Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 519.652

Дискретные периодические сплайны и решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке [1]

А. Б. Певный

Изучаются дискретные периодические сплайны на равномерной сетке и их B-сплайновое представление. Решается задача интерполяции . Предлагаемый метод, в основе которого лежит дискретное преобразование Фурье, позволяет избежать решения систем уравнений и приводит к явным выражениям для коэффициентов сплайнов. Метод применяется для решения задачи о бесконечной цилиндрической оболочке.

Введение

В статье В.А.Желудева [1] развивается своеобразное сплайн–операционное исчисление (СОИ), основанное на дискретном преобразовании Фурье(ДПФ) и на представлении периодического сплайна $S(x)$ в виде линейной комбинации B-сплайнов. В данной работе исследуются дискретные сплайны $S(j), j \in \mathbb{Z}$, имеющие период N. Начало изучению дискретных сплайнов положили работы [2],[3]. Систематическое изложение теории дискретных сплайнов см. в [4],[5].

В основе дискретного варианта СОИ лежит представление дискретного сплайна $S(j)$ в виде линейной комбинации дискретных B-сплайнов

$$S(j) = \sum_{l=0}^{m-1} c_l Q_r(j - j_l),$$

где $j_l = ln$ – узлы крупной сетки на $\mathbb{Z}$. Далее от последовательности коэффициентов $\{c_l\}$ переходим к ее ДПФ, и задача переносится в

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00269).

пространство Фурье-образов. Использование ДПФ позволяет для сокращения объема вычислений применять алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Необходимая информация из области дискретного гармонического анализа имеется, например, в [6],[7].

1. Рекуррентное определение дискретных периодических B-сплайнов

1. Дискретные сплайны рассматриваем на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Зафиксируем натуральные r, n, N, такие, что $N > 2rn$, $n \geq 2$.

Определим дискретные B-сплайны $Q_1(j), \ldots, Q_r(j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ следующим образом. Положим

$$Q_1(j) = \begin{cases} n - j, & j \in 0 : n - 1, \\ 0, & j \in n : N - n, \\ j - (N - n), & j \in N - n + 1 : N - 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Определенную на $0 : N - 1$ функцию Q_1 продолжим на всю целочисленную ось $\mathbb{Z}$ с периодом N (так, чтобы выполнялось условие $Q_1(j+N) = Q_1(j)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$). Функция Q_1 представляет собой совокупность "домиков" с вершинами в точках $0, \pm N, \pm 2N, \ldots$. Носитель Q_1 есть

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [kN - n + 1 : kN + n - 1].$$

Далее используем рекуррентное определение

$$Q_k = Q_1 * Q_{k-1}, \ k = 2, \ldots, r, \tag{1.2}$$

или

$$Q_k(j) = \sum_{p=0}^{N-1} Q_1(p) Q_{k-1}(j-p), \ j \in \mathbb{Z}, \ k = 2, \ldots, r.$$

Лемма 1.1. *B-сплайн Q_r имеет период N и обладает следующими свойствами:*

$$Q_r(-j) = Q_r(j) \text{ для любого целого } j; \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} Q_r(j) > 0 \text{ при } kN - r(n-1) \leq j \leq kN + r(n-1) \\ \text{и } Q_r(j) = 0 \text{ при остальных } j; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=-r(n-1)}^{r(n-1)} Q_r(j) = n^{2r}; \tag{1.5}$$

$$Q_r(r(n-1)) = 1. \tag{1.6}$$

Доказательство проводится индукцией по r. При $r = 1$ свойства (1.3)-(1.6) легко проверяются. Пусть Q_{r-1} имеет период N и обладает свойствами (1.3)-(1.6). Тогда Q_r также имеет период N. Имеем по индуктивному предположению

$$Q_r(-j) = \sum_{p=0}^{N-1} Q_1(p)Q_{r-1}(j+p) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} Q_1(-\nu)Q_{r-1}(j-\nu) = Q_r(j) \ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

При $j \in \mathbb{Z}$ справедлива формула

$$Q_r(j) = \sum_{p=-n+1}^{n-1} Q_1(p)Q_{r-1}(j-p). \tag{1.7}$$

При $j \in -r(n-1) : r(n-1)$ в сумме (1.7) все слагаемые неотрицательны и хотя бы одно положительно, поэтому $Q_r(j) > 0$.

