Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.1(19). 2014

УДК 539.3

УТОЧНЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИН, ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НА РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Ермоленко

При решении контактных задач со свободной границей по классической теории на границе зоны контакта возникают сосредоточенные усилия. При рассмотрении этих же задач с использованием уточненной теории пластин типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди контактные реакции выражаются квадратично суммируемыми функциями.

Для упрощения формулировки условий сопряжения взаимодействующих элементов предлагается использовать вариант уточненной теории пластин, разрешающие уравнения которой могут быть приведены к произвольной поверхности.
Ключевые слова: *уточненная теория пластин, контактная задача.*

1. Уравнение Софи Жермен – Лагранжа

Классическая теория изгиба плоских пластин базируется на т.н. гипотезах Кирхгофа [6]. Прогиб w пластины описывается уравнением Софи Жермен – Лагранжа, которое записывается в следующем виде:

$$D\Delta w = q_n, \tag{1}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость; Δ — оператор Лапласа; q_n — нормальная нагрузка; h — толщина пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

2. Уравнения Ка́рмана

Одним из недостатков классической теории плоских пластин является то, что при изгибе не принимается во внимание тангенциальная деформация, т.е. общая краевая задача распадается на две самостоятельные, описывающие тангенциальную деформацию и прогиб соответственно. Однако очевидно, что, например, осесимметричный изгиб круглой пластины всегда сопровождается тангенциальной деформацией [6].

Названный недостаток устраняется использованием нелинейных уравнений Ка́рмана, которые записываются так [6]:

$$D\Delta^2 w = q_n - L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = -\frac{1}{2}L(w, w). \tag{2}$$

Здесь Φ — функция напряжения, $L(\Phi, w) = \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12} + \Phi_{,22}w_{,11}$ — билинейная форма Ка́рмана, $w_{,i} \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{\partial w}{\partial x_i}$.

3. Уравнения типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди

В работе [4] построена теория оболочек, уточняющая квазикирхгофовскую теорию оболочек К.Ф. Черныха [7] за счет учета вариаций параметров поперечного обжатия. На основе подхода статьи [4] построена теория пластин типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди, с помощью которой решен ряд контактных задач со свободной границей, см., например, [2].

Уравнения теории типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди имеют вид

$$D\Delta^2 w = q_n - h_*^2\Delta q_n + (I - h_\psi^2\Delta)L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \frac{\nu}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}L(w, w),$$

$$\psi_{1,1} + \psi_{2,2} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}(q_n + L(\Phi, w)), \tag{3}$$

где $h_\psi^2 = \dfrac{h^2}{6(1-\nu)}$, $h_\lambda^2 = \dfrac{\nu h^2}{8(1-\nu)}$, $h_*^2 = h_\psi^2 - h_\lambda^2$.

Если в системе (3) положить равными нулю нагрузочный (фиктивный) момент $m_n = h(q_n^+ + q_n^-)/2$ и параметры h_ψ^2, h_λ^2, а также не учитывать третье уравнение, то получим традиционные уравнения Ка́рмана.

При выводе уравнений (3) не используется геометрическая гипотеза Кирхгофа, при этом при отказе от условия перехода нормали к недеформированной срединной поверхности в нормаль к деформированной поверхности возникают поперечные сдвиги $\psi_i, i = 1, 2$ и параметр h_ψ^2. Отказываясь от предположения, что нормаль при этом не изменяет своей длины, возникают фиктивный момент m_n и параметр h_λ^2. Таким образом, чтобы получить из системы (3) уравнения типа Ка́рмана – Тимошенко, учитывающие только поперечные сдвиги, необходимо положить m_n и h_λ^2 равными нулю. Если же необходимо получить уравнения типа Ка́рмана – Нагди, учитывающие поперечное обжатие, то необходимо задать $h_\psi^2 = 0$ и не учитывать третье уравнение в системе (3).

