Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.1(19). 2014

УДК 330.115

О КУРСЕ «ЭСТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ» И РОЛИ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Р. Р. Пименов

Предлагается метод обучения ключевым математическим концепциям посредством построения эстетических образов. Метод базируется на симметрии между окружностями (инверсии). Концепция симметрии между окружностями может быть сквозным элементом математического образования. Это упростит усвоение теории групп, неевклидовых геометрий, понятия предела и многих других понятий высшей математики.
Ключевые слова: *геометрия, эстетика, симметрия, инверсия, теория групп, реформа образования.*

1. Введение

В математическом и педагогическом сообществе распространены дискуссии о школьной математике в XXI веке. Эта статья посвящена двум связанным между собой темам таких дискуссий: роль компьютера на уроках математики и приближение школьных уроков к проблемам современной математики. Последнее особенно актуально: на уроках химии, биологии, физики рассказывается о научных концепциях XIX и XX веков, школьная математика же обычно обрывается на временах Декарта и Ньютона.

Последнее наблюдение я услышал от В.А. Рыжика, автора многих учебников по геометрии, заслуженного учителя, работающего в физико-технической школе имени Иоффе, С-Петербург. Это — уникальная школа, входящая в Академический университет, и открытая для многих свежих идей. Благодаря инициативе В.А. Рыжика я несколько лет провожу в ФТШ факультатив «Эстетическая геометрия», о котором и рассказывается в статье. Этот факультатив использует компьютерные возможности для обучения геометрии окружности и введению в теорию групп, неевклидовы геометрии и другие концепции более современной математики, чем, например, тригонометрия. Ученики погружаются в подлинную «лабораторию эстетики», ведь геометрия окружности теснейшим образом связана с эстетическими образами и ученики знакомятся с алгоритмами их создания. Эти же алгоритмы и являются введением в теорию групп, связаны с понятиями предела, непрерывности и другими фундаментальными математическими концепциями. Ниже я подробней расскажу о ходе занятий и возможностях для преподавания. Но начну с сущностной, математической стороны дела. На эту тему весной 2014 года вышла моя книга «Эстетическая геометрия или теория симметрий» [1], за что я благодарю издателей: М.М. Эпштейна и инициатора издания В.А. Рыжика. Книга рекомендована экспертным советом программы «Школьная лига РОСНАНО» для элективных курсов, факультативов, проектной работы учащихся общеобразовательных школ.

В 70-е годы прошлого века в Европе под влиянием книги Бахмана «Построение геометрии на основе понятия симметрия» [2] возникло педагогическое движение. Оно стремилось модифицировать школьную геометрию, сделав центральным понятием симметрию. Бахман в своем труде показал, как с помощью исчисления симметрий выражать и доказывать геометрические теоремы, например многочисленные теоремы о треугольнике. Симметриоцентрические аксиомы, предложенные им, просты и удобны и не сложней обычных школьных подходов к геометрии. Доказательства классических теорем на их основе вполне возможны. Но движение не преуспело, вероятно, потому, что «симметрицентрический» подход к евклидовой геометрии не давал ни более простых доказательств известных теорем, ни каких-либо новых знаний и был скорее методологически интересен учителю, чем привлекателен для ученика. Подумаем: много ли мы знаем теорем евклидовой геометрии, которые удобней всего доказывать с помощью симметрий (относительно точки или прямой)? Такие задачи редки и обычно специально сконструированы.

Совершенно иначе обстоит дело в геометрии окружности. Там метод Бахмана, симметрия, сразу позволяет простейшим образом доказывать содержательнейшие теоремы и чертежи этих теорем эстетичны. Ранее такой подход был невозможен, по крайней мере в школе, так как построение окружностей (например, по трем точкам) — сама по себе некоторая задача, отнимающая время и внимание. Но сейчас в дело входит компьютер, исполняющий это моментально. Я приведу примеры.

На рис. 1 мы видим семейство окружностей–лепестков, касающихся внешним образом меньшей окружности и внутренним — большей. Лепестки также касаются друг друга по цепочке.