При $r(n-1) < |j| < N - r(n-1)$ будем иметь $Q_{r-1}(j-p) = 0$ при всех $p \in -n+1 : n-1$, поэтому $Q_r(j) = 0$. С учетом периодичности выполнено (1.4).

Из (1.7) и индуктивного предположения следует, что

$$\sum_{j=-r(n-1)}^{r(n-1)} Q_r(j) = \sum_{p=-n+1}^{n-1} Q_1(p) \sum_{\nu=-(r-1)(n-1)}^{(r-1)(n-1)} Q_{r-1}(\nu) = n^2 \cdot n^{2(r-1)} = n^{2r}.$$

Наконец, при $j = r(n-1)$ в сумме (1.7) ровно одно положительное слагаемое: $Q_r(r(n-1)) = Q_1(n-1)Q_{r-1}(r(n-1)-(n-1)) = 1 \cdot 1$.

Лемма доказана.

2. Пусть теперь N делится нацело на n:

$$N = mn.$$

В силу сделанных предположений $n \geq 2$, $m > 2r \geq 2$.

Дискретным N-периодическим сплайном S будем называть линейную комбинацию B-сплайнов

$$S(j) = \sum_{l=0}^{m-1} c_l Q_r(j - j_l) \quad (j \in \mathbb{Z}), \tag{1.8}$$

где $j_l = ln$, $l \in 0 : m-1$, называются узлами сплайна. Такое представление дискретных сплайнов будет использоваться на протяжении всей статьи.

Остановимся на вычислении $S(j)$ для всех $j \in 0 : N-1$. Пусть $j \in [j_k, j_{k+1})$. Тогда, считая последовательность $\{c_l\}$ периодически продолженной влево и вправо с периодом m ($c_{l+m} = c_l \; \forall l$), можно записать равенство

$$S(j) = \sum_{l=k-r+1}^{k+r} c_l Q_r(j - ln). \tag{1.9}$$

Всего $2r$ умножений c_l на Q.

Можно показать, что сплайн $S(j)$ на каждом целочисленном промежутке $j_k : j_{k+1}$ совпадает с некоторым полиномом P_k степени не выше $2r-1$. Это можно использовать для быстрого вычисления сплайна S. Поясним идею алгоритма на примере $r = 2$. В этом случае на $j_k : j_{k+1}$ функция S является полиномом 3-ей степени

$$S(j_k+z) = S(j_k)+\Delta S(j_k)z+\frac{1}{2}\Delta^2 S(j_k)z(z-1)+\frac{1}{6}\Delta^3 S(j_k)z(z-1)(z-2),$$

где $z \in 0 : n$, $\Delta S(j_k) = S(j_k+1) - S(j_k)$. Используя (1.9), можно вычислить конечные разности

$$S0 := S(j_k) = a1 * c_{k-1} + a0 * c_k + a1 * c_{k+1},$$

$$S1 := \Delta S(j_k) = a2 * c_{k-1} - n * c_k + a3 * c_{k+1},$$

$$S2 := \Delta^2 S(j_k) = (n-1)c_{k-1} + (3-2n)c_k + (n-3)c_{k+1} + c_{k+2},$$

$$S3 := \Delta^3 S(j_k) = -c_{k-1} + 3c_k - 3c_{k+1} + c_{k+2},$$

где константы $a0 = (2n^3+n)/3$, $a1 = (n^3-n)/6$, $a2 = -n(n-1)/2$, $a3 = n(n+1)/2$ можно вычислить заранее. Значения полинома

$$P(z) = S0 + S1 \cdot z + \frac{1}{2}S2 \cdot z(z-1) + \frac{1}{6}S3 \cdot z(z-1)(z-2)$$