С использованием теории типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди аналитически решена задача о контактном взаимодействии цилиндрически изгибаемой пластины с абсолютно жестким идеально гладким основанием. Показано, что в случае использования уточненной теории контактные реакции хотя и имеют пики на границе зоны контакта, но не содержат функцию Дирака и описываются квадратично суммируемыми функциями [2].

4. Контактная задача для круглой пластины и основания

Одними из наиболее интересных в механике пластин и оболочек являются контактные задачи со свободной границей. Рассмотрим следующий пример такой контактной задачи. Пусть круглая пластина радиуса R и толщины h расположена параллельно абсолютно жесткому идеально гладкому основанию с зазором Δ. Считаем, что пластина, испытывающая действие равномерной нормальной нагрузки $q_n^+ \equiv q_0 = const$, жестко закреплена по контуру таким образом, что реализуется осесимметричный изгиб. При достижении определенной нагрузки пластина коснется основания. При этом полагаем, что при дальнейшем увеличении нагрузки пластина выстилается по основанию без зазоров.

Требуется определить зону контактного взаимодействия $[\rho_0, R]$ и параметры напряженно-деформированного состояния. При аналитическом решении подобных задач в рамках классической теории получается, что в зоне взаимодействия контактная реакция равна действующей нагрузке, а на границе зоны контакта имеются сосредоточенные силы, описываемые функцией Дирака (см., например, [2]).

Приведем решение данной контактной задачи с использованием учочненных уравнений (3). Переходя к полярным координатам и учитывая осесимметричность задачи, оператор Лапласа и операторы $L(w, w)$, $L(\Phi, w)$ можно записать в виде

$$L(\Phi, w) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Phi}{dr}\frac{dw}{dr}\right), L(w, w) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right), \ \psi_{1,1} + \psi_{2,2} = \frac{1}{r}\frac{d(r\psi_r)}{dr}. \qquad (4)$$

Вводя переменную $\rho = r/R$, где $\rho \in [0,1]$, система (3) принимает вид

$$D\Delta^2 w = R^4 q_n - h_*^2 R^2 \Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \frac{\nu R^2}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}L(w,w),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\psi_\rho)}{d\rho} = -\frac{2R(1+\nu)}{Eh}(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, w)). \qquad (5)$$

Граничные условия жестко защемленного тангенциально свободного края выражаются равенствами [2]

$$w(1) = 0,\ -\frac{1}{R}w_{,\rho}(1) + \psi_\rho(1) = 0,\ \Phi(1) = 0,\ \Phi_{,\rho}(1) = 0. \qquad (6)$$

Также накладываются условия, обеспечивающие конечность прогиба, функции напряжений и их производных в центре пластины ($\rho = 0$).

Для того чтобы сделать условия (6) однородными, сделаем замену

$$w = \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln\rho, \qquad (7)$$

где $\bar{\psi}_\rho = \psi(1)$.

Учитывая, что $\rho^2\ln\rho$ является фундаментальным решением бигармонического уравнения, систему (5) можно представить в виде

$$D\Delta^2\widetilde{w} = R^4 q_n - h_*^2 R^2\Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \frac{\nu R^2}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}L(\widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\psi_\rho)}{d\rho} = -\frac{2R(1+\nu)}{Eh}(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho)). \qquad (8)$$

Функция Грина для нахождения функций $\widetilde{w}$ и Φ имеет вид

$$G(\rho,\xi) = G_w(\rho,\xi) = G_\Phi(\rho,\xi) = \frac{1}{4}\xi[(\xi^2+\rho^2)\ln\frac{\rho}{\xi} + (\xi^2-\rho^2)]H(\rho-\xi) +$$

$$+\frac{1}{8}\xi[2(\rho^2+\xi^2)\ln\xi + (1+\rho^2)(1-\xi^2)]. \qquad (9)$$

Здесь H — функция Хевисайда.