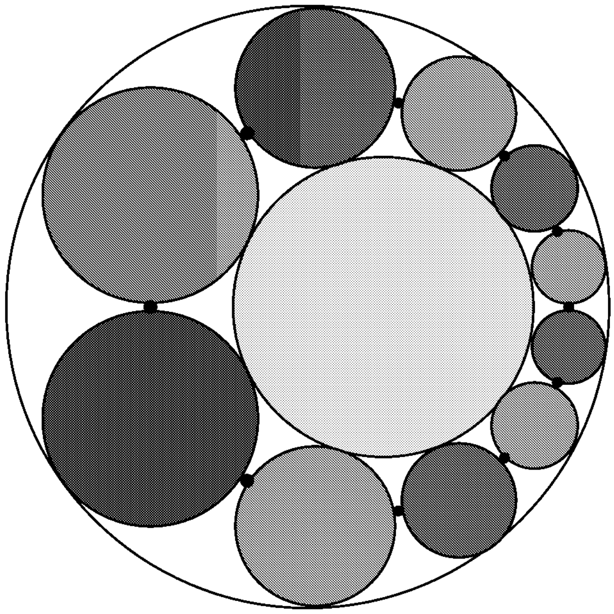


Рис. 1. Теорема о серединной окружности

С этим рисунком (сделанным учениками на занятиях) связано несколько теорем об окружностях:

1. Точки касания лепестков между собой сами лежат на одной окружности.

2. Относительно этой окружности внутренняя и обрамляющая окружности симметричны (поэтому эта окружность называется серединной окружностью, или биссектрисой между внутренней и внешней окружностями).

3. 4 точки касания двух произвольных лепестков с внешней и внутренней окружностью обязательно лежат на одной окружности. Эту теорему обычно называют теоремой о четырех окружностях, касающихся друг друга по цепочке.

Обычные доказательства этих теорем не так-то просты. Набросаем доказательство всех этих теорем, основанное на симметрии между окружностями. Существует окружность, относительно которой внутренняя и обрамляющая окружности симметричны. При этой симметрии окружность, касающаяся и той и другой, переходит в себя, то есть лепесток как целое остается на месте. Следовательно, точки пересечения двух лепестков при такой симметрии меняются местами, а точки касания лепестков остаются неподвижными. Следовательно, они лежат на одной окружности, относительно которой внешняя и внутренняя окружности симметричны. Утверждения 1 и 2 доказаны.

Легко видеть, что точки касания одного лепестка с внешней и внутренней окружностью симметричны относительно рассматриваемой симметрии. Два произвольных лепестка таким образом задают две пары симметричных точек. А, по **первой теореме эстетической геометрии** (см. ниже раздел 2), такие четыре точки всегда лежат на одной окружности [3]. Утверждение 3 доказано.

Также с рисунком связан поризм Штайнера (см. [4]), и в рамках излагаемого подхода имеется простое его доказательство, на которое здесь нет места. На факультативе не только был выполнен этот рисунок, но он был и анимирован — лепестки плавно двигаются между двумя окружностями.

