Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 519.717

Путевая ширина и древесная ширина соединения графов [1]

П. А. Головач

В работе исследуется поведение путевой ширины и древесной ширины графов при различных операциях над графами. Даны некоторые оценки значений этих инвариантов для произведения графов через характеристики исходных графов. Основными результатами являются точные выражения, позволяющие вычислить путевую ширину и древесную ширину соединения графов.

Путевая ширина (pathwidth) (после названий характеристик графов на русском языке приводятся оригинальные английские названия, поскольку не существует общепринятых переводов) и древесная ширина (treewidth) являются близкими характеристиками графов, активно изучающимися в последнее время. Внимание к ним объясняется как теоретическим интересом, так и связью с приложениями. Среди работ, посвященных этим инвариантам, в первую очередь следует упомянуть серию статей Сеймура и Робертсона (см., в частности, [1, 2, 3, 4, 5, 6]), посвященную вопросам характеризации свойств графов с помощью миноров, конечной целью которой является доказательство предположения Вагнера. Оказалось, что путевая ширина и древесная ширина играют важную роль при решении задач, связанных с данной проблемой. Кроме того, вызывает интерес связь этих инвариантов с характеристиками графов, определяемыми с помощью оптимальных (по различным критериям) нумераций вершин. В частности (см. [7]), путевая ширина графа попросту совпадает с так называемой величиной вершинного разделения

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №96-01-00285, гранта Госкомитета РФ по высшему образованию №94-15-41 (КЦФЕ при СПбГУ) и программы "Университеты России"

(vertex separation number). Инварианты графов, определяемые с помощью оптимальных нумераций вершин, среди которых, кроме уже упомянутого, можно выделить ширину ленты графа (bandwidth) и ширину разреза (cutwidth), естественным образом возникают при решении прикладных задач. Более подробную информацию о путевой ширине и древесной ширине графов можно найти в обзоре [8].

При исследовании различных численных характеристик графов всегда представляет интерес изучение их поведения при различных операциях над графами. В случае путевой ширины и древесной ширины для большинства операций удается получить только оценки, связывающие значения инвариантов для результата операции с характеристиками исходных графов. Некоторые такие оценки для произведения графов приводятся в данной работе. Однако существует одна операция, для которой удается получить точные выражения. Это так называемое соединение графов. Получение этих выражений и является основным результатом нашей работы.

1. Основные понятия

В этом пункте вводятся основные понятия, необходимые для изложения результатов работы.

Пусть G — граф. Отметим сразу, что в данной работе рассматриваются только простые графы. Через $V(G)$ обозначается множество вершин графа G, а через $E(G)$ — множество ребер.

Путевой декомпозицией графа G называется путь P, каждой вершине которого v сопоставлено некоторое множество $X_v \subseteq V(G)$ таким образом, что выполнены следующие условия:

1. Каждое ребро G имеет оба конца в некотором множестве X_v.
2. Для любых $u, v, w \in V(P)$ таких, что вершина v лежит на пути P между вершинами u и w, $X_u \cap X_w \subseteq X_v$.
3. $\bigcup\limits_{v \in V(P)} X_v = V(G)$.

Шириной путевой декомпозиции называется величина

$$\max\{|X_v| : v \in V(P)\} - 1.$$

Путевая ширина графа определяется как минимальная ширина путевых декомпозиций. Путевая ширина графа G обозначается через $pw(G)$.

Древесная ширина графа определяется аналогично, только вместо пути в определении фигурирует дерево.

Древесной декомпозицией графа G называется дерево T, каждой вершине которого v сопоставлено некоторое множество $X_v \subseteq V(G)$ таким образом, что выполнены следующие условия:

1. Каждое ребро G имеет оба конца в некотором множестве X_v.
2. Для любых $u, v, w \in V(T)$ таких, что вершина v лежит на пути в дереве T, соединяющем вершины u и w, $X_u \cap X_w \subseteq X_v$.
3. $\bigcup\limits_{v \in V(T)} X_v = V(G)$.

