Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 539.3

Бескоординатный способ получения сопряженных пар тензоров [1]

Е. И. Михайловский

Систематизированы свойства двойного скалярного произведения тензоров второго ранга, позволяющие производить в бескоординатной форме тождественные преобразования выражения для энергии упругой деформации и тем самым, в частности, получать различные сопряженные (по Р.Хиллу [1]) пары тензоров. Установлены некоторые особенности названных пар тензоров для случая изотропного идеально упругого тела.

Используемые обозначения совпадают в основном с принятыми в монографиях [2,3].

1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Введем в нем декартов базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ такой, что $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (точка означает скалярное произведение, δ_{ij} - символ Кронекера). *Скалярное* и *двойное скалярное произведение* тензоров 2-го ранга

$$\mathbf{T} = t_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta, \ \mathbf{S} = s_{\nu\mu}\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\mu$$

определяются правилами

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = t_{\alpha\beta}s_{\nu\mu}\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\nu)\mathbf{e}_\mu = t_{\alpha\beta}s_{\beta\mu}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\mu,$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = t_{\alpha\beta}s_{\nu\mu}(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\nu)(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\mu) = t_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}. \tag{1.1}$$

(Здесь и ниже по индексу, повторенному в одночлене дважды или трижды следует суммировать от 1-го до 3-х.)

Используя координатную форму представления тензоров, нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств двойного

[1] Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания при С. -Петербургском государственном университете (грант 1996 года).

скалярного произведения тензоров 2-го ранга:

$$
\begin{array}{l}
i)\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}:\mathbf{C}=\mathbf{A}:\mathbf{B}\cdot\mathbf{C};\\
ii)\mathbf{A}:\mathbf{B}=\mathbf{B}:\mathbf{A}=\mathbf{A}^*:\mathbf{B}^*;\\
iii)\mathbf{A}=\mathbf{A}^*\Longrightarrow\mathbf{A}:\mathbf{B}=\mathbf{A}:\frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{B}^*);\\
iv)\mathbf{A}=\mathbf{A}^*,\ \mathbf{B}=-\mathbf{B}^*\Longrightarrow\mathbf{A}:\mathbf{B}=0.
\end{array}
\tag{1.2}
$$

(Здесь $\mathbf{A}^*$ - тензор сопряженный по отношению к $\mathbf{A}$.)

2. Рассмотрим работу внешних сил на бесконечно малом приращении вектора перемещений $d\mathbf{u}$. Имеем

$$
dA\stackrel{\triangle}{=}\int\limits_S \boldsymbol{\sigma}_n\cdot d\mathbf{u}dS+\int\limits_V(\mathbf{f}-\mathbf{w})\cdot d\mathbf{u}\rho dV=
$$

$$
=\int\limits_{\overset{\circ}{S}}\boldsymbol{\sigma}_{\overset{\circ}{n}}\cdot d\mathbf{u}d\overset{\circ}{S}+\int\limits_{\overset{\circ}{V}}(\mathbf{f}-\mathbf{w})\cdot d\mathbf{u}\overset{\circ}{\rho}d\overset{\circ}{V}.\tag{2.1}
$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{w}$ - (соответственно) векторы напряжений на площадке поверхности деформированного тела с нормалью $\mathbf{n}$, удельной массовой силы и ускорения частицы ρdV.

В (2.1) при переходе от интегрирования по актуальной (деформированной) конфигурации к интегрированию по исходной конфигурации тела использовались следующие соотношения:

$$
\boldsymbol{\sigma}_n dS=\boldsymbol{\sigma}_{\overset{\circ}{n}}d\overset{\circ}{S},\quad \boldsymbol{\sigma}_{\overset{\circ}{n}}=\overset{\circ}{\mathbf{n}}\cdot\left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right\},
$$

$$
dV=Jd\overset{\circ}{V}=\frac{\rho_\circ}{\rho}d\overset{\circ}{V},\quad \mathbf{F}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial\overset{\circ}{x}_\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta;\tag{2.2}
$$

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$- тензор истинных напряжений; $J=det\left[\frac{\partial x_i}{\partial\overset{\circ}{x}_j}\right]=III_F$ - якобиан преобразования

$$
x_i=x_i(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,\overset{\circ}{x}_3),\ i\in 1:3\tag{2.3}
$$

или (что то же) третий главный инвариант *тензора-градиента движения* $\mathbf{F}$. Этот тензор переводит элементарный вектор до деформации $d\overset{\circ}{\mathbf{R}}=\overset{\circ}{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha$ в соответствующий вектор после деформации:

$$
d\mathbf{R}=\mathbf{F}\cdot d\overset{\circ}{\mathbf{R}}.\tag{2.4}
$$

Принимая во внимание уравнение равновесия

$$
\overset{\circ}{\nabla}\cdot\left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right\}+\overset{\circ}{\rho}(\mathbf{f}-\mathbf{w})=\mathbf{0},
$$

соотношение (2.1) можно привести к виду

$$dA = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \right\} : d\mathbf{F} d \overset{\circ}{V} . \tag{2.5}$$

Там, где якобиан преобразования (2.3) не равен нулю (т.е. формулы (2.3) являются однозначно обратимыми), тензор $\mathbf{F}$ можно представить в виде полярного разложения:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} . \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ - ортогональный тензор, т.е.

