Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.1(19). 2014

УДК 514.142.24

ПОСТРОЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ NURBS-КРИВЫХ

Н. О. Котелина

В статье рассматриваются NURBS-кривые и их свойства, в частности исследуется вопрос о связи NURBS-кривых с дробно-рациональными кривыми Безье. Для заданного набора весов и узлов приводится подробное доказательство известного утверждения, что NURBS-кривая на этом наборе представляет собой окружность.

Ключевые слова: *NURBS, рациональная кривая Безье, В-сплайн, полином Бернштейна.*

1. Определение NURBS-кривых

Пусть заданы натуральные числа L, m. Рассмотрим вектор $T = (t_0, \dots, t_{L+m})$ с вещественными элементами, которые будем называть узлами. Определим базисные функции $N_{k,m}(t)$ порядка m рекурсивно: при $m = 1$ это просто постоянные единичные функции в пределах своего диапазона:

$$N_{k,1} = \begin{cases} 1, & t_k \le t \le t_{k+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

При $m > 1$ определим В-сплайн функции $N_{k,m}(t)$ через функции $(m-1)$-го порядка:

$$N_{k,m}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} N_{k,m-1}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} N_{k+1,m-1}(t). \tag{2}$$

Будем считать в случае, когда $t_{k+m-1} = t_k$ или $t_{k+m} = t_{k+1}$, соответствующее слагаемое в (2) отсутствует.

Функции $N_{k,m}(t)$ являются кусочно-полиномиальными, при этом если узловой вектор равномерный, то есть $|t_{i+1} - t_i| = const$, то

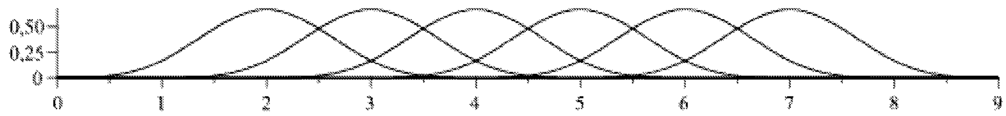

Рис. 1. B-сплайны $N_{k,4}(t)$ для равномерного узлового вектора

$N_{k,m}(t) = N_{0,m}(t - t_k)$. Носителями функций $N_{k,m}(t)$ являются отрезки $[t_k, t_{k+m}]$.

Пусть есть набор полюсов (управляющих точек) $\{P_i, \quad i = 0, \dots, L\}$ и весов $\{w_0, \dots, w_L\}$, где $w_i > 0$, $i \in 0 : L$.

Построим стыковочные функции вида

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{L} w_k N_{k,m}(t)}. \tag{3}$$

Тогда дробно-рациональная B-сплайн-кривая порядка m задается следующим образом:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{L} P_k R_k(t). \tag{4}$$

Поскольку узловой вектор T обычно берётся неравномерный, то есть узлы являются неравноотстоящими, то кривая (4) называется NURBS-кривой, где аббревиатура NURBS означает non-uniform rational basis spline (неравномерный рациональный базисный сплайн).

2. Моделирование окружности с помощью NURBS-кривых

В [1, 2] приводятся значения весов, узловой вектор и контрольные точки, при которых кривая (4) является окружностью. Докажем, что это действительно так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* $L = 8$, $m = 3$. *Рассмотрим узловой вектор* $T = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$, *вектор* $w = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, *полюсы* $P_0(1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3(-1,1)$, $P_4(-1,0)$, $P_5(-1,-1)$, $P_6(0,-1)$, $P_7(1,-1)$, $P_8 = P_0$. *Тогда квадратичная кривая* $P(t)$, *заданная при помощи* (4), *является единичной окружностью с центром в O(0,0).*

Доказательство. Рассмотрим узловой вектор $T^0 = (0, 1, 2, \dots, 11)$. По формулам (2) получаем, что

$$N_{0,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0,1], \\ \frac{3}{4} - (t - \frac{3}{2})^2, & t \in [1,2], \\ \frac{1}{2}(3-t)^2, & t \in [2,3], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

Теперь по свойству B-сплайнов $N_{k,3}(t) = N_{0,3}(t-k)$ при $k = 1, \dots, L$.

