Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 519.652

Квадратичная вариационная задача с условием неотрицательности

В. А. Кирушев

Установлены необходимые и достаточные условия оптимальности для многоточечной квадратичной вариационной задачи с условием неотрицательности. Доказана теорема единственности решения. Для случая постоянных коэффициентов получено решение в явном виде.

§1. Введение

Пусть заданы конечный отрезок $\mathrm{I} = [a,b]$, упорядоченная система узлов $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, положительные значения y_1, $y_2, \ldots, y_n$ и функции $p \in C^1(\mathrm{I})$, $q \in C(\mathrm{I})$, $f \in C(\mathrm{I})$. Предполагается, что $p(t) > 0$, $q(t) \geq 0$ и $f(t) \geq 0$ на I. Рассмотрим экстремальную задачу

$$Q(x(t)) := \int_a^b \left[p(t)\left(x'(t)\right)^2 + q(t)x^2(t) + 2f(t)x(t)\right]\, dt \to \inf, \tag{1}$$
$$x \in W_2^1(\mathrm{I}); \quad x(t_j) = y_j,\ j \in 1:n; \quad x(t) \geq 0 \text{ на } \mathrm{I},$$

где $W_2^1(\mathrm{I})$ — класс абсолютно непрерывных на I функций, у которых первая производная суммируема с квадратом на I. В дальнейшем аргумент t будем опускать.

Множество планов задачи (1) обозначим через M^+. Зафиксируем индекс $j \in 2:n$ и покажем, что задача (1) распадается на $n-1$ независимую задачу

$$Q_j(x) := \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[p(x')^2 + qx^2 + 2fx\right]\, dt \to \inf, \tag{2}$$
$$x \in W_2^1(\mathrm{I}_j); \quad x(t_{j-1}) = y_{j-1},\ x(t_j) = y_j; \quad x(t) \geq 0 \text{ на } \mathrm{I}_j,$$

где $\mathrm{I}_j = [t_{j-1}, t_j]$. Действительно, пусть x_j — решение задачи (2). Рассмотрим функцию

$$x_*(t) = x_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_{j-1}, t_j],\ j \in 2 : n.$$

Легко показать, что x_* является планом задачи (1). Для любой функции x из M^+ имеем

$$Q(x) = \sum_{j=2}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[p(x')^2 + qx^2 + 2fx\right]\, dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=2}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[p(x_j')^2 + qx_j^2 + 2fx_j\right]\, dt = Q(x_*).$$

Следовательно, x_* — решение задачи (1).

Все последующие полученные в работе результаты относятся к анализу задачи (2) при фиксированном индексе $j \in 2 : n$. Аналогичные результаты для многоточечной квадратичной вариационной задачи со второй производной при ограничении неотрицательности получены в [1].

§2. Предварительные результаты

Обозначим через Ω^+ множество функций, удовлетворяющих ограничениям задачи (2). Положим

$$u := t_{j-1}, \quad v := t_j, \quad l := y_{j-1}, \quad r := y_j.$$

С каждой функцией $x_* \in \Omega^+$ свяжем два множества *допустимых вариаций*

$$\mathcal{H}_* = \left\{h \in W_2^1[u,v] \mid h(u) = h(v) = 0,\ h(t) \geq -x_*(t) \text{ на } [u,v]\right\},$$

$$\mathcal{H}_*^+ = \left\{h \in W_2^1[u,v] \mid h(u) = h(v) = 0,\ |h(t)| \leq x_*(t) \text{ на } [u,v]\right\}.$$

Лемма 1. *Для того чтобы функция $x_* \in \Omega^+$ была решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_u^v (px_*'h' + qx_*h + fh)\, dt \geq 0 \qquad \forall h \in \mathcal{H}_*. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Для любой вариации $h \in \mathcal{H}_*$ справедливо разложение

$$\frac{1}{2}\left[Q_j(x_* + h) - Q_j(x_*)\right] =$$
$$= \int_u^v (px_*'h' + qx_*h + fh)\, dt + \frac{1}{2}\int_u^v \left[p(h')^2 + qh^2\right] dt. \tag{4}$$

Вместе с h множеству $\mathcal{H}_*$ принадлежит и αh при $\alpha \in (0,1)$. Учитывая, что x_* — решение задачи (2), запишем

$$0 \le \frac{1}{2}\left[Q_j(x_* + \alpha h) - Q_j(x_*)\right] =$$
$$= \alpha \int_u^v (px_*'h' + qx_*h + fh)\, dt + \frac{\alpha^2}{2}\int_u^v \left[p(h')^2 + qh^2\right] dt.$$

Поделив это неравенство на α и перейдя к пределу при $\alpha \to +0$, получим (3).