можно вычислить в точках $z \in 0 : n-1$, не используя операцию умножения. Воспользуемся рекуррентными соотношениями

$$P(z+1) = P(z) + Q(z+1),$$

$$Q(z+1) = Q(z) + D(z+1),$$

$$D(z+1) = D(z) + S3,$$

с начальными условиями

$$P(0) = S0, \quad Q(0) = S1 - S2 + S3, \quad D(0) = S2 - S3 - S3.$$

Здесь используется разность $R = S2 - S3$, для которой справедлива формула $R = n(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})$.

Окончательно вычисление сплайна $S(j)$ на промежутке $[j_k, j_{k+1})$ реализуется следующим фрагментом программы

$ck0 := c[k-1];\ ck := c[k];\ ck1 := c[k+1];\ ck2 := c[k+2];$
$S0 := a1 * (ck0 + ck1) + a0 * ck;$
$S1 := a2 * ck0 - n * ck + a3 * ck1;$
$A := ck - ck1;\ B := A - ck0;$
$S3 := A + A + B + ck2;\ R := -n * (B + ck);$
$P := S0;\ Q := S1 - R;\ D := R - S3;$
for $z := 1$ to $n - 1$ do
begin $D := D + S3;\ Q := Q + D;\ P := P + Q$ end

Переменная P последовательно принимает значения $P(0), P(1), \ldots, P(n-1)$. Всего в приведенном фрагменте 6 умножений и $\approx 3n$ сложений, а для вычисления значений сплайна на m отрезках потребуется $6m$ умножений и $\approx 3mn = 3N$ сложений.

2. ДПФ и интерполяция дискретными сплайнами

Будем использовать аппарат дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Пусть $\omega_N = e^{2\pi i/N}$. ДПФ вектора $a = \{a_j\}_0^{N-1}$ имеет вид

$$F_k(a) := A_k := \sum_{j=0}^{N-1} a_j \omega_N^{-kj}.$$

Последовательность $\{A_k\}$ является N-периодической. Введем норму вектора

$$||a|| = \left[\sum_{j=0}^{N-1} |a_j|^2\right]^{1/2}.$$

ДПФ обладает свойствами

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \omega_N^{jk}, \ j = 0, \ldots, N-1 \text{ (формула обращения)},$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j \bar{b}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \bar{B}_k,$$

$$||a||^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |A_k|^2 \text{ (равенство Парсеваля)}. \qquad (2.1)$$

Здесь черта обозначает комплексное сопряжение.

Найдем ДПФ от В-сплайна $Q_r(j)$, введенного в п.1. Сверточное свойство (1.2) позволяет легко вычислить ДПФ от Q_r. Действительно,

$$F_k(Q_r) = F_k(Q_{r-1})F_k(Q_1) = \ldots = [F_k(Q_1)]^r, \; k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Осталось вычислить ДПФ от Q_1:

$$F_k(Q_1) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} Q_1(j)\omega_N^{-kj}. \qquad (2.2)$$

Учтем, что на $-N/2 : N/2-1$ сплайн $Q_1(j)$— это исходный В-сплайн (1.1). Формула (2.2) принимает вид

$$F_k(Q_1) = n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)[\omega_N^{-kj} + \omega_N^{kj}] = n + 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos\frac{2\pi kj}{N}$$

(здесь важно, что $N/2 - 1 \geq n - 1$. Последнее выполняется ввиду условия $N = mn \geq 2n$). Используем тождество Фейера

$$n + 2\sum_{j-1}^{n-1}(n-j)\cos jx = \left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2.$$

При $x = 2\pi k/N$ получаем

$$F_k(Q_1) = \left(\frac{\sin \pi k/m}{\sin \pi k/N}\right)^2, \; k = 1, \ldots, N-1,$$