Рассмотрим теперь узловой вектор с кратными узлами

$$T^1 = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4).$$

Что произойдет с B-сплайнами $N_{k,3}$? Вычисляя непосредственно $N_{k,3}(t)$, имеем

$$N_{0,3}(t) = \begin{cases} (1-t)^2, & t \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad N_{1,3}(t) = \begin{cases} 2t(1-t), & t \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{6}$$

$$N_{2,3}(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1], \\ (2-t)^2, & t \in [1,2], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \quad N_{8,3} = \begin{cases} (t-3)^2, & t \in [3,4], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{7}$$

Остальные B-сплайны получаются так: $N_{3,3}(t) = N_{1,3}(t-1)$, $N_{5,3}(t) = N_{1,3}(t-2)$, $N_{7,3}(t) = N_{1,3}(t-3)$, $N_{4,3}(t) = N_{2,3}(t-1)$, $N_{6,3}(t) = N_{2,3}(t-2)$.

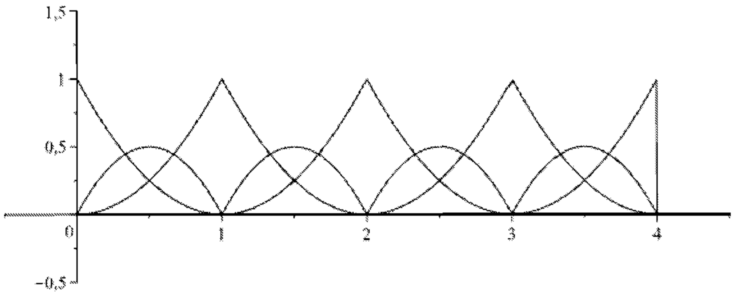

Рис. 2. B-сплайны $N_{k,3}(t)$ для вектора T^1

Теперь рассмотрим вектор T. Тогда базисные функции подвергнутся сжатию в четыре раза вдоль оси Ох.

Заметим, что уравнения $N_{k,3}(t)$, $k = 0,\ 1,\ 2$, в (6),(7) представляют собой уравнения базисных полиномов Бернштейна $B_i^2(t) = C_2^i t^i (1-t)^{2-i}$, $i = 0,\ 1,\ 2$, для $t \in [0,1]$ [4, с. 89]. Следовательно, для узлового вектора T при $t \in [0, \frac{1}{4}]$ имеем $N_{0,3}(t) = B_0^2(4t)$, $N_{1,3}(t) = B_1^2(4t)$, $N_{2,3}(t) = B_2^2(4t)$.

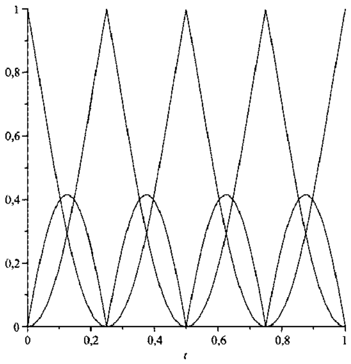

Рис. 3. B-сплайны $N_{k,3}(t)$ для вектора T

Докажем теперь, что при $t \in [0, \frac{1}{4}]$ кривая $P(t)$ представляет собой одну четвертую часть окружности. Поскольку при $t \in [0, \frac{1}{4}]$ только три функции $N_{0,3}(t)$, $N_{1,3}(t)$, $N_{2,3}(t)$ отличны от 0 (см. рис. 3), то по формуле (3) на $[0, \frac{1}{4}]$ только стыковочные функции $R_0(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ отличны от 0. Тогда по (4) кривая $P(t)$ на $[0, \frac{1}{4}]$ принимает вид:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_i B_i^2(4t) P_i}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_i^2(4t)} \tag{8}$$

и представляет собой дробно-рациональную кривую Безье 2-го порядка [3].

При построении получаем кривую, показанную на рис. 4. В докладе [3] было доказано, что кривая (8) при $t \in [0, \frac{1}{4}]$, $w_0 = w_2 = 1$, $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, совпадает с четвертью окружности, построенной на рис. 4.