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta;$$

$\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} = \sqrt{\overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}}$ - симметричный *тензор кратности удлинений.*

□ Пусть $\{\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_3\}$ - главный базис тензора $\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$, т.е.

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha .$$

Если $d\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i = d\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$, то

$$ds_i^2 = d\mathbf{R}_i \cdot d\mathbf{R}_i = (\mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i) =$$

$$= d\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}{}^2 \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i = \lambda_i^2 d\overset{\circ}{x}{}_i^2$$

или

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{d\overset{\circ}{x}_i} > 0.$$

Последняя формула оправдывает название тензора $\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$ ■

Формулу (2.5) с учетом (2.6) можно записать так:

$$dA = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \right\} : \left(\underline{d\mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}} + \mathbf{Q} \cdot d \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} \right) d \overset{\circ}{V} . \tag{2.7}$$

Покажем, что двойное скалярное произведение *тензора номинальных напряжений* $\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \right\}$ и подчеркнутого в (2.7) слагаемого равно нулю. Действительно, на основании свойств i), iii) (1.2) имеем

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}{}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} : d\mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} = d\mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}{}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^* : J \overset{\wedge}{\Sigma} =$$

$$= J\overset{\wedge}{\Sigma} : \frac{1}{2}d(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^*) = J\overset{\wedge}{\Sigma} : \frac{1}{2}d(\mathbf{1}) = 0. \tag{2.8}$$

Следовательно, формулу (2.7) можно записать так:

$$dA = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\} : d\,\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}\,d\,\overset{\circ}{V}\,. \tag{2.9}$$

3. Основываясь на формуле (2.9), поясним сущность понятия *"сопряженная пара тензоров"*. Как было сказано, dA представляет собой элементарную работу, совершаемую всеми внешними силами (включая силы инерции) на бесконечно малом перемещении $d\mathbf{u}$. Если же возникнет потребность вычислить работу названных сил при (конечном) переходе из промежуточного (или начального) состояния (1) в некоторое состояние (2), то следует пользоваться формулой

$$A^{(1-2)} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left[\int\limits_{(1)}^{(2)} \left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\} : d\,\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}\right] d\,\overset{\circ}{V} =$$

$$= \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \left[\int\limits_{(1)}^{(2)} \left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\}_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta}\right] d\,\overset{\circ}{V}$$

$$(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta = \lambda_\alpha\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha). \tag{3.1}$$

Для *идеально упругого тела* работа $A^{(1-2)}$ не зависит от пути деформирования, что означает наличие функции $\Phi(\lambda_{ij})$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{(1)}^{(2)} \left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\}_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_{\alpha\beta}} d\lambda_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

или

$$\left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\,\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\}_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_{ij}}, \quad i,j\in 1:3. \tag{3.2$'$}$$

При этом очевидно, что *упругий потенциал напряжений* $\Phi(\lambda_{ij})$ является величиной инвариантной и в случае *изотропного* материала (при рассмотрении, например, в качестве обобщенных смещений компонент тензора $\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$) имеет вид

$$\Phi = \Phi(I_\Lambda, II_\Lambda, III_\Lambda). \tag{3.3}$$

($I_\Lambda, II_\Lambda, III_\Lambda$ - главные инварианты тензора $\overset{\circ}{\Lambda}$.)

Убедимся, что стоящие в правой части формулы (3.2′) производные являются компонентами тензора 2-го ранга. Действительно, имеем

$$\Phi_{ij} \overset{\triangle}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{\alpha'\beta'}} \frac{\partial \lambda_{\alpha'\beta'}}{\partial \lambda_{ij}} = \Phi_{\alpha'\beta'} q_{\alpha' i} q_{\beta' j} \tag{3.4}$$

$$(\lambda_{k'l'} = \lambda_{\alpha\beta} q_{\alpha k'} q_{\beta l'},\ q_{ij'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{j'}).$$

Названный (симметричный) тензор можно обозначить так:

$$\frac{d\Phi}{d\overset{\circ}{\Lambda}} \overset{\triangle}{=} \Phi_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \Phi_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha. \tag{3.5}$$