Используя функцию Грина (9), решение системы (8) записываем в виде следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\widetilde{w} = \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4 q_n - R^2 h_*^2 \Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln \xi)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\Phi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(\widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln \xi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln \xi)G(\rho,\xi)d\xi,$$

где

$$\bar{\psi}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho))d\rho.$$

Делая обратную замену, окончательно получаем следующую систему относительно исходных неизвестных функций w, Φ и ψ_ρ:

$$w(\rho) = \underline{R\bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln \rho} + \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4 q_n - R^2 h_*^2 \Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Phi, w)G(\rho,\xi)d\xi \triangleq$$

$$\triangleq F_1(\rho, r(\rho), w(\rho), \Phi(\rho), \bar{\psi}_\rho),$$

$$\Phi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(w,w)]G(\rho,\xi)d\xi \triangleq F_2(\rho, r(\rho), w(\rho)), \quad (10)$$

где

$$\bar{\psi}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Phi, w))d\rho.$$

Для решения поставленной контактной задачи будем использовать метод обобщенной реакции [5]. Пусть $r(\rho) \equiv q_n^-(\rho)$ — реакция основания, тогда $r(\rho)$ должна удовлетворять естественным условиям

$$r(\rho) \geq 0,\ w^{-h/2} \leq \Delta,\ r(\rho)(w^{-h/2} - \Delta) = 0, \quad (11)$$

где $w^{-h/2}$ — прогиб нижней лицевой поверхности.

Условия (11) эквивалентны одному существенно нелинейному уравнению

$$r = [r + \beta(w^{-h/2} - \Delta)]_+,\ \beta > 0. \quad (12)$$

Здесь $\phi_+ = \dfrac{1}{2}(\phi + |\phi|)$ — положительная срезка функции.

Выражение для прогиба нижней лицевой поверхности (см. (1.7) [3]) можно записать в виде

$$w^{-h/2} = w - \frac{h}{2}\Big[-\frac{\nu}{Eh}\frac{1}{R^2}\Delta\Phi + \frac{q_0 + r(\rho)}{2E}\Big] + \frac{h^2}{8}\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{R^2}\Delta w +$$

$$+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{Eh}(q_0 - r(\rho) + 2\nu L(\Phi, w))\Big] \triangleq F_3(\rho, r(\rho), w(\rho), \Phi(\rho)). \qquad (13)$$

Решение контактной задачи находится на основе итерационной схемы. При этом для прогиба используется стационарная схема Ричардсона:

$$w_k = (1-\tau)w_{k-1} + \tau F_1(\rho, r_{k-1}, w_{k-1}, \Phi_k, \bar{\psi}_{\rho k}), \qquad (14)_1$$

где

$$\bar{\psi}_{\rho k} = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_0 - r_{k-1} + \frac{1}{R^4}L(\Phi_{k-1}, w_{k-1}))d\rho, \;\; \Phi_k = F_2(\rho, r_{k-1}, w_{k-1}),$$

а для реакций — метод простых итераций

$$r_k = [r_{k-1} + \beta(w_k^{-h/2} - \Delta)]_+, \qquad (14)_2$$

где

$$w_k^{-h/2} = F_3(\rho, r_{k-1}, w_k, \Phi_k).$$

Начальное приближение можно определить так:

$$w_0 = \frac{R^4 q_0}{D}\int_0^1 G(\rho, \xi)d\xi.$$

На рис. 1 приведены результаты расчета пластины со следующими геометрическими и физическими параметрами:

$q_n^+ = 4,5\cdot 10^4$ Па, $\nu = 0,3, E = 10^8$ Па, $R = 1$ м, $h = 0,05$ м, $\Delta = 0,01$ м.