ибо $N = mn$. При $k = 0$

$$F_0(Q_1) = n^2.$$

Для ДПФ от Q_r будем использовать обозначение $u_{rk} = F_k(Q_r)$. В силу (2.1)

$$u_{rk} = \begin{cases} n^{2r} & \text{при } k = 0, \\ (\sin(k\pi/m)/\sin(k\pi/N))^{2r} & \text{при } k = 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

По формуле обращения

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}\left[n^{2r} + \sum_{l=1}^{N-1}\left(\frac{\sin l\pi/m}{\sin l\pi/N}\right)^{2r}\omega_N^{jl}\right], \; j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Эта формула получена в [9].

Из (2.3) получаем значения В-сплайна $Q_r(j)$ в узлах $j_k = kn$:

$$Q_r(j_k) = \frac{1}{m}\left[n^{2r-1} + \sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j(\sin j\pi/m)^{2r}\omega_m^{kj}\right],$$

где

$$\lambda_j = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin(sm+j)\pi/N}\right)^{2r}, \; j = 0, \ldots, m-1.$$

Таким образом, последовательность $\{Q_r(j_k)\}_{k=0}^{m-1}$ является обратным ДПФ (длины m) от положительной последовательности

$$T_0 = n^{2r-1}, \; T_j = \lambda_j\left(\sin\frac{j\pi}{m}\right)^{2r}, \; j = 1, \ldots, m-1. \tag{2.4}$$

Положительность чисел T_j позволяет легко решить интерполяционную задачу для дискретных сплайнов степени $2r-1$:

$$S(j_k) = \sum_{l=0}^{m-1} c_l Q_r(j_k - j_l) = z_k, \; k = 0, \ldots, m-1. \tag{2.5}$$

Здесь числа z_k даны, требуется найти коэффициенты c_l.

Отметим, что матрица $\mathbf{Q}$ с элементами $\mathbf{Q}_{kl} = Q_r(j_k - j_l)$ симметрична и положительно определена. Симметричность следует из (1.2), а положительная определенность – из соотношения

$$(\mathbf{Q}c, c) := \sum_{k,l=0}^{m-1}\mathbf{Q}_{kl}c_k c_l = \sum_{k,l=0}^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}T_j\omega_m^{kj}\omega_m^{-lj}c_k c_l =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=o}^{m-1}T_j\left|\sum_{k=0}^{m-1}c_k\omega_m^{kj}\right|^2 > 0.$$

для любого ненулевого вектора $c = \{c_k\}_{k=0}^{m-1}$.

Решать систему $\mathbf{Q}c = z$ не нужно. Надо сделать ДПФ над обеими частями (2.5). Придем к эквивалентной системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} S(j_k)\omega_m^{-kj} = Z_j,\ j = 0, \dots, m-1. \tag{2.6}$$

Но из (2.5) видно, что $\{S(j_k)\}$ есть циклическая свертка последовательностей $\{c_l\}$ и $\{Q_r(j_k)\}$. По теореме о свертке система (2.6) принимает вид

$$C_j T_j = Z_j,\ j = 0, \dots, m-1, \tag{2.7}$$

где

$$C_j = \sum_{l=0}^{m-1} c_l \omega_m^{-lj},\ j = 0, \dots, m-1.$$

После перехода к Фурье-образам получили простейшую (диагональную) систему (2.7), которая ввиду положительности чисел T_j легко решается:

$$C_j = Z_j/T_j,\ j = 0, \dots, m-1. \tag{2.8}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_l сплайна S осталось сделать обратное ДПФ. Если учесть, что числа T_j можно вычислить заранее, то можно сказать, что решение интерполяционной задачи (2.5) сводится к выполнению двух ДПФ длины m.

Полученный результат можно сформулировать в матричной форме (это частный случай общего результата о факторизации правоциркулянтных матриц [8]).

