Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.1(19). 2014

УДК 519.27

НЕРАВЕНСТВО СИДЕЛЬНИКОВА И ПОЛИНОМЫ ГЕГЕНБАУЭРА

Н. О. Котелина, А. Б. Певный

Даётся новое доказательство неравенства Сидельникова, основанное на свойствах полиномов Гегенбауэра. Неравенство обращается в равенство на сферических полудизайнах и только на них.

Ключевые слова: *неравенство Сидельникова, полиномы Гегенбауэра.*

1. Неравенство Сидельникова

Пусть $\langle x, y\rangle$ — обычное скалярное произведение векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

В 1974 г. В. М. Сидельников [1] установил важное неравенство, которое в случае конечной последовательности векторов из $\mathbb{R}^n$ имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — конечная последовательность векторов из $\mathbb{R}^n$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle x_i, x_j\rangle^{2k} \geqslant c_k\Bigl(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^{2k}\Bigr)^2, \tag{1}$$

где k — произвольное натуральное число,

$$c_k = \frac{(2k-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+2k-2)}. \tag{2}$$

Замечание. При $k = 1$ константа c_1 равна $\dfrac{1}{n}$ и хорошо известна в теории фреймов. Оригинальные доказательства неравенства (1) даны в работах [2–5]. Наше новое доказательство основано на свойствах полиномов Гегенбауэра.

2. Полиномы Гегенбауэра

Пусть $n \geqslant 2$, $w_n(t) = (1-t^2)^{(n-3)/2}$. Система полиномов Гегенбауэра определяется условиями $\deg G_k = k$, $G_k(1) = 1$ и условием ортогональности

$$\int_{-1}^{1} G_k(t)G_s(t)w_n(t)\,dt = 0, \quad k \neq s. \tag{3}$$

При $n = 2$ получаются полиномы Чебышёва, а при $n = 3$ — полиномы Лежандра. Справедливо рекуррентное соотношение

$$(k+n-2)G_{k+1}(t) = (2k+n-2)tG_k(t) - kG_{k-1}(t),$$

причём $G_0(t) = 1$, $G_1(t) = t$. Отсюда

$$tG_k(t) = \alpha_k G_{k+1}(t) + \beta_k G_{k-1}(t), \tag{4}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k+n-2}{2k+n-2} > 0, \quad \beta_k = \frac{k}{2k+n-2} > 0, \quad \alpha_k + \beta_k = 1.$$

Разложим t^{2k} по полиномам $G_0, G_2, \ldots, G_{2k}$. При $k = 1$ имеем $t^2 = tG_1(t) = \alpha_1 G_2(t) + \beta_1 G_0(t)$, причем $\beta_1 = 1/n$. Умножив на t, получим

$$t^3 = \alpha_1\bigl(\alpha_2 G_3(t) + \beta_2 G_1(t)\bigr) + \beta_1 G_1(t).$$

Снова умножим на t. Получим разложение t^4 по полиномам G_4, G_2, G_0 с положительными коэффициентами. В общем случае получим

$$t^{2k} = c_0 G_{2k}(t) + c_1 G_{2k-2}(t) + \cdots + c_k G_0(t). \tag{5}$$

Вычислим последний коэффициент c_k при $G_0(t) = 1$. Умножим (5) на $w_n(t)$ и проинтегрируем по $[-1, 1]$. Получим

$$\int_{-1}^{1} t^{2k} w_n(t)\,dt = c_k \int_{-1}^{1} w_n(t)\,dt.$$

Вычисление довольно стандартных интегралов проведено в [3]. Приходим к равенству (2).

Ключевым моментом в доказательстве теоремы 1 является использование неотрицательной определённости полиномов G_k: для произвольных $m > 0$ и $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{S}^{n-1}$ матрица $A_k = \Big\{G_k\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)\Big\}_{i,j=1}^{m}$ является неотрицательно определённой, то есть

$$\langle A_k y, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} G_k\big(\langle x_i, x_j\rangle\big) y_i y_j \geqslant 0 \tag{6}$$

для любого вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. При $n = 3$ (полиномы Лежандра) это свойство известно со времён Лежандра и Лапласа. Известны доказательства и для произвольного n (см., например, [6]).

