Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 517.987

Крайние точки множества значений ляпуновской векторной меры

И. И. Баженов

В работе рассматриваются ляпуновские векторные меры со значениями в локально выпуклых пространствах и приводится характеристика крайних точек их множества значений. Полученный результат используется в доказательстве известного утверждения Клуванека о единственности решения в задаче оптимального быстродействия.

В работе [1] А.А.Ляпунова наряду с классическим утверждением о выпуклости и компактности множества значений неатомической векторной меры со значениями в конечномерном пространстве приводятся и другие свойства, которыми обладают такие векторные меры. В настоящей работе мы покажем, что некоторые утверждения, сформулированные в [1], могут быть перенесены на более общий случай ляпуновских векторных мер со значениями в локально выпуклом пространстве.

1. Характеристика крайних точек множества значений ляпуновской векторной меры. Пусть $m: \mathcal{A} \longrightarrow X$ – произвольная векторная мера, заданная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества T и принимающая значения в локально выпуклом пространстве X. Как и в работе [2] меру m будем называть ляпуновской, если для любого $E \in \mathcal{A}$ множество $m(E \cap \mathcal{A}) \equiv \{m(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$ выпукло в X.

Множество $E \in \mathcal{A}$ называется $m-$нулевым, если на всех измеримых подмножествах множества E мера m принимает только нулевые значения, то есть $m(E \cap \mathcal{A}) = \{0\}$. Точку $x \in m(\mathcal{A})$ будем называть точкой единственности меры m, если из того, что $x = m(E_1) = m(E_2)$, следует, что симметрическая разность множеств $E_1 \triangle E_2 \equiv (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ является m-нулевым множеством. Как обычно, точка $x \in Y \subset X$ называется крайней точкой множества Y, если из условия $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, где $x_1, x_2 \in Y$, следует, что $x_1 = x_2$.

Основной результат этого параграфа содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $m: \mathcal{A} \longrightarrow X$ ляпуновская векторная мера и $x \in m(\mathcal{A})$. Тогда следующие утверждения относительно точки x эквивалентны:*

1) x является крайней точкой множества значений меры m;

2) x является точкой единственности меры m.

Доказательство. Предположим, что $x \in m(\mathcal{A})$ и x не является точкой единственности меры m. Следовательно, найдутся E_1, $E_2 \in \mathcal{A}$ такие, что $x = m(E_1) = m(E_2)$ и множество $E_1 \triangle E_2$ не является m-нулевым. Не умаляя общности, можно считать, что существует $E \in \mathcal{A}, E \subset E_1 \setminus E_2$ такое, что $m(E) \neq 0$.

Рассмотрим множества $A_1 = E_1 \setminus E$ и $A_2 = E_2 \cup E$. Тогда

$$x_1 \equiv m(A_1) = m(E_1 \setminus E) = m(E_1) - m(E) = x - m(E) \in m(\mathcal{A}) \quad \text{и}$$

$$x_2 \equiv m(A_2) = m(E_2 \cup E) = m(E_2) + m(E) = x + m(E) \in m(\mathcal{A}).$$

Таким образом, $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x_1 \neq x_2$ и точка x не является крайней точкой множества $m(\mathcal{A})$. Следовательно, из первого утверждения следует второе.

Пусть теперь точка $x \in m(\mathcal{A})$ не является крайней точкой множества $m(\mathcal{A})$. Это означает, что $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, где x_1, $x_2 \in m(\mathcal{A})$ и $x_1 \neq x_2$. Пусть $x_1 = m(E_1)$ и $x_2 = m(E_2)$. Составим множества $H = E_1 \cap E_2$, $H_1 = E_1 \setminus E_2$, $H_2 = E_2 \setminus E_1$. Так как m является ляпуновской мерой, то множества $m(H_1 \cap \mathcal{A})$ и $m(H_2 \cap \mathcal{A})$ выпуклы в X. Кроме того, каждое из множеств $m(H_1 \cap \mathcal{A})$ и $m(H_2 \cap \mathcal{A})$ содержит нуль пространства X. Следовательно, найдутся $\bar{H}_1, \bar{H}_2 \in \mathcal{A}$, $\bar{H}_1 \subset H_1$, $\bar{H}_2 \subset H_2$ такие, что $m(\bar{H}_1) = \frac{1}{2}m(H_1)$ и $m(\bar{H}_2) = \frac{1}{2}m(H_2)$. Обозначим

$$A_1 = \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2, A_2 = (H_1 \setminus \bar{H}_1) \cup (H_2 \setminus \bar{H}_2).$$