Теорема 2.1. *Для матрицы* $\mathbf{Q} = \{Q_r(j_k - j_l)\}_{k,l=0}^{m-1}$ *справедливы равенства*

$$\mathbf{Q} = F^{-1}TF,\ \mathbf{Q}^{-1} = F^{-1}T^{-1}F,$$

где $T = diag\{T_0, \dots, T_{m-1}\}$, $F = \{\omega_m^{-kj}\}_{k,j=0}^{m-1}$ *– матрица ДПФ.*

Замечание.

Пользуясь (2.8), выведем формулу для суммы B-сплайнов. Рассмотрим интерполяционную задачу (2.5), в которой все $z_k = 1$. Тогда по формуле (2.8) получим

$$C_j = Z_j/T_j = \begin{cases} m/n^{2r-1}, & j = 0, \\ 0, & j = 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

С помощью обратного ДПФ найдем коэффициенты сплайна: $c_k = 1/n^{2r-1}$, $k = 0, \dots, m-1$. Итак, сплайн $S(j) \equiv 1$ записывается в виде

$$S(j) = \frac{1}{n^{2r-1}} \sum_{k=0}^{m-1} Q_r(j - kn).$$

Отсюда получаем полезное тождество

$$\sum_{k=0}^{m-1} Q_r(j - kn) = n^{2r-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

3. Решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке

Метод ДПФ может применяться для решения периодических задач математической физики. Проиллюстрируем на примере одной задачи теории упругости.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R, толщины d, имеющую бесконечную длину, причем $d/R << 1$. Предположим, что нормальная $p_1(\varphi)$ и касательная $p_2(\varphi)$ компоненты внешней нагрузки не зависят от координаты x вдоль оболочки и таковы, что перемещения $u(\varphi)$, $w(\varphi)$ также не зависят от x и удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u' - 2a_1 u''' + w + a_1[w^{(4)} - 2w''] = A_1 p_1(\varphi), \\ u'' + w' - 2a_0 w''' = -A_2 p_2(\varphi), \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$A_1 = \frac{R^2}{Ed}, \; A_2 = A_1(1 - \nu^2), \; a_0 = \frac{d^2}{12R^2}, \; a_1 = \frac{a_0}{1 - \nu^2}.$$

Здесь $0 < \nu < 1/2$—коэффициент Пуассона, $E > 0$—модуль упругости.

Требуется найти 2π–периодическое решение системы (3.1). Если (u, w)— решение, то $(u + C, w)$—также решение. Константа C определяется из какого- либо дополнительного условия. Кроме того, интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ от левой части второго уравнения (3.1) равен нулю, поэтому естественно предположить, что

$$\int_0^{2\pi} p_2(\varphi) d\varphi = 0. \tag{3.2}$$

Пусть $N = mn$. Рассмотрим схему, в которой вычисляются значения функций $u(\varphi)$, $v(\varphi)$ на мелкой сетке $\varphi_j = jh$, $j = 0, \ldots, N-1$, где $h = 2\pi/N$, но при этом делаются ДПФ длины m.

Аппроксимируем $u(\varphi_j)$ дискретным N–периодическим сплайном $S_1(j)$, а $w(\varphi_j)$—сплайном $S_2(j)$. Сплайны S_1, S_2 разложим по B-сплайнам:

$$S_1(j) = \sum_{l=0}^{m-1} c_l Q_r(j - j_l), \quad S_2(j) = \sum_{l=0}^{m-1} d_l Q_r(j - j_l),$$

где $j_l = ln$, r – фиксированное натуральное число.