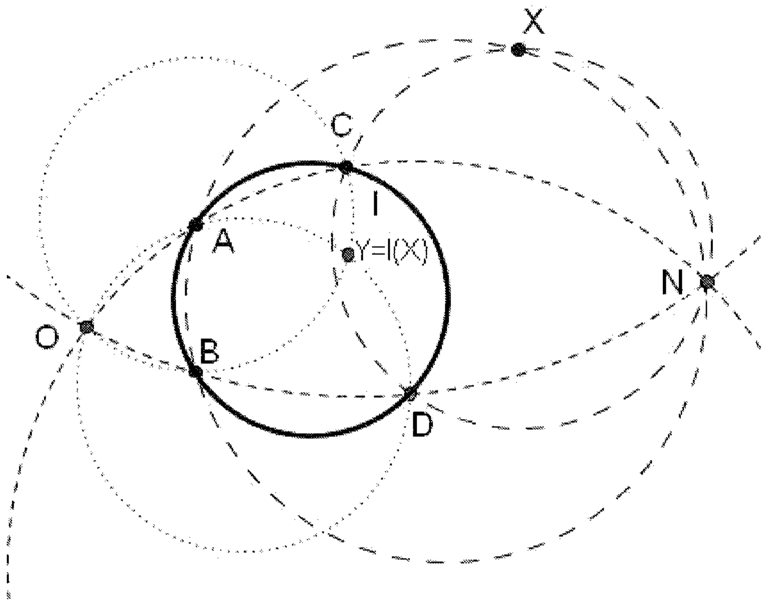


Рис. 2. Теорема о разбиении четырех точек на пары тремя способами

Этот чертеж вряд ли можно назвать красивым внешне. Но теорема, скрывающаяся за ним, очень неожиданна. Возьмем произвольную окружность I и четыре произвольные точки на ней: A, B, C, D. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами. Каждому способу разбиения на пары соответствуют окружности одного типа на рисунке. Возьмем теперь произвольную точку X вне окружности I. Проведем через X и пару точек одну окружность, через X и оставшуюся пару — другую окружность. В пересечении этих окружностей — точка N. Теперь разобьем четыре точки на пары другим способом и проведем описанным образом пару окружностей через N. Их пересечение — точка O. Разобьем четыре исходные точки на пары третьим способом, проведем соответствующие окружности в их пересечении — точка Y.

Теорема утверждает, что как бы ни выбирались точки A, B, C, D на окружности I, точка Y симметрична X относительно I, т.е. $Y = I(X)$. Доказательство этого утверждения, использующее основы теории групп, будет дано в следующем разделе.

2. В мире поломанных линеек. Основные понятия факультатива

Теперь я отмечу своеобразие подхода к окружности и инверсии (симметрии между окружностями), систематически выдержанное в ходе факультатива. Распространены два определения инверсии. Одно, алгебраическое, говорит, что произведение расстояний от центра окружности до образа и прообраза равно квадрату радиуса окружности инверсии. Другое, геометрическое, требует проведения касательных прямых и секущей. Оба эти определения предполагают, что метрическая структура плоскости нам уже известна и что прямые нам тоже известны. Эти определения возникают и работают в уже данной нам евклидовой геометрии. А окружность в евклидовой геометрии определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от данной.

Факультатив «Эстетическая геометрия» рассматривает окружность как некую неопределяемую фигуру. В любом курсе есть неопределяемые понятия, в данном случае это окружность. В самом начале обсуждается, что окружность — промежуточная фигура между точкой и прямой: точка — окружность бесконечно малого радиуса, прямая — окружность бесконечно большого радиуса. Также мы знаем, что окружность однозначно задается тремя точками (обычную оговорку про прямые делать не надо, так как прямая рассматривается как частных случай окружности).

Фундаментальное свойство окружности — относительно окружности есть симметрия. Свойства этой симметрии и обсуждаются в ходе занятий. Вводится естественное обозначение: если A и B окружности, то $A(B)$ обозначает окружность, симметричную B относительно A. Вслед за этим вводится понятие перпендикулярных окружностей. По аналогии с миром прямых: перпендикулярными окружностями называются окружности, которые неподвижны при симметрии относительно друг друга, $A(B) = B$ равносильно тому, что A и B перпендикулярны. Без доказательства фиксируется **основное свойство перпендикулярных окружностей**: если пара точек p и q симметрична относительно какой-то окружности A, то любая окружность, проходящая через p и q перпендикулярна A. Используется именно термин «перпендикулярность», а не «ортогональность», так как термин «перпендикулярность» уже известен ученикам из геометрии прямых и аналогии с геометрией прямых очень полезны на начальном этапе занятий. Также есть важные аналогии и со стереометрией, но здесь нет места их приводить.

Из основного свойства перпендикулярных окружностей легко выводится **первая теорема эстетической геометрии**: если есть две пары симметричных относительно какой-то окружности A точек, то все четыре точки этих пар обязательно лежат на одной окружности. Доказательство тривиально: проведем окружность B через одну пару точек и какую-то точку второй пары. По основному свойству перпендикулярных окружностей B перпендикулярна A (так как проходит через пару симметричных относительно A точек). Следовательно, последняя точка второй пары также лежит на B. Плодотворность основного свойства и первой теоремы эстетической геометрии хорошо видна уже по рис. 1, где с их помощью доказываются нетривиальные наглядные теоремы. По ходу занятий с помощью первой теоремы эстетической геометрии доказывается очень много нетривиальных наглядных утверждений, в том числе решается задача Аполлония о проведении окружности, касающейся трех данных. Рассматривается действие опустить перпендикуляр. Из пары точек можно единственным образом опустить перпендикуляр (провести перпендикулярную окружность) на любую окружность, из одной точки можно опустить перпендикуляр на две произвольные окружности. Это также в дальнейшем используется для доказательства теорем и построения изящных образов.

