомой матрицей подобия является

$$Q = Q'Q'' = Q''Q'. \tag{6.5}$$

Аналогично строится матрица подобия для KS-матриц второго типа. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость была показана выше. Пусть $\hat{L}(u), L(u)$ — одинаково ориентированные KS-матрицы и пусть $\hat{Q}$, Q — их матрицы подобия стандартным KS-матрицам из леммы, построенные по формуле (6.5).

Если $\hat{L}(u), L(u)$ одного типа, то есть реперы $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3)$ и (K_1, K_2, K_3) находятся в одном пространстве, то матрица $S = Q^{\top}\hat{Q}$ является искомой матрицей подобия.

Пусть $\hat{L}(u), L(u)$ разного типа. Тогда достаточно установить подобие стандартных KS-матриц: четверки $(U, V, \pm W, X)$ с четверкой $(X, Y, \pm Z, U)$ (знаки совпадают). Вычисления с использованием таблицы 1 показывают, что такое подобие возможно с ортогональной матрицей

$$P = \alpha(E - F + J + N) + \beta(X + U - M + K),$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = 1/4$. Тогда искомая матрица подобия равна $S = Q^{\top}P\hat{Q}$. Теорема 3 доказана.

Литература

1. **Kustaanheimo P., Stiefel E.** Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angev. Math.* 1965. V. 218.P. 204–219.

2. **Штифель Е., Шейфеле Г.** Линейная и регулярная небесная механика. М.:Наука, 1975, 304 с.

3. **Полещиков С.М.** О семействе KS-преобразований. Сыктывкар, 1993. 27 с.Деп. в ВИНИТИ 12.11.93,№2787–В93.

4. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

Summary

Poleshchikov S. M., Kholopov A. A. Generalized KS-transformations of 4-th order

Generalized Kustaanheimo-Stiefel transformations (KS-transformations) are definded. The structure of KS-matrix is described. The compatibility of determinative conditions is investigated. The KS-transformation range theorem is proved and the classification of all fouth order KS-matrices is given.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.12.95*