Достаточность сразу следует из разложения (4) и неравенства (3). Лемма доказана.

Следствие. *Если x_* — решение задачи* (2), *то необходимо*

$$\int_u^v (px_*'h' + qx_*h + fh)\, dt = 0 \qquad \forall h \in \mathcal{H}_*^+. \tag{5}$$

Действительно, h принадлежит $\mathcal{H}_*^+$ тогда и только тогда, когда $h \in \mathcal{H}_*$ и $-h \in \mathcal{H}_*$.

Теорема 1. *Если решение задачи* (2) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть x и x_* — два решения задачи (2). Тогда $Q_j(x) = Q_j(x_*)$. Функция $h = x - x_*$ принадлежит $\mathcal{H}_*$. Согласно (4)

$$\int_u^v (px_*'h' + qx_*h + fh)\, dt + \frac{1}{2}\int_u^v \left[p(h')^2 + qh^2\right] dt = 0.$$

Учитывая (3), получаем $\int_u^v \left[p(h')^2 + qh^2\right] dt = 0$. Отсюда следует, что $h(t) \equiv 0$ или $x(t) \equiv x_*(t)$ на $[u, v]$. Теорема доказана.

§3. Критерий оптимальности

Каждой функции $x_* \in \Omega^+$ сопоставим *расширенную систему узлов* Δ_*. В Δ_* включим узлы u, v и, возможно, *дополнительные узлы*, которые выбираются по следующему правилу:

а) если на интервале (u, v) функция x_* обращается в ноль в единственной точке τ, то τ включаем в Δ_*;

б) если на интервале (u, v) функция x_* имеет два или более нулей, то инфимум и супремум множества нулей на (u, v) дают два дополнительных узла.

Узлы Δ_* упорядочим по возрастанию

$$u = \tau_0 < \ldots < \tau_{m+1} = v, \qquad 0 \leq m \leq 2.$$

Теорема 2. *Пусть $x_* \in \Omega^+$ и Δ_* — расширенная система узлов. Для того чтобы функция x_* была решением задачи* (2), *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $x_* \in C^1[u, v]$;
2) *если $m = 2$, то $x_*(t) \equiv 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$;*
3) *сужение x_* на каждый из оставшихся отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$(px')' - qx = f. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Функция x_* положительна на $[\tau_0, \tau_1]$ за исключением, может быть, точки $t = \tau_1$. Покажем, что на $[\tau_0, \tau_1]$ решение x_* удовлетворяет уравнению (6).

Введем отрезок $\mathrm{J}_\varepsilon = [\tau_0 + \varepsilon, \tau_1 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — малое число. Очевидно, что наименьшее значение x_* на J_ε положительно. Возьмем любую функцию $h \in W_2^1(\mathrm{J}_\varepsilon)$, обращающуюся в ноль на концах отрезка J_ε, и продолжим ее нулем на весь отрезок $[u, v]$. Функция αh при малых α будет принадлежать множеству допустимых вариаций $\mathcal{H}_*^+$. Поэтому согласно (5)

$$\int_{\mathrm{J}_\varepsilon} [px_*'h' + (qx_* + f)h]\, dt = 0. \tag{7}$$

Воспользуемся основной леммой вариационного исчисления [2, с. 208], согласно которой из равенства (7), справедливого для любой функции $h \in W_2^1(\mathrm{J}_\varepsilon)$, удовлетворяющей граничным условиям $h(\tau_0+\varepsilon) = h(\tau_1-\varepsilon) = 0$, следует, что

$$p(t)x_*'(t) = \int_{\tau_0}^{t} (qx_* + f)\,d\theta + \mathrm{const}, \quad t \in \mathrm{J}_\varepsilon.$$

Это значит, что функция px_*' дифференцируема на J_ε и выполнено равенство $(px_*')' = qx_* + f$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее равенство справедливо на интервале (τ_0, τ_1), а в силу непрерывности правой части — и на всем отрезке $[\tau_0, \tau_1]$.