Тогда $m(H \cup A_1) = m(H) + m(\bar{H}_1) + m(\bar{H}_2) = \frac{1}{2}(m(H) + m(H_1)) + \frac{1}{2}(m(H) + m(H_2)) = \frac{1}{2}(m(E_1) + m(E_2)) = x$ и $m(H \cup A_2) = m(H) + m(H_1) - m(\bar{H}_1) + m(H_2) - m(\bar{H}_2) = \frac{1}{2}(m(H) + m(H_1)) + \frac{1}{2}(m(H) + m(H_2)) = \frac{1}{2}(m(E_1) + m(E_2)) = x$.

Отметим, что множество $(H \cup A_1)\Delta(H \cup A_2) = H_1 \cup H_2 = E_1 \Delta E_2$ не является m-нулевым. Иначе мы имели бы $m(H_1) = m(H_2) = \mathbf{0}$ и $x_1 = m(E_1) = m(H)+m(H_1) = m(H)+m(H_2) = x_2$, что противоречит предположению $x_1 \neq x_2$. Таким образом, точка x не является точкой единственности. Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве первой части теоремы не использовалось условие о том, что векторная мера $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ является ляпуновской. Таким образом, доказано более сильное утверждение: крайние точки множества значений произвольной векторной меры являются точками единственности.

Замечание 2. В доказательстве второй части теоремы использовалась лишь звездность множества значений векторной меры относительно нуля, то есть более слабое условие, чем выпуклость. Однако, как следует из теоремы 2 в [2], звездность множества значений обеспечивает его выпуклость, и отмеченный факт не усиливает утверждения теоремы.

Приведем несколько примеров. Первый пример показывает, что, если мера m в теореме 1 не является ляпуновской, то, вообще говоря, из утверждения 2) не следует утверждение 1).

Пример 1. Пусть $([0,1],\ \mathcal{B},\ \lambda)$ – измеримое пространство с мерой Лебега. Меру $m : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ определим следующим образом: $m(\{0\}) = \frac{3}{2}$ и $m = \lambda$ на промежутке $(0,1]$. Множество значений $m(\mathcal{B})$ представляет собой объединение двух отрезков $[0,1] \cup [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$. Точки $\{1\}$ и $\{\frac{3}{2}\}$ являются точками единственности меры m, однако они не будут крайними точками для множества $m(\mathcal{B})$.

Таким образом, утверждение теоремы 1 для мер, не являющихся ляпуновскими, вообще говоря, неверно. Однако класс векторных мер, для которых выполнено утверждение теоремы 1, не исчерпывается классом ляпуновских мер. Это показывают два следующих примера.

Пример 2. Пусть $([0,1],\ \mathcal{B},\ \lambda)$ – измеримое пространство с мерой Лебега. Определим векторную меру $m : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ следующим образом. Пусть $m = (m_1, m_2)$ и $m_1(\{0\}) = m_2(\{0\}) = \frac{1}{3}$, $m_1 = \lambda$ и $m_2 = \frac{1}{3}\lambda$ на $(0, \frac{1}{2}]$, $m_1 = \frac{1}{3}\lambda$ и $m_2 = \lambda$ на $(\frac{1}{2}, 1]$.

Мера m не является ляпуновской. На рисунке 1 изображено множество значений меры m и выделены крайние точки $m(\mathcal{B})$. Легко видеть, что все они являются точками единственности m. Более того, других точек единственности мера не имеет. Таким образом, не смотря на то, что мера m не является ляпуновской, множество крайних точек и множество точек единственности совпадают.