Следующая задача, ставящаяся на факультативе и решаемая по мере овладения учениками базовых понятий симметрии и перпендикулярности, — определение симметрии между окружностями (инверсии) с помощью понятий только геометрии окружности (без слов о расстоянии, центре окружности, прямых).

Определение симметрии между окружностями через две пары образ-прообраз

Определить симметрию между окружностями «внутренними методами геометрии окружностей» (то есть без использования метрики и других понятий евклидовой геометрии) проще всего через две данные пары симметричных точек. Пусть есть симметрия I и нам известны образы двух каких-то точек при этой симметрии. Как найти исходя из этого образ произвольной точки X при симметрии I?

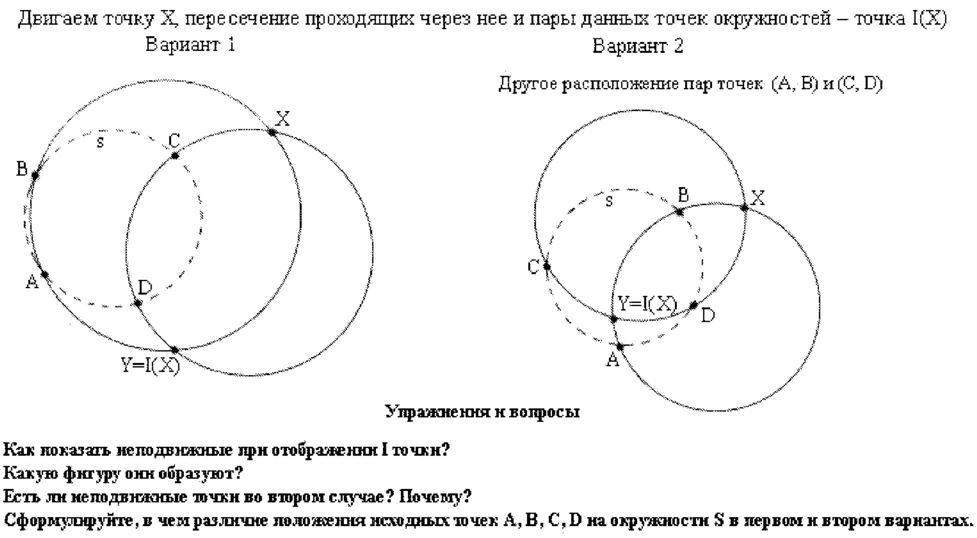


Рис. 3. Определение симметрии I по двум парам симметричных точек: (A, B) и (C, D)

Для нахождения $I(X)$ понадобилось провести всего две окружности. Заметим, что аналогичных методов нет в геометрии прямых, там невозможно с помощью столь простых построений определить симметрию по одной или двум парам образ-прообраз. Нам обязательно понадобится угольник или умение измерять расстояние, а одной линейки без делений будет недостаточно. Отметим, что данное построение целиком переносится в N-мерное пространство. Для иллюстрации использован скриншот программы geogebra, в ходе занятий ученики могут динамически изменять чертеж, шевеля нужные точки.

Теперь набросаем доказательство утверждаемого на рис. 2 (раздел 1, теорема о разбиении четырех точек на пары тремя способами). Каждое разбиение четырех точек на пары задает симметрию, как было показано. Обозначим эти симметрии f, g, h. Точка Y есть результат последовательного действия этих трех симметрий, $Y = f(g(h(X)))$. Посмотрим, как действует преобразование $f * g * h$ на точки A, B, C, D. Легко видеть, что это преобразование оставляет указанные точки неподвижными. Следовательно, оно оставляет неподвижными все точки окружности I и таким образом — либо симметрия относительно этой окружности, либо тождественное преобразование. Так как рассматривается композиция трех симметрий, то она не может быть тождественным преобразованием (каждая симметрия меняет ориентацию). Следовательно, рассматриваемая композиция сама есть симметрия относительно окружности I. Что и требовалось доказать.

Итак, мы научились делать симметрию относительно окружности не по парам образ-прообраз, а непосредственно. Достаточно выбрать на данной окружности I четыре точки и осуществить указанное построение, стартуя с произвольной точки X, результат будет $I(X)$ независимо от выбора исходных точек на I.