Шириной древесной декомпозиции называется величина

$$\max\{|X_v| : v \in V(T)\} - 1.$$

Соответственно, древесная ширина графа определяется как минимальная ширина древесных декомпозиций. Древесная ширина графа G обозначается через $tw(G)$.

2. Путевая ширина и древесная ширина произведения графов

В этом пункте мы приведем некоторые из возможных оценок путевой ширины и древесной ширины произведения двух графов,

Напомним, что произведением графов G_1иG_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \times V(G_2)$ такой, что две вершины этого графа, то есть пары $\{u, v\}, \{w, z\} \in V(G_1) \times V(G_2)$, являются смежными тогда и только тогда, когда либо $u = w$ и вершины v и z являются смежными в графе G_2, либо $v = z$ и вершины u и w являются смежными в графе G_1.

Пусть G — граф. Обозначим через $l(G)$ число вершин в наибольшем (по числу вершин) пути в графе G.

Теорема 1. *Пусть G_1, G_2 — непустые графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Тогда*

$$\min\{l(G_1), l(G_2)\} \leq pw(G_1 \times G_2) \leq$$

$$\leq \min\{(pw(G_1) + 1)n_2, (pw(G_2) + 1)n_1\} - 1,$$

$$\min\{l(G_1), l(G_2)\} \le tw(G_1 \times G_2) \le$$
$$\le \min\{(tw(G_1)+1)n_2, (tw(G_2)+1)n_1\} - 1.$$

Обозначим через P_n граф, являющийся путем с n вершинами. Легко видеть, что граф $P_{l(G_1)} \times P_{l(G_2)}$, то есть прямоугольная решетка размерами $l(G_1) \times l(G_2)$, является подграфом графа $G_1 \times G_2$. Из этого вытекает, что

$$pw(P_{l(G_1)} \times P_{l(G_2)}) \le pw(G_1 \times G_2),$$

$$tw(P_{l(G_1)} \times P_{l(G_2)}) \le tw(G_1 \times G_2).$$

Остается заметить (см. [3]), что

$$pw(P_{l(G_1)} \times P_{l(G_2)}) = tw(P_{l(G_1)} \times P_{l(G_2)}) = \min\{l(G_1), l(G_2)\}.$$

Докажем теперь, что выполнена и верхняя оценка. Проведем доказательство для путевой ширины графа. Оценка для древесной ширины доказывается аналогично. Рассмотрим путевую декомпозицию графа G_1, обладающую шириной, равной $pw(G_1)$, то есть путь P, каждой вершине которого v сопоставлено некоторое множество X_v таким образом, что выполнены соответствующие три условия. Сопоставим каждой вершине v пути P множество $X_v \times V(G_2)$. Очевидно, что мы получим путевую декомпозицию графа $G_1 \times G_2$ с шириной $(pw(G_1)+1)n_2 - 1$. Следовательно, $pw(G_1 \times G_2) \le (pw(G_1)+1)n_2 - 1$. Аналогично доказывается, что $pw(G_1 \times G_2) \le (pw(G_2)+1)n_1 - 1$. Получаем, что $pw(G_1 \times G_2) \le \min\{(pw(G_1)+1)n_2, (pw(G_2)+1)n_1\} - 1$.

Теорема доказана.

Несмотря на простоту эта оценка оказывается точной в ряде случаев. Например, нижние оценки достигаются для произведения графов P_n и P_m, P_k и C_r при $3 \le r \le k$, где через C_r обозначается граф, являющийся циклом с r вершинами.

3. Путевая ширина и древесная ширина соединения графов

В этом пункте будут получены выражения для путевой ширины и древесной ширины соединения графов, являющиеся основными результатами данной работы.

Если G_1, G_2 — графы, $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, то соединением графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u,v): u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Будем обозначать соединение графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$.