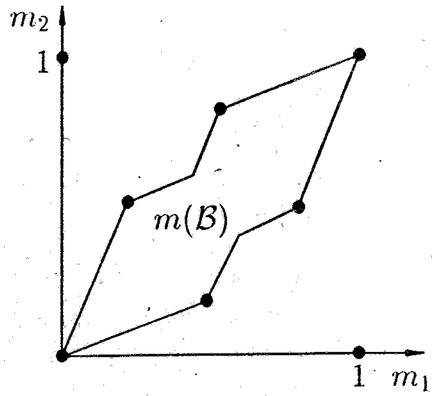

Рис. 1

Пример 3. Пусть, как и в предыдущих примерах, $([0,1],\ \mathcal{B},\ \lambda)$ – пространство с мерой Лебега. Меру $m : \mathcal{B} \longrightarrow L^1[0,1]$ определим формулой $m(E) = K_E(t)$, где $K_E(t)$ – характеристическая функция множества $E \in \mathcal{B}$. Каждая точка множества значений $m(\mathcal{B})$ является крайней точкой, а следовательно, точкой единственности. Значит и в этом случае крайние точки $m(\mathcal{B})$ совпадают с точками единственности меры m.

Итак, последние два примера показывают, что совпадение множества точек единственности с крайними точками множества значений меры не характеризует класс ляпуновских векторных мер.

2. Крайние точки множества значений векторной меры и вопрос о единственности решения в задаче быстродействия. В этом параграфе мы приводим доказательство известного утверждения Клуванека [3, теорема 4] о единственности представления элементов достижимого множества контрольной системы. Оно отличается от доказательства, предложенного в [3], и эффективно использует полученную выше характеристику крайних точек множества значений ляпуновской векторной меры.

Следуя [3], рассмотрим следующую математическую модель бесконечномерной задачи линейного оптимального быстродействия. Пусть $(T, \mathcal{A})$ – произвольное измеримое пространство, $B(T)$ – пространство всех вещественных ограниченных $\mathcal{A}$-измеримых функций на T, и X – отделимое полное локально выпуклое пространство.

Под контрольной системой понимается последовательность замкнутых мер $m_n : \mathcal{A} \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих тому условию, что для произвольной последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \overline{\text{co}}\ m_n(\mathcal{A})$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в X. Если каждая мера m_n является ляпуновской, то контрольную систему $m = (m_n)$ будем называть ляпуновской.

Обозначим

$$m(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_T u_n dm_n, \text{ где } u = (u_n),\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(T).$$

Под интегралом от функции u_n по векторной мере m_n понимается предел последовательности интегралов от ступенчатых функций, аппроксимирующих ограниченную измеримую функцию u_n. При этом интеграл от ступенчатой функции определяется естественным образом. Множество $A(m)$, определяемое равенством

$$A(m) = \{m(u) :\ u = (u_n),\ u_n \in B(T) \ \text{ и } \ u_n(t) \in [0,1]\ \forall\ t \in T\},$$

называется достижимым множеством контрольной системы m. Если $x \in A(m)$ и $x = m(u)$, то говорят, что точка x представляется управлением $u = (u_n)$. Два управления $u = (u_n)$ и $v = (v_n)$ называются m-эквивалентными, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ функции u_n и v_n m_n-эквивалентны, т. е. отличаются друг от друга на m_n-нулевом множестве. Будем говорить, что $x \in A(m)$ представляется m-единственным управлением, если из условия $x = m(u) = m(v)$ следует, что управления u и v m-эквивалентны.

Теорема 2 ([3]). *Пусть $(T, \mathcal{A})$ – измеримое пространство и $m = (m_n)$, $m_n : \mathcal{A} \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, произвольная ляпуновская контрольная система. Для того чтобы элемент $x \in A(m)$ представлялся m-единственным управлением, необходимо и достаточно, чтобы точка x являлась крайней точкой достижимого множества $A(m)$.*

Доказательство. Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ векторная мера m_n является ляпуновской, то

$$m_n(\mathcal{A}) = \{\int_T u dm_n :\ u \in B(T),\ u(t) \in [0,1]\ \forall\ t \in T\}$$

(см. [3, теорема 2]). Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_T u_k dm_k$, тогда существует последовательность $E_n \in \mathcal{A}$ такая, что $m_n(E_n) = \int\limits_T u_n dm_n$ и, стало быть, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_n(E_n)$. В этом случае будем говорить, что последовательность множеств (E_n) представляет точку $x \in A(m)$.