Определение симметрии между окружностями через трехокружник, виды трехокружников, их свойства в аналогии с треугольником

Подобно тому как евклидова геометрия изучает треугольник, эстетическая геометрия изучает трехокружник. Трехокружником на факультативе называется фигура из трех взаимопересекающихся окружностей. Их следует классифицировать: если одна окружность **разделяет** точки пересечения двух других, трехокружник называется римановым, если все три окружности пересекаются в одной точке, трехокружник называется евклидовым, если же третья окружность **не разделяет** точки пересечения двух других, то трехокружник называется трехокружником Лобачевского. Понятие **разделения** является одним из базисных понятий эстетической геометрии, а указанная классификация интересно обобщается на сферы. Пары точек пересечения окружностей трехокружника называются вершинами, а сами окружности — сторонами трехокружника. В произвольном трехокружнике нетрудно определить биссектрисы и высоты, оказываются верны теоремы об их пересечении, аналогичные теоремам о евклидовом треугольнике. Медиану определить чуть сложнее (у нас еще нет понятия расстояния), но это также возможно, и аналогичная теорема о пересечении медиан также верна в трехокружнике.

Фундаментальное свойство трехокружника (кроме евклидова случая) — он определяет симметрию между окружностями, а именно в нем есть три пары точек пересечения образующих трехокружник окружностей. Любые две из этих пар задают симметрию окружностей, как показано выше. Соответственно, с трехокружником связаны три симметрии окружностей. Но все эти три симметрии совпадают между собой, что гарантирует **теорема о трех окружностях**.

Даны три пересекающиеся окружности A, B, C и произвольная точка X вне их. Через пары точек пересечения окружностей между собой и точку X проведены три окружности. Теорема утверждает, что они все пересекаются не более чем в двух точках (одна из точек пересечения —

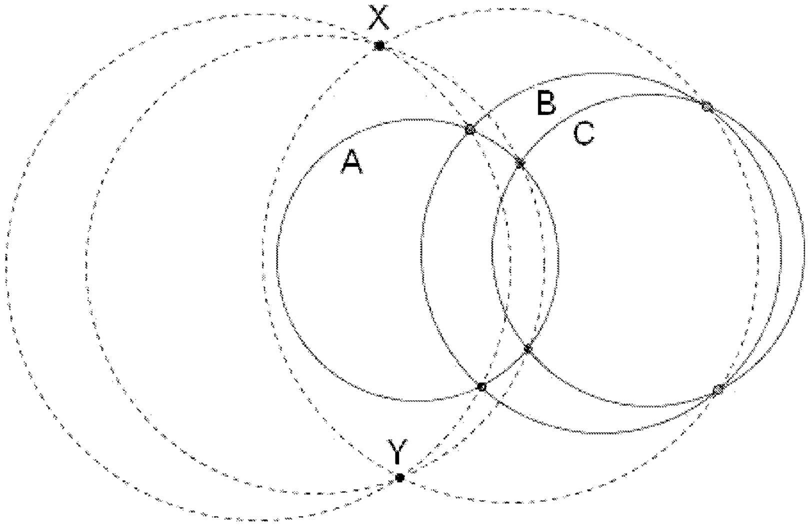


Рис. 4. Теорема о трех окружностях

сама точка X, вторая — Y на чертеже). Точка Y и будет симметрична X относительно трехокружника A, B, C.