Это же утверждение можно доказать, вычислив выражение $P_x^2(t) + P_y(t)^2$ для $t \in [0, \frac{1}{4}]$ непосредственно (оно будет равным 1).

Аналогично, рассматривая межузловые интервалы $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, получаем, что $P(t)$ на каждом интервале представляет собой дробно-рациональную кривую Безье 2-й степени, построенную по трём полюсам $\{P_i\}_{i=k}^{k+2}$, $k = 2, 4, 6$, с весами $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $w_2 = 1$, которая является четвертью окружности [3]. $\square$

3. NURBS-кривые и кривые Безье

Стандартный узловой вектор для L+1 контрольной точки и B-сплайнов m-го порядка описывается следующим образом:

- Всего в нем содержится $L + m + 1$ узлов $t_0, \ldots, t_{L+m}$.
- Первые m узлов $t_0, \ldots, t_{m-1}$ имеют нулевое значение.

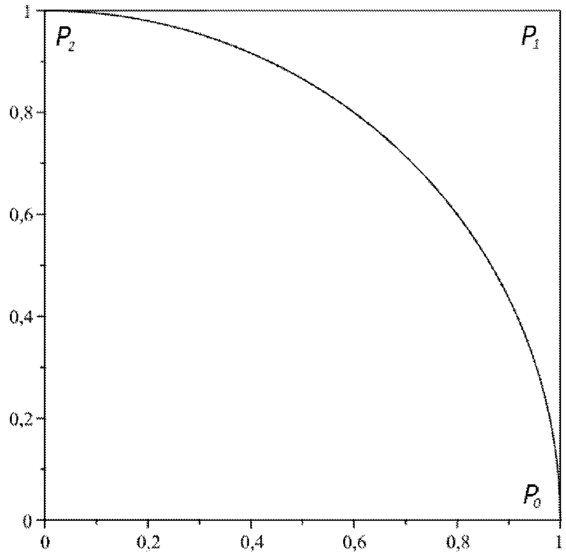

Рис. 4. Кривая $P(t)$ при $t \in [0, \frac{1}{4}]$

- Узлы $t_m, \ldots, t_L$ возрастают с единичным шагом от 1 до $L-m+1$.
- Последние m узлов $t_{L+1}, \ldots, t_{L+m}$ равны $L-m+2$.

Непосредственно вычисляя $N_{k,m}(t)$ на стандартном узловом векторе, можем убедиться, что справедливо предложение [1]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для стандартного узлового вектора T при $m = L+1$ B-сплайн $N_{k,m}(t)$ совпадает с базисным полиномом Бернштейна $B_k^{m-1}(t)$ на $[0,1]$.*

В качестве следствия к Предложению 2 получаем, что NURBS-кривая порядка m на стандартном векторе является дробно-рациональной кривой Безье степени $m-1$.

В [3] было доказано, что дробно-рациональная кривая Безье 2-го порядка может быть представлена с помощью уравнения в барицентрических координатах $4\mu\lambda_0\lambda_2 = \lambda_1$ и является дугой параболы при $\mu = 1$, гиперболы при $\mu > 1$ и эллипса при $\mu \in (0,1)$. Таким образом, при помощи кривых Безье и, следовательно, NURBS-кривых можно моделировать конические сечения.

Список литературы

1. **Хилл Ф.** OpenGL. Программирование компьютерной графики. Для профессионалов. СПб.: Питер, 2002. 1088 с.

2. **Piegl L., Tiller W.** The NURBS book. 2nd Edition. New York: Springer–Verlag, 1995–1997. 327 с.

3. **Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н.** Можно ли построить окружность с помощью кривых Безье? // *Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 19 декабря 2006 г. (http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1219).*

4. **Голованов Н. Н.** Геометрическое моделирование. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. 472 с.

Summary

Kotelina N. O. Constructing a circle using NURBS–curves

The properties of NURBS-curves are considered. The weights and the nodes which make the corresponding NURBS-curve represent a circle are given and a detailed proof of this (well–known) fact is given.
Keywords: NURBS, B-spline, rational Beźier curve, Bernstein polynomial.

СыктГУ *Поступила 09.10.2014*