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — последовательность точек из $\mathbb{R}^n$. Не умаляя общности, можно предполагать, что $\|x_i\| \neq 0$ для всех $i \in 1 : m$. Рассмотрим точки $\xi_i = x_i / \|x_i\|$, $i \in 1 : m$. Подставим в (5) $t = \langle \xi_i, \xi_j\rangle$:

$$\langle \xi_i, \xi_j\rangle^{2k} = \sum_{s=0}^{k} c_s G_{2k-2s}\big(\langle \xi_i, \xi_j\rangle\big).$$

Теперь умножим обе части получившегося равенства на $\|x_i\|^{2k}\|x_j\|^{2k}$ и просуммируем по $i, j \in 1 : m$:

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle x_i, x_j\rangle^{2k} = \sum_{s=0}^{k} c_s \Big[\sum_{i,j=1}^{m} \|x_i\|^{2k}\|x_j\|^{2k} G_{2k-2s}\big(\langle \xi_i, \xi_j\rangle\big)\Big].$$

Поскольку $c_s > 0$ и выполнено свойство (6), то можно откинуть слагаемые при $s \in 0 : k-1$. Придём к неравенству

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle x_i, x_j\rangle^{2k} \geqslant c_k \Big(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^{2k}\Big)^2. \tag{7}$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Если все точки x_i лежат на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, то неравенство (7) переписывается в виде*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle x_i, x_j\rangle^{2k} \geqslant c_k m^2. \tag{8}$$

4. Условие достижения равенства

Это условие очевидно: то, что откинули, должно равняться нулю.

ТЕОРЕМА 2. *Для системы X ненулевых векторов из $\mathbb{R}^n$ неравенство (7) обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \|x_i\|^{2k}\|x_j\|^{2k} G_\nu\Big(\big\langle \tfrac{x_i}{\|x_i\|}, \tfrac{x_j}{\|x_j\|}\big\rangle\Big) = 0 \text{ при } \nu = 2, 4, \dots, 2k. \tag{9}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если все точки x_i лежат на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, то неравенство (8) обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\sum_{i,j=1}^{m} G_\nu(\langle x_i, x_j\rangle) = 0 \text{ при } \nu = 2, 4, \dots, 2k. \tag{10}$$

Теорема 2 и следствие делают естественными следующие определения.

Определение 1. Последовательность $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ из $\mathbb{R}^n$ такая, что $\forall i \in 1 : m$, $\|x_i\| \neq 0$, называется (несферическим) полудизайном порядка $2k$, если выполнены условия (9).

Определение 2. Последовательность $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ на $\mathbb{S}^{n-1}$ называется сферическим полудизайном порядка $2k$, если выполнены условия (10).

Выводы: неравенство Сидельникова (7) обращается в равенство на (несферических) полудизайнах порядка $2k$ и только на них, неравенство Сидельникова (8) обращается в равенство на сферических полудизайнах порядка $2k$ и только на них.

Другие эквивалентные определения сферических полудизайнов и примеры можно найти в [3]. Сферические полудизайны порядка $2k$ являются частным случаем D-дизайнов, введённых в [7], при $D = \{2, 4, \dots, 2k\}$.

Список литературы

1. **Сидельников В. М.** Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном эвклидовом пространстве // *Матем. сб. 1974. Т. 95 № 1(9). С. 148–158.*

2. **Котелина Н. О., Певный А. Б.** Неравенство Сидельникова // *Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 2. С. 45–52.*

3. **Котелина Н. О., Певный А. Б.** Экстремальные свойства сферических полудизайнов // *Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 162–170.*

4. **Goethals J. M., Seidel J. J.** Spherical designs // *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 1979. V. 34. P. 255–272.*

5. **Venkov B. B.** Réseaux et designs sphériques // *Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, L'Enseignement mathématique Monograph, Géneve. 2001. №. 37. P. 10–86.*

6. **Котелина Н. О.** Формула сложения для полиномов Гегенбауэра // *Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 ноября 2010 г. (http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1113).*

7. **Андреев Н. Н.** Минимальный дизайн 11-го порядка на трёхмерной сфере // *Математические заметки. 2000. Т. 67. № 4. С. 489–497.*

Summary

Kotelina N. O, Pevnyi A. B. Sidelnikov inequality and Gegenbauer polynomials

New proof of Sidelnikov inequality based on properties of Gegenbauer polynomials is given. The inequality turns to equality on the spherical semidesigns and only on them.

Keywords: Sidelnikov inequality, Gegenbauer polynomials.

СыктГУ *Поступила 25.11.2014*