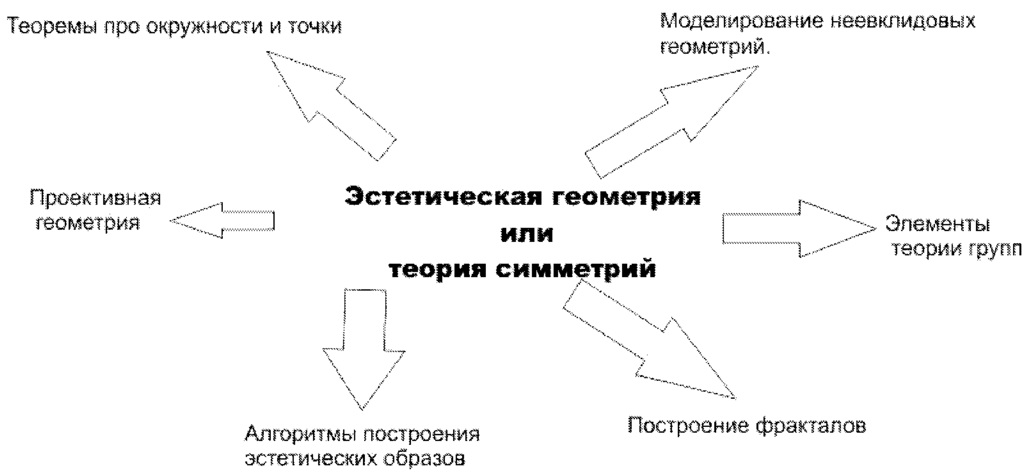
Теорема о трех окружностях имеет много важных обобщений и переформулировок, одна из них: даны четыре взаимопересекающиеся окружности A, B, C, D. Известно, что пары точек пересечения A и B лежат на одной окружности с парой точек пересечения C и D. Тогда и пары точек пересечения окружностей A и C лежат на одной окружности с парой точек пересечения B и D. В геометрии принято обращать внимание, когда простейшее доказательство плоской теоремы дается через объемные рассуждения. Здесь именно такой случай, я приведу стереодоказательство этой теоремы.

Вспомним, что три сферы в общем случае пересекаются в двух точках: две сферы пересекаются по окружности, а сфера с окружностью — в двух точках. Проведем сферу X_a через точку X и окружность A, сферу X_b через точку X и окружность B, сферу X_c через точку X и окружность C. Окружность, проведенная через X и пару точек пересечения окружностей A и B, будет линией пересечения сфер X_a и X_b. Окружность, проведенная через X и пару точек пересечения окружностей B и C, будет линией пересечения сфер X_b и X_c. По условию, точка Y лежит на пересечении этих двух окружностей. Но точки пересечения этих двух окружностей есть пересечение всех трех проведенных нами сфер: X_a, X_b, X_c. Точки X и Y, по условию, лежат на пересечении этих окружностей, следовательно, они есть точки пересечения этих трех сфер. Окружность, проходящая через X и пару точек пересечения окружностей A и C, есть линия пересечения X_a и X_c, и пара точек пересечения этих трех сфер обязательно лежит на ней. Что и требовалось доказать.

Легко видеть, что риманов трехокружник определяет симметрию окружностей, у которой нет неподвижных точек. Этот случай обычно называют «мнимой инверсией», но такое название не всем нравится, на факультативе оно не используется.

3. Применение основных идей

Ранее дан краткий обзор идей, метода и основных понятий и фигур эстетической геометрии. Все это оказалось вполне доступно школьникам даже 9-го класса. Дальше курс развивается в зависимости от желания учителя и подготовки учеников. Возможные направления показаны на рис. 5.



http://bogemnyipeterburg.net/revolt/matem/teachpictures/index.html

Рис. 5. Диаграмма возможных направлений эсетической геометрии

Самое простое применение методов эстетической геометрии — моделирование неевклидовых геометрий. Соответствующий трехокружник является треугольником одноименной геометрии, паре точек трехокружника (вершине трехокружника) соответствует одна точка (вершина треугольника). Развитие этой темы на факультативе зависело от подготовки учеников, их знаний о неевклидовых геометриях. Факультатив называется «Эстетическая геометрия», поэтому школьники всегда учатся приемам построения эстетических образов. Это основано на композиции симметрий относительно окружностей (сфер) и математически выражается термином: «действия группы на множество», в связи с чем ученикам давались понятия: группа, порядок элемента, коммутирующие элементы. Все эти понятия сразу получали выразительный геометрический и эстетический комментарий. Самостоятельные работы учеников опубликованы в журнале «Компьютерные инструменты в школе» [3].