Если $m = 1$ или $m = 2$, то аналогичным образом устанавливается, что x_* удовлетворяет уравнению (6) и на отрезке $[\tau_m, \tau_{m+1}]$.

Покажем, что в случае $m = 2$ функция $x_*(t) \equiv 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$. Допустим, вопреки утверждению, что $x_*(t) \not\equiv 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$. Введем план задачи (2)

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ x_*(t) & \text{при остальных } t \in [u, v]. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что $Q_j(x_1) \le Q_j(x_*)$. В силу единственности решения $x_1(t) \equiv x_*(t)$, что противоречит построению. Установлено, что $x_*(t) \equiv 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$.

Теперь докажем, что при $m = 1$ или $m = 2$ первая производная решения x_*' непрерывна в дополнительных узлах. Для любой вариации $h \in \mathcal{H}_*$ согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_u^v \left[px_*'h' + (qx_* + f)h\right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[px_*'h' + (qx_* + f)h\right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[-(px_*')' + qx_* + f\right] h\,dt + \sum_{i=1}^{m+1} px_*'h\Big|_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}. \end{aligned}$$

Если $m = 1$, то учитывая, что $-(px_*')' + qx_* + f = 0$ на $[u, v]$, получаем для $h \in \mathcal{H}_*$

$$p(\tau_1)h(\tau_1)\left[x_*'(\tau_1 - 0) - x_*'(\tau_1 + 0)\right] \ge 0. \qquad (8)$$

Введем вариацию

$$h_1(t) = (t - \tau_1 + \varepsilon)_+(\tau_1 + \varepsilon - t)_+,$$

где $z_+ = \max\{0, z\}$, $\varepsilon > 0$ — столь малое число, что $\tau_0 < \tau_1 - \varepsilon <$ $< \tau_1 + \varepsilon < \tau_2$. Очевидно, что h_1 принадлежит $\mathcal{H}_*$. Подставим h_1 в выражение (8). Учитывая, что $h_1(\tau_1) = \varepsilon^2$, получаем неравенство $x'_*(\tau_1 - 0) \geq x'_*(\tau_1 + 0)$.

Вместе с тем, τ_1 — точка локального минимума функции x_*, поэтому $x'_*(\tau_1 - 0) \leq x'_*(\tau_1 + 0)$. Объединив два неравенства, придем к равенству

$$x'_*(\tau_1 - 0) = x'_*(\tau_1 + 0).$$

Если $m = 2$, то $-(px'_*)' + qx_* + f = 0$ на $[\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_2, \tau_3]$. Для $h \in \mathcal{H}_*$ получаем

$$\begin{gathered} p(\tau_1)h(\tau_1)\left[x'_*(\tau_1 - 0) - x'_*(\tau_1 + 0)\right] + \\ + p(\tau_2)h(\tau_2)\left[x'_*(\tau_2 - 0) - x'_*(\tau_2 + 0)\right] + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f h\, dt \geq 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставим вариацию h_1 в выражение (9). Учитывая, что $h_1(\tau_1) = \varepsilon^2$ и

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f h_1\, dt \leq f_* \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1 + \varepsilon} h_1\, dt = \frac{4}{3}\varepsilon^3 f_*,$$

где $f_* = \max\limits_{t \in [u,v]} f(t)$, получаем неравенство

$$\varepsilon^2 p(\tau_1)\left[x'_*(\tau_1 - 0) - x'_*(\tau_1 + 0)\right] + \frac{4}{3}\varepsilon^3 f_* \geq 0.$$

Поделив это неравенство на $\varepsilon^2 p(\tau_1)$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем неравенство $x'_*(\tau_1 - 0) \geq x'_*(\tau_1 + 0)$. Поскольку τ_1 — точка локального минимума функции x_*, то $x'_*(\tau_1 - 0) \leq x'_*(\tau_1 + 0)$. В итоге приходим к равенству

$$x'_*(\tau_1 - 0) = x'_*(\tau_1 + 0).$$

Аналогично получаем равенство

$$x'_*(\tau_2 - 0) = x'_*(\tau_2 + 0).$$

Непрерывность первой производной решения x'_* в дополнительных узлах установлена.