Теорема 2. *Пусть G_1, G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно, $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Тогда*

$$pw(G_1 + G_2) = \min\{pw(G_1) + n_2, pw(G_2) + n_1\}, \tag{1}$$

$$tw(G_1 + G_2) = \min\{tw(G_1) + n_2, tw(G_2) + n_1\}. \tag{2}$$

Как уже было отмечено выше, для любого графа G имеет место равенство (см. [7]): $pw(G) = vs(G)$, где через $vs(G)$ обозначается величина вершинного разделения графа G. В работе [9] было показано, что для величины вершинного разделения соединения графов выполняется соотношение (1). Поэтому нам остается доказать выполнение равенства (2). Отметим, что равенство (1) можно получить аналогичным образом. Заметим также, что из результатов работы [9] соотношение (2) не вытекает.

Рассмотрим древесную декомпозицию графа G_1 с шириной, равной $tw(G_1)$, то есть дерево T, каждой вершине которого v сопоставлено множество $X_v \subseteq V(G_1)$. Поставим в соответствие каждой вершине v дерева T множество $X_v \cup V(G_2)$. Нетрудно видеть, что мы получим древесную декомпозицию графа $G_1 \cup G_2$ с шириной $tw(G_1) + n_2$. Следовательно, $tw(G_1 + G_2) \leq tw(G_1) + n_2$. Аналогично доказывается, что $tw(G_1 + G_2) \leq tw(G_2) + n_1$. Отсюда вытекает неравенство

$$tw(G_1 + G_2) \leq \min\{tw(G_1) + n_2, tw(G_2) + n_1\}.$$

Докажем теперь выполнение обратного неравенства. Для этого рассмотрим древесную декомпозицию графа $G = G_1 + G_2$ с шириной, равной $tw(G)$, то есть дерево T, каждой вершине которого v сопоставлено множество $X_v \subseteq V(G)$.

Пусть $U \subseteq V(G)$. Обозначим через $T(U)$ подграф T, порожденный множеством вершин $\{v: v \in V(T), U \subseteq X_v\}$ (если, разумеется, это множество не является пустым). Из второго свойства древесных декомпозиций (то есть из того, что если u, v, w — вершины T такие, что вершина v лежит на пути в дереве T, соединяющем вершины u и w, то $X_u \cap X_w \subseteq X_v$) следует, что $T(U)$ является деревом.

Если множество U состоит из единственной вершины v, то вместо обозначения $T(U)$ мы будем пользоваться обозначением T_v.

Докажем, что найдется вершина $y \in V(T)$, такая, что либо $V(G_1) \subseteq X_y$, либо $V(G_2) \subseteq X_y$. Предположим, что для любой вершины $y \in V(T)$ $V(G_1) \setminus X_y \neq \emptyset$. Пусть v — вершина T, для которой множество $U = X_v \cap V(G_1)$ имеет максимально возможную мощность, а w — вершина G_1, не принадлежащая U. Заметим, что найдется вершина $u \in U$, такая, что $V(T_u) \cap V(T_w) = \emptyset$. По определению соединения графов для любой вершины $z \in V(G_2)$ в графе G существуют ребра (u, z) и (w, z). Поэтому найдутся вершины $a \in V(T_u)$ и $b \in V(T_w)$, для которых $z \in X_a$, $z \in X_b$. Обозначим через P_z путь в дереве T, соединяющий вершины a и b. По второму свойству древесных декомпозиций если $c \in V(P_z)$, то $z \in X_c$. Остается заметить, что все пути P_z при $z \in V(G_2)$ имеют некоторую общую вершину y, а следовательно, $V(G_2) \subseteq X_y$.

Мы доказали, что найдется вершина $y \in V(T)$, такая, что либо $V(G_1) \subseteq X_y$, либо $V(G_2) \subseteq X_y$. Пусть, для определенности, $V(G_2) \subseteq X_y$. Обозначим через U множество $X_v \cap V(G_2)$, имеющее максимальную мощность при всех $v \in V(T)$. Докажем, что $V(T(U)) \cap V(T(V(G_2))) \neq \emptyset$. Для этого предположим противное. Пусть $V(T(U)) \cap V(T(V(G_2))) = \emptyset$. Из этого следует, что найдутся вершины $u \in U$ и $w \in V(G_2)$, такие, что $V(T_u) \cap V(T_w) = \emptyset$. Однако это противоречит тому, что в графе G существует ребро (u, w).