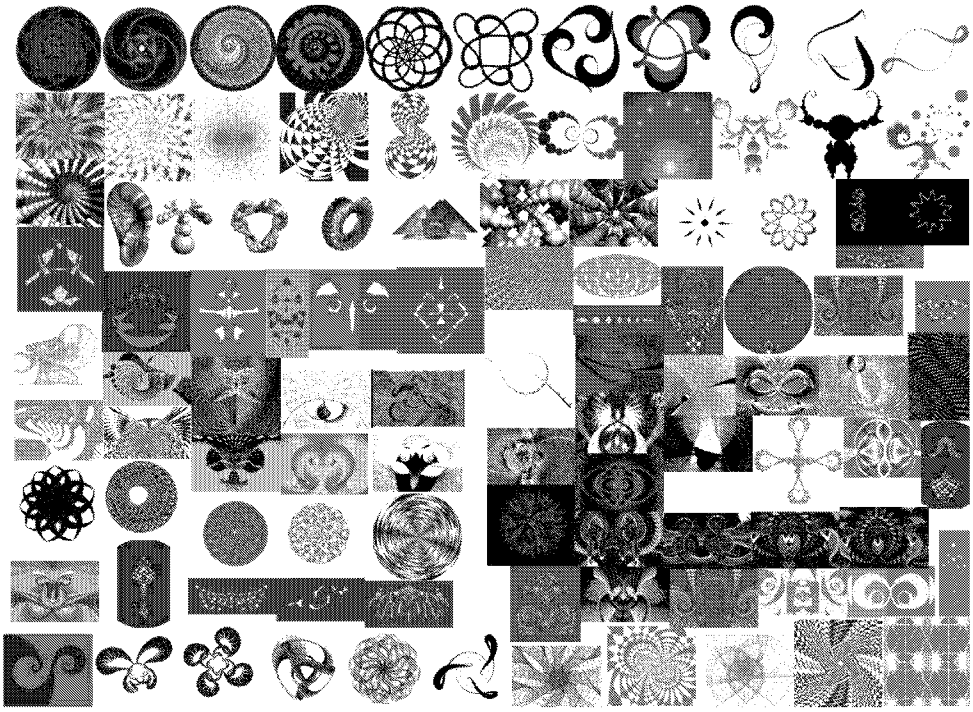


Рис. 6. Многообразие форм геометрии окружности

В данной статье не даются описания алгоритмов построения образов: их можно выражать с помощью дробно-линейных преобразований, но геометрический подход, основанный на композиции симметрий, наглядней, удобней и не требует дополнительных знаний учеников.

В ходе занятий использовались компьютерные средства:

1. Geogebra — бесплатно распространяемая программа, ее скриншоты используются в статье. Она великолепно подходит для геометрических чертежей и позволяет их анимировать.

2. Авторские макросы к CorelDraw. Они позволяют делать чертежи геометрии окружностей в популярной программе векторного дизайна и быстро осуществлять композицию симметрий, что важно для

построения эстетических образов. Результаты геометрических построений обрабатываются дизайнерскими средствами CorelDraw. В результате получаются неожиданные красивые формы: орнаменты, спирали и другие.

3. Авторская программа DodecaLook для демонстрации авторского видео-арта, основанного на эстетической геометрии.

4. Авторские итерактивные флеш-программы.

Я считаю, что изложенные идеи и программные средства дают возможность существенно обогатить преподавание математики. Понятие симметрии между окружностями может быть сквозным элементом преподавания. Знакомство с эстетической геометрией может происходить с младших классов, в содружестве учителей математики и рисования, а позднее — во взаимодействии учителей геометрии и информатики (поскольку одновременно с геометрией учащиеся овладевают различными компьютерными средствами).

Проблему представляет то, что изложенный подход к инверсии нестандартен и находится на периферии современной математической культуры. Я постарался компенсировать это в книге [1].

На основе излагаемых идей может действовать постоянная компьютерная лаборатория, мастер-классы для учителей, а также может быть прочитан курс для студентов.

Список литературы

1. **Пименов Р. Р.** Эстетическая геометрия или теория симметрий. СПб.: Школьная лига, 2014. 288 с.

2. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии /пер. с нем. Р.И. Пименова; под ред. И.М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

3. **Пименов Р. Р.** В мире поломанных линеек // *Компьютерные инструменты в школе. № 5. 2011. С. 66–72.*

4. **Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. П.** Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978. 225 с.

Summary

Pimenov R. R. On course «Aesthetic geometry» and importance of symmetry with respect to a circle in mathematics education

There is a method of teaching the key mathematical concepts through the construction of aesthetic images. This method is based on the symmetry between the circles (inversion). The concept of symmetry between the circles can be cross–cutting element of mathematics education. This will simplify learning the ideas of group theory, non–Euclidean geometry, the concept of a limit and many other concepts of «Higher Mathematics».
Keywords: geometry, aesthetic, symmetry, inversion, group theory, education reform.

Академическая гимназия им. Иоффе *Поступила 09.11.2014*