Формулы (3.2), (3.2′) эквивалентны при этом следующим:

$$\int_{(1)}^{(2)} \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \right\} : d\overset{\circ}{\Lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{d\Phi}{d\overset{\circ}{\Lambda}} : d\overset{\circ}{\Lambda}, \tag{3.6}$$

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \right\} = \frac{d\Phi}{d\overset{\circ}{\Lambda}}. \tag{3.6′}$$

4. Если принять тензор $\overset{\circ}{\Lambda}$ в качестве основного и учесть тождество Гамильтона-Кэли, то набор тензоров деформации, переходящих при линеаризации в тензор малых деформаций Коши, исчерпывается следующими функциями тензора кратности удлинений:

$$\overset{\circ}{\Lambda} - \mathbf{1},\ \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\Lambda}{}^2 - \mathbf{1}),\ ln\,\overset{\circ}{\Lambda},\ \mathbf{1} - \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1},\ \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-2}). \tag{4.1}$$

При этом в силу соотношений

$$\overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1} = \frac{1}{III_\Lambda}(\overset{\circ}{\Lambda}{}^2 - I_\Lambda \overset{\circ}{\Lambda} + II_\Lambda \mathbf{1}),$$

$$\overset{\circ}{\Lambda}{}^{-2} = \frac{1}{III_\Lambda}(\overset{\circ}{\Lambda} - I_\Lambda \mathbf{1} + II_\Lambda \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1}), \tag{4.2}$$

казалось бы, надобность в последних двух тензорных функциях из набора (4.1) отпадает. Однако использование названных функций в качестве обобщенных смещений (не прибегая к формулам (4.2)) позволяет сопоставить им более компактные выражения для тензоров напряжений.

Используя свойства (1.2) двойного скалярного произведения, получим тензоры напряжений, составляющие вместе с (4.1) сопряженные (или *энергетические* для рассматриваемого изотропного материала) пары $(\sigma^э, \varepsilon^э)$.

Очевидно, что *первому тензору относительных удлинений* $\overset{\circ}{\Lambda} - \mathbf{1}$ отвечает уже полученный выше *тензор напряжений Био* [2]

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \right\}, \tag{4.3}$$

от которого в силу симметричности $\overset{\circ}{\Lambda}$ достаточно учитывать лишь симметричную часть (см. свойство *iii*) в п.1)

$$\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^* \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*} \right\}. \tag{4.3$'$}$$

Рассмотрим *тензор Грина-Лагранжа* $\overset{\circ}{\Gamma} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\Lambda}{}^2 - \mathbf{1})$. Имеем (см. (3.1))

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} : d\overset{\circ}{\Lambda} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1} : \overset{\circ}{\Lambda} \cdot d\overset{\circ}{\Lambda} = \\ &= \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*} \right\} : d\overset{\circ}{\Gamma}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Симметричный тензор $\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*} \right\}$ называют *тензором напряжений Пиолы-Кирхгофа* [2].

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} : d\overset{\circ}{\Lambda} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\Lambda} : \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1} \cdot d\,\overset{\circ}{\Lambda} = \\ = \left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F} \right\} : d\ln\overset{\circ}{\Lambda} &= \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\Lambda} : d\ln\overset{\circ}{\Lambda} = \\ &= \left\{ \mathbf{Q}^* \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \right\} : d\ln\overset{\circ}{\Lambda}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, *тензору логарифмической деформации* $\ln\overset{\circ}{\Lambda}$ отвечают две формы представления тензора напряжений:

$$\left\{ \mathbf{Q}^* \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \right\} \tag{4.6$_1$}$$

и

$$\left\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{F}\right\}. \qquad (4.6)_2$$

□ *Тензор напряжений Кирхгофа* $J\overset{\wedge}{\Sigma}$ (представляющий произведение *тензора истинных напряжений Коши* на скалярную функцию J) изначально связан с актуальной конфигурацией. Если тензор $\overset{\circ}{\Lambda}$ отнести к главным осям с ортами $\overset{\circ}{\mathrm{e}}_i$, $i\in 1:3$, то соответствующий тензор Кирхгофа будет иметь вид

$$J\overset{\wedge}{\Sigma}=J\sigma_{\alpha\beta}\hat{e}_\alpha\hat{e}_\beta,$$

где

$$\hat{e}_i=\mathbf{Q}\cdot\mathrm{e}_i \quad (\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\delta_{ij}).$$

Это означает, что тензору логарифмической деформации при лагранжевом описании движения энергетически отвечает тензор

$$\left\{\mathbf{Q}^*\cdot J\overset{\wedge}{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}\right\}=J\sigma_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathrm{e}}_\alpha\overset{\circ}{\mathrm{e}}_\beta\overset{\triangle}{=}J\overset{\circ}{\Sigma}=J\sigma_\alpha\overset{\circ}{\mathrm{e}}_\alpha\overset{\circ}{\mathrm{e}}_\alpha. \qquad (4.7)$$

(Здесь учтено, что сопряженные тензоры деформаций и напряжений в случае изотропного материала соосны.)