Достаточность. Согласно условиям теоремы для любой вариации $h \in \mathcal{H}_*$ имеем

$$\int_u^v \left[px_*'h' + (qx_* + f)h\right] dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0, 1; \\ \displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} fh\, dt \geq 0 & \text{при } m = 2. \end{cases}$$

В случае $m = 2$ мы воспользовались тем, что $h(t) \geq -x_*(t) = 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$. Остается сослаться на лемму 1.

Теорема доказана.

§4. Частный случай

В [3] рассмотрена сеточная аппроксимация задачи (2). В данном параграфе предъявляется явное решение задачи (2) при постоянных коэффициентах

$$p(t) \equiv p > 0, \quad q(t) \equiv q \geq 0, \quad f(t) \equiv f \geq 0.$$

Уравнение (6) в этом случае принимает вид

$$px'' - qx = f. \tag{10}$$

4.1. Пусть $q = 0$, $f = 0$. Решением уравнения (10), удовлетворяющим граничным условиям $x(u) = l$, $x(v) = r$, является функция

$$x_*(t) = \frac{l(v-t) + r(t-u)}{v-u}.$$

Поскольку $x_*(t) > 0$ на $[u, v]$, то x_* является решением задачи (2).

4.2. Пусть $q = 0$, $f > 0$. Рассмотрим функцию

$$x_0(t) = \frac{f}{2p}(t-u)(t-v) + \frac{l(v-t) + r(t-u)}{v-u}.$$

Очевидно, что x_0 удовлетворяет уравнению (10) и граничным условиям $x(u) = l$, $x(v) = r$. Кроме того, функция x_0 является строго выпуклой на $\mathbb{R}$ с единственной точкой минимума

$$t_* = \frac{u+v}{2} - \frac{p}{f} \cdot \frac{r-l}{v-u}.$$

Если $t_* \notin (u,v)$, то в силу монотонности функция x_0 положительна на $[u,v]$ и, следовательно, является решением задачи (2).

Лемма 2. *Для того чтобы точка t_* принадлежала интервалу (u,v), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}|l-r| > 0. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $t_* \in (u,v)$. Из неравенств $u < \dfrac{u+v}{2} - \dfrac{p}{f}\cdot\dfrac{r-l}{v-u} < v$ следует, что

$$f > \frac{2p}{(v-u)^2}(r-l) \quad \text{и} \quad f > \frac{2p}{(v-u)^2}(l-r).$$

Отсюда получаем неравенство (11).

Достаточность. Если $l = r$, то $t_* = \dfrac{u+v}{2} \in (u,v)$. Пусть $l \neq r$. Из того, что

$$f > \frac{2p}{(v-u)^2}(r-l) \quad \text{и} \quad f > \frac{2p}{(v-u)^2}(l-r)$$

следует

$$t_* > \frac{u+v}{2} - \frac{v-u}{2} = u \quad \text{и} \quad t_* < \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = v.$$

Лемма доказана.

Пусть выполнено неравенство (11), т. е. $t_* \in (u,v)$. Найдем значение функции x_0 в точке t_*.

$$x_0(t_*) = -\frac{f}{8p}(v-u)^2 + \frac{l+r}{2} - \frac{p}{2f}\left(\frac{r-l}{v-u}\right)^2 =$$

$$= -\frac{(v-u)^2}{8pf}\left[f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l}+\sqrt{r}\right)^2\right]\left[f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l}-\sqrt{r}\right)^2\right].$$

Согласно лемме 2

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l}-\sqrt{r}\right)^2 \geq f - \frac{2p}{(v-u)^2}|l-r| > 0.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для того чтобы функция x_0 была неотрицательной на $[u, v]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l} + \sqrt{r}\right)^2 \le 0. \tag{12}$$

При этом $x_0(t) > 0$ на $[u, v]$ тогда и только тогда, когда неравенство (12) выполняется как строгое.