Заметим вначале, что если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n(E_n)$ является крайней точкой множества $A(m)$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ точка $m_n(E_n) \in X$ является крайней точкой множества значений $m_n(\mathcal{A})$ меры m_n. Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Итак, в силу теоремы 1 точка $m_n(E_n)$ является точкой единственности меры m_n для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $x \in A(m)$ представляется двумя последовательностями (E_n) и (F_n) и существует такой номер n_0, что $E_{n_0} \triangle F_{n_0}$ не является m_{n_0}-нулевым множеством. Покажем, что в этом случае x не может быть крайней точкой достижимого множества $A(m)$.

Действительно, если $m_{n_0}(E_{n_0}) = m_{n_0}(F_{n_0})$ и $m_{n_0}((E_{n_0} \triangle F_{n_0}) \cap \mathcal{A}) \neq \{0\}$, то точка $m_{n_0}(E_{n_0})$ не является точкой единственности меры m_{n_0} и, следовательно, точка $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n(E_n)$ не может быть крайней точкой множества $A(m)$ в силу замечания, сделанного выше.

Если же $m_{n_0}(E_{n_0}) \neq m_{n_0}(F_{n_0})$ и $m_{n_0}((E_{n_0} \triangle F_{n_0}) \cap \mathcal{A}) \neq \{0\}$, положим

$$x_1 = \sum_{n \neq n_0} m_n(E_n) + m_{n_0}(F_{n_0}) \quad \text{и} \quad x_2 = \sum_{n \neq n_0} m_n(F_n) + m_{n_0}(E_{n_0}).$$

Тогда $x_1 = x - m_{n_0}(E_{n_0}) + m_{n_0}(Fn_0) \neq x + m_{n_0}(E_{n_0}) - m_{n_0}(Fn_0) = x_2$ и $x_1 + x_2 = 2x$. Таким образом, точка $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ не является крайней точкой множества $A(m)$.

Итак, мы показали, что если $x \in A(m)$ является крайней точкой достижимого множества, то она представляется m-единственным управлением (последовательностью множеств).

Покажем обратное. Пусть $x \in A(m)$ и x не является крайней точкой множества $A(m)$. Тогда $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, где $x_1, x_2 \in A(m)$ и $x_1 \neq x_2$. Пусть

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(E_n) \quad \text{и} \quad x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(F_n),$$

то есть точки x_1, x_2 представляются последовательностями $E_n \in \mathcal{A}$ и $F_n \in \mathcal{A}$, соответственно. Легко видеть, что $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(m_n(E_n) + m_n(F_n))$ и так как $m = (m_n)$ – ляпуновская система, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно указать множество $G_n \in \mathcal{A}$ такое, что

$$m_n(G_n) = \frac{1}{2}(m_n(E_n) + m_n(F_n)).$$

Таким образом, последовательность (G_n) также будет представлять точку $x \in A(m)$. Поскольку $x_1 \neq x_2$, то можно найти $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $m_{n_0}(E_{n_0}) \neq m_{n_0}(F_{n_0})$. Но тогда точка $m_{n_0}(G_{n_0}) = \frac{1}{2}(m_{n_0}(E_{n_0}) + m_{n_0}(F_{n_0}))$ не является крайней точкой множества $m_{n_0}(\mathcal{A})$. В силу теоремы 1 точка $m_{n_0}(G_{n_0})$ не будет точкой единственности меры m_{n_0}. Следовательно, найдется множество $H \in \mathcal{A}$ такое, что

$$m_{n_0}(H) = m_{n_0}(F_{n_0}) \quad \text{и} \quad m_{n_0}((H \triangle F_{n_0}) \cap \mathcal{A}) \neq \{0\}.$$

Осталось заметить, что последовательность (H_n), $n \in \mathbb{N}$, где

$$H_n = \begin{cases} F_n & n \neq n_0 \\ H & n = n_0 \end{cases}$$

также представляет точку $x \in A(m)$ и, стало быть, точка x не представляется m-единственным управлением. Теорема доказана.