Введем в рассматриваемом трехмерном евклидовом пространстве материальные криволинейные координаты $\alpha^i, i\in 1:3$, связанные с декартовыми координатами формулами

$$x_i=x_i(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3), \quad i\in 1:3,$$

и такие, что

$$det\left[\frac{\partial x_i}{\partial\alpha^j}\right]\neq 0.$$

Тогда векторы

$$\mathbf{R}_i=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\alpha^i}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial\alpha^i}\mathrm{e}_\alpha, \quad i\in 1:3 \qquad (4.8)$$

образуют (вообще говоря, косоугольный) *основной* базис, а векторы

$$\mathbf{R}^j=\frac{\partial\alpha^j}{\partial x_\beta}\mathrm{e}_\beta, \quad j\in 1:3, \qquad (4.9)$$

составляют *взаимный* базис, т.е. такой, что

$$\mathbf{R}_i\cdot\mathbf{R}^j=\delta_i^j.$$

Тензор-градиент движения при использовании криволинейных координат принимает вид

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_\beta} \mathrm{e}_\alpha \mathrm{e}_\beta = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \alpha^\nu} \mathrm{e}_\alpha \right) \left(\frac{\partial \alpha^\nu}{\partial \overset{\circ}{x}_\beta} \mathrm{e}_\beta \right) = \mathbf{R}_\nu \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^\nu. \tag{4.10}$$

При этом имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i, \quad \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_i,$$

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{F}^{-1*} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j, \quad \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j = \overset{*}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{R}^j. \tag{4.11}$$

Записывая тензор Кирхгофа в виде

$$J \overset{\wedge}{\Sigma} = J\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta, \tag{4.12}$$

приходим к следующим представлениям для тензоров номинальных напряжений, Пиолы-Кирхгофа и тензора $(4.6)_2$:

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \right\} = J\sigma^{\alpha\beta} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha) \mathbf{R}_\beta = J\sigma^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{R}_\beta,$$

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*} \right\} = J\sigma^{\alpha\beta} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha)(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_\beta) = J\sigma^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{R}}_\beta,$$

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \cdot J \overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{F} \right\} = J\sigma^{\alpha\beta} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha)(\mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{R}_\nu) \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^\nu = J\sigma^\alpha_\beta \overset{\circ}{\mathbf{R}}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^\beta. \tag{4.13}$$

Нетрудно убедиться, что в криволинейных координатах в качестве энергетически парного тензору логарифмической деформации предпочтительней использовать тензор напряжений $(4.6)_2$. Тензор $(4.6)_1$ является более удобным при использовании декартовых координат. Вместе с тем в криволинейных координатах сам тензор логарифмической деформации не является "технологичным". Здесь традиционно используются тензоры деформаций Грина и Альманси (последний см. ниже), связанные простейшими зависимостями с метрическими тензорами актуальной и исходной конфигураций [2] ■

Далее рассмотрим *второй тензор относительных удлинений* $\mathbf{1} - \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1}$. Имеем

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} : \overset{\circ}{\Lambda}{}^2 \cdot d(\mathbf{1} - \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1}) = \overset{\circ}{\Lambda} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot J\overset{\wedge}{\Sigma} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\Lambda} : d(\mathbf{1} - \overset{\circ}{\Lambda}{}^{-1}) =$$

Литература

1. **Хилл Р.** Об определяющих неравенствах для простых материалов//*Механика:Сб.переводов*.1969.N4.C.94-118.

2. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение,1986.336с.

3. **Михайловский Е.И., Торопов А.В.** Математические модели теории упругости/Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1995.251с.

4. **Черных К.Ф.** О постулате устойчивости анизотропного материала// *Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию акад. В.Н.Челомея).* М.:Произв.-изд. комбинат ВИНИТИ, 1974.С.721-730.

Summary

Mikhailovskii E. I. The noncoordinate method of obtaining of the conjuctive couples of the tensors

The propities of the double scalar product of the second range tensors are systematized. These properties permit to perform in the noncoordinate form the identical transformations of the expressions for the energy of the elastic deformation and thus, in particular, to derive the various conjugate (according to R. Hill [1]) couples of the tensors. Some singularities of this couples of the tensors are established for the case of the isotropic ideally elastic body.

Сыктывкарский университет

Поступила 30.01.96