Теперь рассмотрим случай, когда решение задачи (2) имеет на интервале (u, v) два дополнительных узла $\tau_1 < \tau_2$. Таким решением является функция

$$x_2(t) := \begin{cases} \dfrac{f}{2p}(\tau_1 - t)^2, & t \in [u, \tau_1], \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \dfrac{f}{2p}(t - \tau_2)^2, & t \in [\tau_2, v], \end{cases}$$

где

$$\tau_1 = u + \sqrt{\frac{2pl}{f}}, \quad \tau_2 = v - \sqrt{\frac{2pr}{f}}.$$

Предположив, что $\tau_1 < \tau_2$ или, что то же самое,

$$v - u > \sqrt{\frac{2pl}{f}} + \sqrt{\frac{2pr}{f}}, \tag{13}$$

получаем, что x_2 является решением задачи (2) с двумя дополнительными узлами. При этом выполнено неравенство (11). Действительно, неравенство (13) эквивалентно неравенству

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l} + \sqrt{r}\right)^2 > 0.$$

Учитывая, что

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}|l - r| \ge f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l} + \sqrt{r}\right)^2 > 0,$$

получаем неравенство (11).

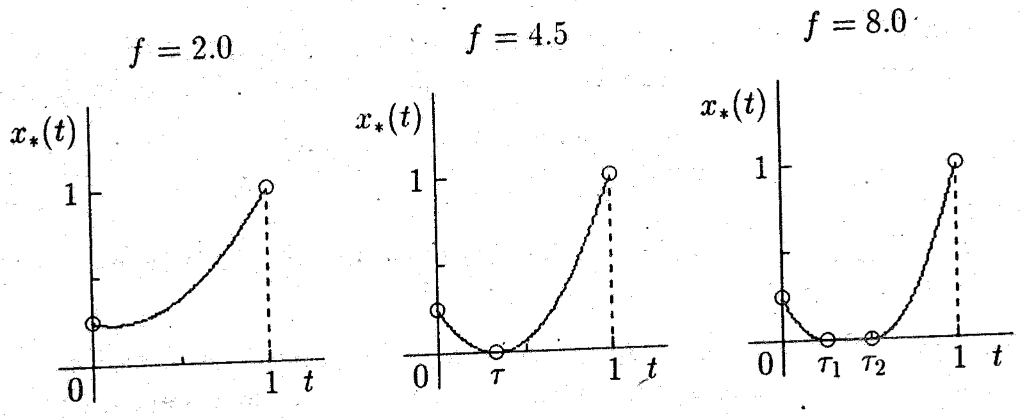

Рис. 1

Легко устанавливается тот факт, что для того чтобы неравенство (13) не выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (12). При этом

$$v - u = \sqrt{\frac{2pl}{f}} + \sqrt{\frac{2pr}{f}}$$

тогда и только тогда, когда

$$f - \frac{2p}{(v-u)^2}\left(\sqrt{l} + \sqrt{r}\right)^2 = 0.$$

Это позволяет говорить о неравенстве (13) как о критерии для выбора числа дополнительных узлов:

если неравенство (13) *выполнено, то решением задачи* (2) *является функция* x_2 *с двумя дополнительными узлами; если неравенство* (13) *не выполнено и обращается в равенство, то решением задачи* (2) *является функция* x_0 *с одним дополнительным узлом* $\tau = t_*$, *иначе решением задачи* (2) *является функция* x_0 *без дополнительных узлов.*

На рис. 1 изображены графики решений x_* задачи (2) при $u = 0$, $v = 1$, $l = 0.25$, $r = 1$, $p = 1$, $q = 0$ и следующих значениях f:

$f = 2.0$ — нет дополнительных узлов;
$f = 4.5$ — один дополнительный узел $\tau = t_* = 1/3$;
$f = 8.0$ — два дополнительных узла $\tau_1 = 0.25$, $\tau_2 = 0.5$.