Введем $h = nh_1 = 2\pi/m$—шаг крупной сетки. Для гладкой функции f обозначим $f_k = f(kh)$ значения на крупной сетке. Рассмотрим операторы D^1, D^2, D^3, D^4, аппроксимирующие 1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю производные соответственно с погрешностью порядка h^2:

$$D^1 f_k = (f_{k+1} - f_{k-1})/(2h), \quad D^2 f_k = (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1})/h^2,$$

$$D^3 f_k = [f_{k+2} - f_{k-2} - 2(f_{k+1} - f_{k-1})]/(2h^3),$$

$$D^4 f_k = (f_{k+2} - 4f_{k+1} + 6f_k - 4f_{k-1} + f_{k-2})/h^4.$$

Коэффициенты c_l, d_l находятся из системы линейных уравнений

$$D^1 S_1(j_k) - 2a_1 D^3 S_1(j_k) + S_2(j_k) + a_1[D^4 S_2(j_k) - 2D^2 S_2(j_k)] =$$

$$= A_1 p_1(kh), \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{3.3}$$

$$D^2 S_1(j_k) + D^1 S_2(j_k) - 2a_0 D^3 S_2(j_k) = -A_2 p_2(kh), \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Возьмем ДПФ длины m от обеих частей этих равенств. Последовательность $\{S_1(j_k)\}$ есть циклическая свертка последовательностей $c = \{c_l\}$ и $\{Q_r(j_l)\}$, поэтому ДПФ $\{S_1(j_k)\}$ есть $\{C_k T_k\}_{k=0}^{m-1}$, где $C_k = F_k(c)$. Аналогично ДПФ $\{S_2(j_k)\}$ есть $\{D_k T_k\}_{k=0}^{m-1}$, где $D_k = F_k(d)$. Запишем теперь обратные ДПФ

$$S_1(j_k) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} C_l T_l \omega_m^{kl}, \quad S_2(j_k) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} D_l T_l \omega_m^{kl}, \tag{3.4}$$

$$p_1(kh) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} P_{1l}\omega_m^{kl}, \quad p_2(kh) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} P_{2l}\omega_m^{kl}.$$

Применим операторы D^1, D^2, D^3, D^4 к (3.4). Имеем

$$D^1 S_1(j_k) = \frac{1}{2h}[S_1(j_{k+1}) - S_1(j_{k-1})] = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{is_l}{h} C_l T_l \omega_m^{kl},$$

где $s_l = \sin(2l\pi/m)$. Аналогично,

$$D^2 S_1(j_k) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(-\frac{v_l}{h^2}\Big) C_l T_l \omega_m^{kl},$$

где $v_l = \left(2\sin\frac{l\pi}{m}\right)^2$,

$$D^3 S_1(j_k) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{-is_l v_l}{h^3}\right) C_l T_l,$$

$$D^4 S_2(j_k) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{v_l^2}{h^4} D_l T_l.$$

Подставив в (3.3), получим для каждого $l = 0, \ldots, m-1$ систему двух уравнений с неизвестными C_l, D_l:

$$\alpha_l C_l + \beta_l D_l = A_1 P_{1l}/T_l,$$

$$\gamma_l C_l + \delta_l D_l = -A_2 P_{2l}/T_l,$$

где

$$\alpha_l = i\frac{s_l}{h}\Big(1 + \frac{2a_1 v_l}{n^2 h^2}\Big), \quad \beta_l = 1 + a_1\Big(\frac{v_l^2}{h^4} + \frac{2v_l}{h^2}\Big),$$

$$\gamma_l = -\frac{v_l}{h^2}, \quad \delta_l = i\frac{s_l}{h}\Big(1 + \frac{2a_0 v_l}{h^2}\Big).$$

При $l = 0$ имеем $\alpha_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$ и ввиду условия (3.2) можно считать, что

$$P_{20} := \sum_{k=0}^{m-1} p_2(kh) = 0.$$

Поэтому $D_0 = A_1 P_{10}/T_0$, а C_0 можно взять произвольным. Если определители $\Delta_l = \alpha_l\delta_l - \beta_l\gamma_l$ отличны от нуля при $l = 1, \ldots, m-1$, то системы имеют единственные решения

$$C_l = (A_1 P'_{1l}\delta_l + A_2 P'_{2l}\beta_l)/\Delta_l T_l, \quad D_l = -(A_1 P_{1l}\gamma_l + A_2 P_{2l}\alpha_l)/\Delta_l T_l.$$

