Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 513.88

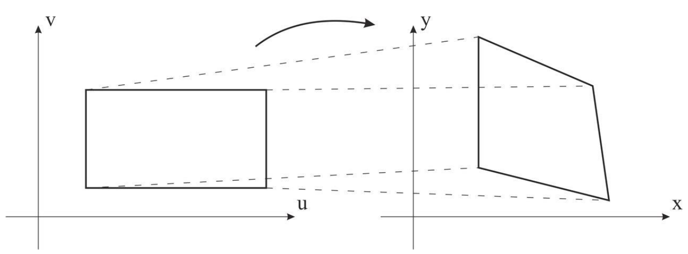
СИНТЕЗ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВЫ

Г. В. Моськин, В. Л. Никитенков, Г. А. Ситкарев

В статье рассматривается искажение цифрового изображения под влиянием перспективы. Описан метод, позволяющий найти матрицу преобразования перспективы, с помощью которой можно получить неискажённое изображение.
Ключевые слова: обработка изображений, преобразование двумерных однородных координат, искажение перспективы.

Введение

Когда мы наблюдаем какой-либо объект, та его часть, что находится ближе к нам, кажется нам больше, чем часть, находящаяся дальше от нас. Это известное явление носит название перспектива. Имея дело с изображениями объектов, приходится сталкиваться с той же проблемой. В то же время, иногда необходимо получить неискажённое изображение.



Рассмотрим задачу, которая заключается в распознавании текста на изображении, получаемом камерой, в поле зрения которой попадают дисплеи контрольно-кассовых аппаратов. На выходе требуется получить эти символы в виде текста. Дисплеи имеют прямоугольную форму, но их изображение искажено под влиянием перспективы. Данная статья рассматривает способ получения неискажённого изображения. Подробнее с обработкой изображений можно ознакомиться в [1].

1. Гипотеза о фотокамере

Наши дальнейшие выводы основываются на предположении, что искажения, вносимые фотокамерой, могут быть описаны с достаточной точностью в следующем виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}\mathbf{T} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{q}$ — координата изображения (снимка), $\mathbf{p}$ — внешняя координата и $\mathbf{T}$ — квадратная матрица, описывающая вносимые фотокамерой искажения. Здесь и далее подразумевается, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ есть однородные координаты двумерной плоскости, т. е. любая точка представлена в них соответственно тройками *(u, v, 1)* и *(x, y, 1)*. Если соответствующая пара координат изображения и внешних координат это

$$(x, y) \leftarrow (u, v),$$

то (1.1) задаёт фактически две функции:

$$x = X(u, v) \text{ и } y = Y(u, v).$$

Преобразование перспективы обладает рядом важных свойств, отличающих его от прочих преобразований:

1. Прямые линии всегда остаются прямыми.
2. Прямые линии, параллельные плоскости проекции, остаются параллельными ей.
3. Прямые линии, не параллельные плоскости проекции, устремляются к горизонту.

Если коэффициенты матрицы $\mathbf{T}$ известны, то обратное преобразование из координат изображения во внешние координаты можно осуществить через обратную матрицу

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\mathbf{adj}(\mathbf{T})}{\mathbf{det}(\mathbf{T})},$$

как

$$\mathbf{q}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{p}.$$

В силу свойств матрицы $\mathbf{T}$, деление или умножение на скаляр всех её элементов не изменяет самого преобразования. Поэтому, деление на определитель, который есть скалярное значение, можно спустить. Далее предполагается, что $\mathbf{det}(\mathbf{T}) \neq 0$

2. Преобразование двумерных однородных координат

В общем виде преобразование двумерных однородных координат в матрично-векторной форме записывают так:

$$[x' \; y' \; w'] = [u \; v \; w] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [u \; v \; w]\,\mathbf{T}; \tag{2.2}$$

$$x = \frac{x'}{w'}, \; y = \frac{y'}{w'}. \tag{2.3}$$

Значение w можно выбирать произвольно, в дальнейшем нам будет удобно, если w=1. Матрицу преобразования можно разбить на 4 части:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right].$$

Блок A отвечает за масштабирование, вращение, отражение и сдвиг, C — за параллельный перенос. Блок B характеризует плоскость, в которую попадает вектор после преобразования, например, если $a_{13} = a_{23} = 0$, то преобразованный вектор будет находиться в плоскости $w = a_{33}$, которая параллельна исходной $w = 1$. Последний элемент a_{33} отвечает за пропорциональное масштабирование, при котором все компоненты вектора изменяются пропорционально. Более подробно с этими фактами можно ознакомиться в [2], [3].

Поскольку матрица $\mathbf{T}$ может быть нормализована за счёт деления на a_{33}, будем считать, что $a_{33} = 1$. Тогда, из (2.2) и (2.3)

$$x = \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}}{a_{13}u + a_{23}v + 1}, \tag{2.4}$$

$$y = \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}}{a_{13}u + a_{23}v + 1}. \tag{2.5}$$

Умножим (2.4) и (2.5) на знаменатель:

$$x\left(a_{13}u + a_{23}v + 1\right) = a_{11}u + a_{21}v + a_{31},$$

$$y\left(a_{13}u + a_{23}v + 1\right) = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}.$$

Раскрывая скобки в левой части, и выполнив перенос в правую часть членов при a_{13} и a_{23}, получим