Из приведенной выше теоремы, в частности, следуют результаты о единственности представления точек достижимого множества в конечномерной задаче оптимального быстродействия [4, теоремы 14.1 и 14.2].

Отметим также, что крайняя точка достижимого множества $A(m)$ ляпуновской контрольной системы m представляется m-единственным управлением – последовательностью характеристических функций измеримых множеств. И обратно, если некоторая точка достижимого множества представляется управлением, имеющим вид последовательности характеристических функций и только таким, то эта точка является крайней точкой достижимого множества.

Литература

1. **Ляпунов А.А.** О вполне аддитивных вектор-функциях. 1 //*Известия АН СССР. Сер. матем.* 1940. Т.4. №6. С. 465-478.

2. **Баженов И.И.** О некоторых свойствах ляпуновских векторных мер // *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер.1.* Вып.1. 1995. С.4-11.

3. **Kluvanek I.** The range of vector-valued measure // *Math. Systems Theory*, 1974. V. 7. P. 44-54.

4. **Hermes H., La Salle J.P.** Functional analysis and time optimal control. - *Acad. Press*, New Vork. 1969. 136 p.

Summary

Bazhenov I. I. Extreme points of the range of Liapunov vector measure

A vector measure $m : \mathcal{A} \longrightarrow X$ is called Liapunov's when $m(E \cap \mathcal{A}) \equiv \{m(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$ is convex for every $E \in \mathcal{A}$. We give conditions which are necessary and sufficient for $x \in m(\mathcal{A})$ to be extreme point of the range of Liapunov's measure m. Application is given to the problem of uniqueness in optimal control theory.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 5.02.96

Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.2.1996

УДК 513.8

Вычисление групп спинорных бордизмов некоторых пространств Эйленберга-Маклейна, II [1]

А. В. Жубр

Продолжено вычисление некоторых групп бордизмов, связанных с задачей классификации замкнутых односвязных 6-мерных многообразий: доказаны результаты, анонсированные в первой части работы.

Эта статья является продолжением работы [1], в которой вычислены группы $A_i^m = \Omega_i^{\mathrm{spin}}(\mathbf{Z}_{2^m}, 2; \varkappa_m)$, $i \leq 6$, где $\varkappa_m$ обозначает проекцию $\mathbf{Z}_{2^m} \to \mathbf{Z}_2$, и сформулированы результаты вычисления групп

$$A_i^{m,n} = \Omega_i^{\mathrm{spin}}(\mathbf{Z}_{2^m} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}, 2; \varkappa_m \oplus 0).$$

Напомним, что через $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$, где G — конечно-порожденная абелева группа и w — элемент группы $H^2(G, 2;\ \mathbf{Z}_2)$, в работе [1] обозначается группа классов бордизмов отображений вида

$$f : M^i \to K(G, 2) \quad ,$$

где M^i — замкнутое ориентированное i-мерное гладкое многообразие с $w_2(M^i) = f^*(w)$; или, если угодно, $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$ — это группа бордизмов пар (M^i, ω) с $\omega \in H^2\,(M^i;\ G)$, удовлетворяющих условию $w_2(M^i) = w_*(\omega)$, где через w_* обозначается гомоморфизм

$$H^2\,(\,\cdot\,;\, G) \to H^2\,(\,\cdot\,;\, \mathbf{Z}_2) \quad ,$$

индуцированный классом w, понимаемым теперь как элемент группы $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}_2)$. Группы $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$ (т.е., собственно говоря, группа $\Omega_6^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$) представляют интерес в связи с задачей классификации 6-мерных многообразий (см. [2]–[4]), и рассматриваемые

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №95-01-00235