4.3. Пусть $q > 0$, $f = 0$. Решением уравнения (10), удовлетворяющим граничным условиям $x(u) = l$, $x(v) = r$, является функция

$$x_*^+(t) = \frac{l \operatorname{sh} k(v-t) + r \operatorname{sh} k(t-u)}{\operatorname{sh} k(v-u)},$$

где $k = \sqrt{\dfrac{q}{p}}$. Поскольку $x_*^+(t) > 0$ на $[u, v]$, то x_*^+ является решением задачи (2).

4.4. Пусть $q > 0$, $f > 0$. Рассмотрим функцию

$$x_0^+(t) = \frac{L \operatorname{sh} k(v-t) + R \operatorname{sh} k(t-u)}{\operatorname{sh} k(v-u)} - \frac{f}{q},$$

где $k = \sqrt{\dfrac{q}{p}}$, $L = l + \dfrac{f}{q}$, $R = r + \dfrac{f}{q}$. Очевидно, что x_0^+ удовлетворяет уравнению (10) и граничным условиям $x(u) = l$, $x(v) = r$. Кроме того, функция x_0^+ является строго выпуклой на $\mathbf{R}$. Если x_0^+ не имеет точки минимума на $\mathbf{R}$ или точка минимума t_* не принадлежит интервалу (u, v), то в силу монотонности функция x_0^+ положительна на $[u, v]$ и, следовательно, является решением задачи (2).

Пусть точка минимума t_* функции x_0^+ существует. Обозначим

$$f_* = \frac{q}{\operatorname{ch} k(v-u) - 1} \max\{r - l \operatorname{ch} k(v-u),\ l - r \operatorname{ch} k(v-u)\}.$$

Лемма 4. *Для того чтобы точка t_* принадлежала интервалу (u, v), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f > f_*$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $t_* \in (u, v)$. Из равенства

$$(x_0^+)'(t_*) = \frac{k}{\operatorname{sh} k(v-u)} \big[R \operatorname{ch} k(t-u) - L \operatorname{ch} k(v-t)\big] = 0$$

следует, что t_* является корнем уравнения

$$V(t) := L \operatorname{ch} k(v-t) = R \operatorname{ch} k(t-u) =: U(t). \qquad (14)$$

Тогда, необходимо и достаточно, чтобы

$$V(u) = L \operatorname{ch} k(v-u) > R, \quad U(v) = R \operatorname{ch} k(v-u) > L. \qquad (15)$$

Объединяя оба неравенства, получаем, что $f > f_*$.

Достаточность. Если $f > f_*$, то выполнены неравенства (15). По свойствам функций $V(t)$ и $U(t)$ получаем, что уравнение (14) имеет на (u, v) единственный корень, являющейся одновременно корнем уравнения $(x_0^+)'(t) = 0$.

Лемма доказана.

Пусть выполнено неравенство $f > \max\{0, f_*\}$, т. е. $t_* \in (u, v)$. Найдем значение функции x_0^+ в точке t_*.

$$x_0^+(t_*) = \frac{L}{\operatorname{sh} k(v-u)}\left[\operatorname{sh} k(v-t_*) + \frac{R}{L}\operatorname{sh} k(t_*-u)\right] - \frac{f}{q} =$$
$$= \frac{L}{\operatorname{sh} k(v-u)}\left[\operatorname{sh} k(v-t_*) + \frac{\operatorname{ch} k(v-t_*)}{\operatorname{ch} k(t_*-u)}\operatorname{sh} k(t_*-u)\right] - \frac{f}{q} =$$
$$= \frac{L}{\operatorname{ch} k(t_*-u)} - \frac{f}{q}.$$

Аналогично получаем

$$x_0^+(t_*) = \frac{R}{\operatorname{ch} k(v-t_*)} - \frac{f}{q}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Для того чтобы функция x_0^+ была неотрицательной на $[u, v]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{L}{\operatorname{ch} k(t_*-u)} \geq \frac{f}{q}. \tag{16}$$

При этом $x_0^+(t) > 0$ на $[u, v]$ тогда и только тогда, когда неравенство (16) выполняется как строгое.