Пусть $v \in V(T(U)) \cap V(T(V(G_2)))$. Ясно, что $U \cup V(G_2) \subseteq X_v$. Нам остается заметить, что $tw(G) \geq |X_v| - 1 \geq |U \cup V(G_2)| - 1 \geq |U| - 1 + |V(G_2)| \geq tw(G_1) + n_2 \geq \min\{tw(G_1) + n_2, tw(G_2) + n_1\}$.

Теорема доказана.

Вычислим в качестве примера применения теоремы 2 путевую ширину и древесную ширину полного m-дольного графа. Напомним, что полный m-дольный граф $K_{n_1 n_2 \dots n_m}$ представляет собой граф $E_{n_1} + E_{n_2} + \ldots + E_{n_m}$, где через E_k обозначается пустой граф (то есть граф без ребер) с k вершинами.

Следствие. *Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — положительные целые числа, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Тогда*

$$pw(K_{n_1 n_2 \dots n_m}) = tw(K_{n_1 n_2 \dots n_m}) = n - \max\{n_1, n_2, \ldots n_m\}.$$

Мы приведем доказательство для древесной ширины. Для путевой ширины это доказательство повторяется почти дословно. Предположим, для удобства, что $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m$, и докажем утверждение с помощью индукции. Легко видеть, что $tw(E_k) = 0$ для любого положительного целого числа k. Следовательно, $tw(K_{n_1 n_2}) = tw(E_{n_1} + E_{n_2}) = \min\{tw(E_{n_1}) + n_2, tw(E_{n_2}) + n_1\} = n_2$. Заметим теперь, что $tw((K_{n_1 n_2 \ldots n_r}) = tw(K_{n_1 n_2 \ldots n_{r-1}} + E_{n_r}) = \min\{tw(K_{n_1 n_2 \ldots n_{r-1}}) + n_r, tw(E_{n_r}) + n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-1}\} = \min\{n_2 + n_3 + \ldots + n_r, n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-1}\} = n_2 + n_3 + \ldots + n_r$.

Следствие доказано.

В частности, если мы рассматриваем полный двудольный граф $K_{m,n}$, то $pw(K_{m,n}) = tw(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$.

Литература

1. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.I. Excluding a forest//*J. of Comb. Theor. Ser.B.* 1983. V.35. P.39–61.

2. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.II. Algorithmic aspects of three-width//*J. of algorithms.* 1986. V.7. P.309–322.

3. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.III. Planar tree-width//*J. of Comb. Theor. Ser.B.* 1984. V.36. P.49–64.

4. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.IV. Tree-width and well-quasi-ordering//*J. of Comb. Theor. Ser.B.* 1984. V.48. P.227–254.

5. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.V. Excluding a planar graph//*J. of Comb. Theor. Ser.B.* 1986. V.41. P.92–114.

6. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.X. Obstructions to tree-decomposition//*J. of Comb. Theor. Ser.B.* 1991. V.52. P.153–190.

7. **Kinnersly N.G.** The vertex separation number of a graph equals its pathwidth//*Inform. Process Lett.* 1992. V.42. P.345–350.

8. **Bienstock D.** Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey)//*DIMACS ser. in discr. math. and theor. comp. sci.* 1991. V.5. P.33–49.

9. **Головач П.А.** Вершинно-поисковое и поисковое число соединения графов//*Вестник Ленингр. ун-та. Сер.1.* Вып.2. 1990.

Summary

Golovach P. A. Pathwidth and treewidth of join ing of two graphs

A behaviour of pathwidth and treewidth of graphs under different operations on graphs is investigated. Some evaluations of these invariants of product of graphs are given. The expressions for pathwidth and treewidth of the join ing two graphs are the main results of the paper.

Сыктывкарский университет

Поступила 10.02.96