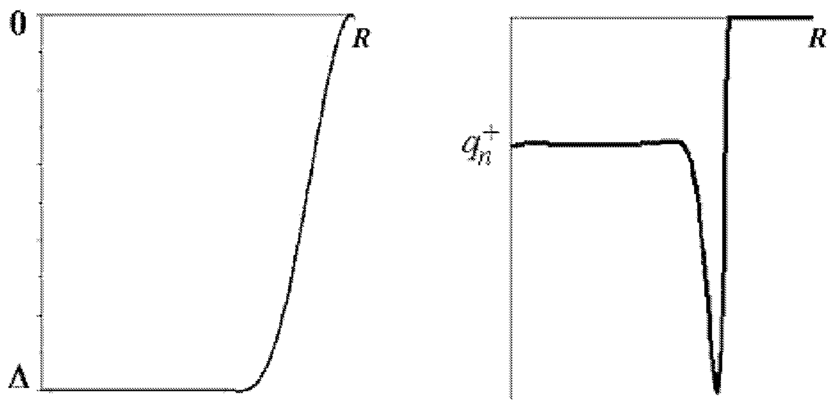

Рис.1. Прогиб срединной поверхности (w), контактные реакции (r)

5. О возможности записи полевых уравнений относительно произвольной поверхности

Следует отметить, что при решении данной контактной задачи необходимы величины, приведенные к нижней лицевой поверхности, при этом величины, приведенные к срединной поверхности, не нужны. Это приводит к тому, что величины, используемые в итерационной схеме, достаточно громоздко выражаются через искомые величины системы (3).

В работе [1] построен вариант теории типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди, разрешающие уравнения которой могут быть приведены к произвольной базовой поверхности, характеризующейся параметром b. Данные уравнения по внешнему виду совпадают с уравнениями (3). Однако при этом под w понимается прогиб некой базовой поверхности, а фиктивный момент m_n и параметр h_*^2 определяются так:

$$m_n = \frac{1}{2}(h+b)q_n^+ + \frac{1}{2}(h-b)q_n^-, \; h_*^2 = \frac{3\nu b^2 - h^2(3\nu - 4)}{24(1-\nu)}.$$

Если положить $b = 0$, то получатся уравнения (3). Если же требуется получить уравнения с переменными относительно верхней (нижней) поверхности, то следует положить $b = -h$ ($b = h$).

Основное достоинство этой теории заключается в том, что ее использование позволяет более компактно записывать условия контакта. Например, уравнение (12) при $b = h$ принимает вид

$$r = [r + \beta(w - \Delta)]_+,$$

при этом пропадает необходимость в использовании выражения (13), что существенно упрощает решение задачи. Однако при этом следует помнить, что функции напряжения, а как следствие, усилия и моменты определяются по другим формулам.

Список литературы

1. **Ермоленко А. В.** Теория плоских пластин типа Ка́рмана – Тимошенко – Нагди относительно произвольной базовой плоскости // *В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.*

2. **Михайловский Е. И., Бадокин К. В., Ермоленко А. В.** Теория изгиба пластин типа Ка́рмана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Мат. Мех. Инф. 1999. Вып. 3. С. 181–202.*

3. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В.** Полудеформационный вариант граничных условий в нелинейной теории пологих оболочек // *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Тр. научн. школы акад. В.В. Новожилова. СПб.: СПбГУ, 2000. Вып. 3. С. 60–76.*

4. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В.** Уточнение нелинейной квазикирхгофовской теории оболочек К.Ф. Черныха // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Мат. Мех. Инф. 1999. Вып. 3. С. 203–222.*

5. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.*

6. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский университет, 1995. 251 с.

7. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

Summary

Yermolenko A. V. The refined theory of plates aimed at solving contact problems

Using the classical theory to solve contact problems we obtain reactions with concentrated efforts. But using the Karman – Timoshenko – Naghdi type equations we obtain square–integrable reactions. To simplify the conditions of conjugation of interactive elements we propose to use the version of the refined theory of plates, which allows the equation to be reduced to an arbitrary surface.
Keywords: theory of plates, contact problem.

СыктГУ *Поступила 11.11.2014*