Теперь рассмотрим случай, когда решение задачи (2) имеет на интервале (u, v) два дополнительных узла $\tau_1 < \tau_2$. Таким решением является функция

$$x_2^+(t) := \begin{cases} \dfrac{f}{q}[\operatorname{ch} k(\tau_1 - t) - 1], & t \in [u, \tau_1], \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \dfrac{f}{q}[\operatorname{ch} k(t - \tau_2) - 1], & t \in [\tau_2, v], \end{cases}$$

где
$$\tau_1 = u + \frac{1}{k}\operatorname{arch}\frac{q}{f}L, \quad \tau_2 = v - \frac{1}{k}\operatorname{arch}\frac{q}{f}R.$$

Предположив, что $\tau_1 < \tau_2$ или, что то же самое,
$$k(v-u) > \operatorname{arch}\frac{q}{f}L + \operatorname{arch}\frac{q}{f}R, \tag{17}$$

получаем, что x_2^+ является решением задачи (2) с двумя дополнительными узлами. При этом выполнено неравенство $f > f_*$. Действительно, воспользуемся формулой
$$\operatorname{arch} a + \operatorname{arch} b = \operatorname{arch}\left(ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}\right).$$

Из неравенства (17) имеем
$$\operatorname{ch} k(v-u) > \frac{q^2}{f^2}LR = \frac{q^2}{f^2}rl + \frac{q}{f}(r+l) + 1 > \frac{q}{f}(r+l) + 1.$$

Теперь из неравенств
$$\frac{f}{q}(\operatorname{ch} k(v-u) - 1) > r + l > r - l\operatorname{ch} k(v-u),$$
$$\frac{f}{q}(\operatorname{ch} k(v-u) - 1) > l + r > l - r\operatorname{ch} k(v-u)$$

получаем неравенство $f > f_*$.

Лемма 6. *Для того чтобы неравенство* (17) *не выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (16). *При этом*
$$k(v-u) = \operatorname{arch}\frac{q}{f}L + \operatorname{arch}\frac{q}{f}R$$

тогда и только тогда, когда
$$\frac{L}{\operatorname{ch} k(t_* - u)} = \frac{f}{q}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть неравенство (17) не выполнено. Предположим, вопреки утверждению, что неравенство (16) также не выполнено, т. е.
$$\operatorname{ch} k(t_* - u) > \frac{q}{f}L \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} k(v - t_*) > \frac{q}{f}R. \tag{18}$$

Вместе с тем

$$x_0^+(t_*) = \frac{L \operatorname{sh} k(v - t_*) + R \operatorname{sh} k(t_* - u)}{\operatorname{sh} k(v-u)} - \frac{f}{q}.$$

Из неравенств $x_0^+(t_*) < 0$ и (18) имеем

$$k(v-u) > \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \operatorname{sh} k(v-t_*) + \frac{q}{f} R \operatorname{sh} k(t_* - u)\right] =$$

$$= \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \sqrt{\operatorname{ch}^2 k(v-t_*) - 1} + \frac{q}{f} R \sqrt{\operatorname{ch}^2 k(t_* - u) - 1}\right] >$$

$$> \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \sqrt{\left(\frac{q}{f} R\right)^2 - 1} + \frac{q}{f} R \sqrt{\left(\frac{q}{f} L\right)^2 - 1}\right].$$

Воспользуемся равенством

$$\operatorname{arsh}\left(a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}\right) = \operatorname{arch} a + \operatorname{arch} b.$$

Получаем неравенство

$$k(v-u) > \operatorname{arch} \frac{q}{f} L + \operatorname{arch} \frac{q}{f} R,$$

что противоречит предположению. Следовательно, неравенство (16) выполнено.