Делая обратное ДПФ длины m, находим коэффициенты c_l, d_l сплайнов $S_1(j), S_2(j)$. При этом легко проследить, как входит произвольная постоянная C_0 в сплайн $S_1(j)$:

$$c_l = \frac{1}{m}C_0 + c_l^*, \text{ где } c_l^* = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} C_k\omega_m^{kl}, \; l = 0, \ldots, m-1.$$

Отсюда

$$S_1(j) = \frac{1}{m}C_0\sum_{l=0}^{m-1} Q_r(j - j_l) + \sum_{l=0}^{m-1} c_l^* Q_r(j - j_l) =$$

$$= \frac{1}{m}C_0 n^{2r-1} + \sum_{l=0}^{m-1} c_l^* Q_r(j - j_l),$$

ибо, как установлено в п.2, первая сумма равна n^{2r-1}.

Приведем результаты расчетов при $R = 50$, $d = 1$. В этом случае параметр $a_0 = 3.3 \cdot 10^{-5}$ весьма мал, что осложняет вычисления. В качестве точного решения возьмем $u(\varphi) = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $w(\varphi) = \sin 2\varphi$, подставим в систему (3.1) и определим $p_1(\varphi)$ и $p_2(\varphi)$. Для иллюстрации характера сходимости S_1, S_2 к u, w при $m \to \infty$ приведем таблицу отклонений

m	$\max\limits_{j\in 0:N} \lvert S_1(j) - u(\varphi_j)\rvert$	$\max\limits_{j\in 0:N} \lvert S_2(j) - w(\varphi_j)\rvert$
256	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-1}$
512	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
1024	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$
2048	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$
4096	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
8192	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$

Время счета на PC AT 386 при $m = 8192$ не превосходило одной минуты.

Благодарю В.Л.Никитенкова за постановку задачи о бесконечной цилиндрической оболочке и В.А.Кирушева за разработку модуля DHA по дискретному гармоническому анализу.

Литература

1. **Желудев В.А.** Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1992. Т.32. №2. С.1296–1309.

2. **Whittaker E.T.** On a new method of graduation//*Proc. Edinb. Math. Soc.* 1923. V.41. P.63–75.

3. **Mangasarian O.L., Schumaker L.L.** Discrete splines via mathematical programming//*SIAM J. on Control.* 1971. V.9. №2. P.174-183.

4. **Schumaker L.L.** Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981.

5. **Бер М.Г.** Дискретные сплайны и задача восстановления дискретных данных: Дис...канд. физ.-мат. наук. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 140 с.

6. **Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М.** Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983.

7. **Блейхут Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.

8. **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

9. **Behr M.G., Malozemov V.N., Pevnyi A.B.** A discrete version of spline-operational calculus/*Оптимизация конечно-элементных аппроксимаций. Тезисы докладов межд. конф.* СПб, 1995.

10. **Бер М.Г., Малоземов В.Н.** Наилучшие формулы для приближенного вычисления ДПФ//*Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1992.Т.32.№11.С.1709–1719.

11. **Бер М.Г., Малоземов В.Н.** О восстановлении дискретных периодических данных // *Вестник Ленингр. ун-та. Сер.1.* 1990. Вып.3. С.8–13.

Summary

Pevnyi A. B. Discrete periodic splines and solution of the problem concerning infinite cylindrical shell

The definition of the discrete N-periodic B-spline is given. Every discrete N-periodic spline is the linear combination of shifts of B-spline. The problem of interpolation by discrete N-periodic splines is solved. A method for the solution of the problem concerning the infinite cylindrical shell is presented. The method uses the Discrete Fourier Transformation. It permits to get rid of the solution of the systems of algebraic equations and gives explicit formulae for coefficients of splines.

Сыктывкарский университет

Поступила 18.03.96