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (16)

$$\operatorname{ch} k(t_* - u) \le \frac{q}{f} L \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} k(v - t_*) \le \frac{q}{f} R.$$

Предположим, что неравенство (17) также выполнено. Имеем

$$k(v-u) > \operatorname{arch} \frac{q}{f} L + \operatorname{arch} \frac{q}{f} R =$$

$$= \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \sqrt{\left(\frac{q}{f} R\right)^2 - 1} + \frac{q}{f} R \sqrt{\left(\frac{q}{f} L\right)^2 - 1}\right] \ge$$

$$\ge \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \sqrt{\operatorname{ch}^2 k(v-t_*) - 1} + \frac{q}{f} R \sqrt{\operatorname{ch}^2 k(t_8 - u) - 1}\right] =$$

$$= \operatorname{arsh}\left[\frac{q}{f} L \operatorname{sh} k(v-t_*) + \frac{q}{f} R \operatorname{sh} k(t_* - u)\right].$$

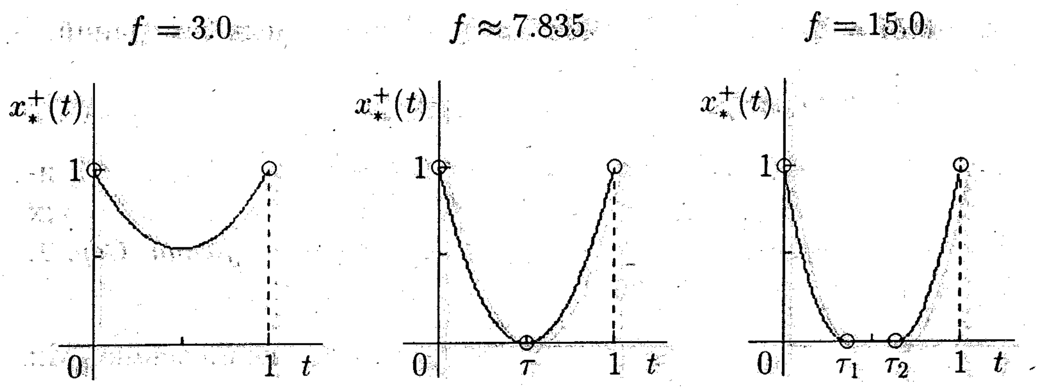

Рис. 2

Отсюда получаем, что

$$\frac{L \operatorname{sh} k(v - t_*) + R \operatorname{sh} k(t_* - u)}{\operatorname{sh} k(v - u)} - \frac{f}{q} < 0.$$

Это противоречит предположению, что $x_0^+(t_*) \geq 0$. Следовательно, неравенство (17) не выполнено.

Вторая часть леммы устанавливается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 6 позволяет говорить о неравенстве (17) как о критерии для выбора числа дополнительных узлов:

если неравенство (17) выполнено, то решением задачи (2) является функция x_2^+ с двумя дополнительными узлами; если неравенство (17) не выполнено и обращается в равенство, то решением задачи (2) является функция x_0^+ с одним дополнительным узлом $\tau = t_*$, являющимся корнем уравнения (14), иначе решением задачи (2) является функция x_0^+ без дополнительных узлов.

На рис. 2 изображены графики решений x_*^+ задачи (2) при $u = 0$, $v = 1$, $l = 1$, $r = 1$, $p = 1$, $q = 1$ и следующих значениях f:

$f = 3.0$ — нет дополнительных узлов;

$f = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 0.5 - 1} \approx 7.835$ — один дополнительный узел $\tau = t_* = 0.5$;

$f = 15.0$ — два дополнительных узла

$$\tau_1 = \operatorname{arch} \frac{1 + f}{f} \approx 0.363, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1 \approx 0.637.$$

Автор признателен А. Б. Певному за ряд полезных замечаний.

Литература

1. **Кирушев В. А., Малоземов В. Н.** Интерполяция положительных данных при помощи неотрицательных натуральных кубических сплайнов // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1.* 1995.Вып.2(№8).С.25–30.

2. **Ахиезер Н. И.** Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат,1955.248 с.

3. **Даутов Р. З.** Схема точности $O(h^2)$ определения свободной границы для одномерной задачи с препятствием // *Изв. вузов. Математика.* 1994.№9.С.39–48.

Summary

Kirushev V. A. The quadratic variational problem with nonnegativity condition

Multipoint quadratic variational problem with nonnegativity condition is considered. Necessary and sufficient conditions of optimality and uniqueness of solution for the problem is established. The solution at constant coefficients is given in an explicit form.

Сыктывкарский университет *Поступила 05.03.96*