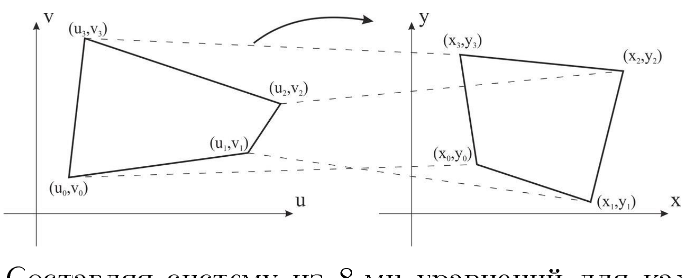
$$x = X(u,v) = a_{11}u + a_{21}v - a_{13}ux - a_{23}vx + a_{31},$$

$$y = Y(u,v) = a_{12}u + a_{22}v - a_{13}uy - a_{23}vy + a_{32}.$$

3. Общий случай синтеза: „четырёхугольник в четырёхугольник“

Преобразование двумерных однородных координат обладает 8-ю степенями свободы (по числу коэффициентов в матрице). Это свойство даёт нам возможность связать координаты любого четырёхугольника во внешних координатах с ним же в координатах изображения. Пусть имеется четыре пары точек, задающих координаты вершин соответствующих четырёхугольников:

$$\begin{array}{l} (x_0, y_0) \leftarrow (u_0, v_0)\,, \\ (x_1, y_1) \leftarrow (u_1, v_1)\,, \\ (x_2, y_2) \leftarrow (u_2, v_2)\,, \\ (x_3, y_3) \leftarrow (u_3, v_3)\,. \end{array} \tag{3.6}$$



Составляя систему из 8-ми уравнений для каждой точки из (3.6), получим систему уравнений в матрично-векторной форме:

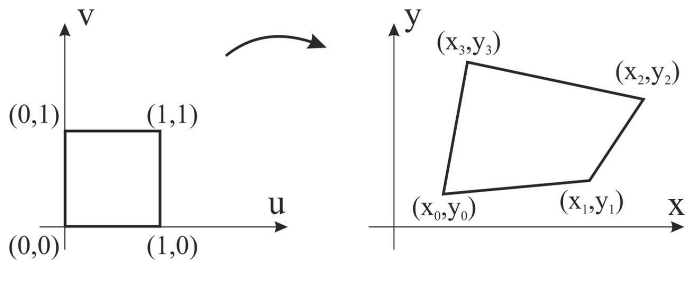
$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_0x_0 & -v_0x_0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -v_1x_1 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -v_2x_2 \\ u_3 & v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3x_3 & -v_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & v_0 & 1 & -u_0y_0 & -v_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1y_1 & -v_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -u_2y_2 & -v_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 1 & -u_3y_3 & -v_3y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad (3.7)$$

решая которую для неизвестных a_{11}, a_{21},..., a_{23}, мы получим искомые коэффициенты матрицы преобразования двумерных однородных координат. С помощью данного преобразования можно избавиться от искажения перспективы.

4. Специальные случаи синтеза

4.1. Специальный случай: „единичный квадрат в четырёхугольник“ Попытаемся избавиться от необходимости находить решение системы линейных уравнений 8x8. Для этого рассмотрим не общий, а специальный случай, когда во внешних координатах единичному квадрату соответствует четырёхугольник в координатах изображения. В этом случае пары соответствующих точек имеют координаты:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\leftarrow (0, 0)\,, \\ (x_1, y_1) &\leftarrow (1, 0)\,, \\ (x_2, y_2) &\leftarrow (1, 1)\,, \\ (x_3, y_3) &\leftarrow (0, 1)\,. \end{aligned}$$



Тогда система уравнений (3.7) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -y_2 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Преобразуем (4.8) к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{31} = x_0, \\ a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 = x_1, \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 = x_2, \\ a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 = x_3, \\ a_{32} = y_0, \\ a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 = y_1, \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 = y_2, \\ a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 = y_3. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и четвёртое и прибавим третье. Аналогично поступим со второй половиной системы:

$$\begin{cases} a_{13}(x_1 - x_2) + a_{23}(x3 - x2) = x_0 - x_1 + x_2 - x_3, \\ a_{13}(y_1 - y_2) + a_{23}(y3 - y2) = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 \end{cases},$$

Эту систему 2x2 легко решить, например, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_3 - x_2 \\ y_1 - y_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix},$$

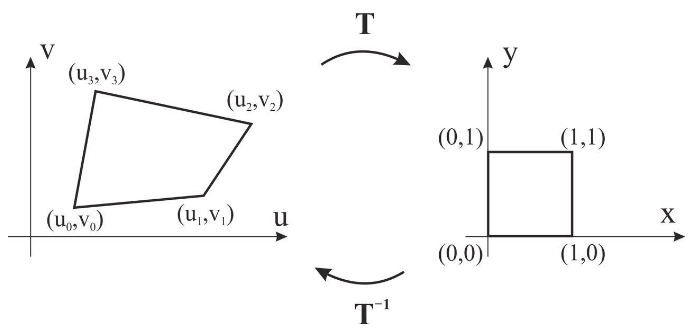
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_0 - x_1 + x_2 - x_3 & x_3 - x_2 \\ y_0 - y_1 + y_2 - y_3 & y_3 - y_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2 & y_0 - y_1 + y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда неизвестные — это

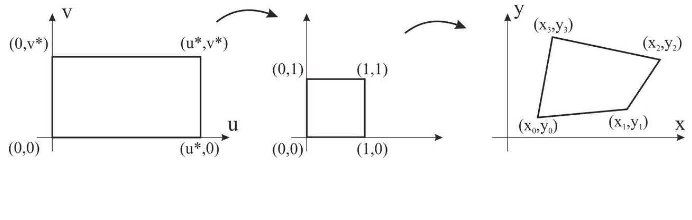
$$\begin{array}{ll} a_{13} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, & a_{23} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ a_{11} = x_1 - x_0 + a_{13}x_1, & a_{12} = y_1 - y_0 + a_{13}y_1, \\ a_{21} = x_3 - x_0 + a_{23}x_3, & a_{22} = y_3 - y_0 + a_{23}y_3, \\ a_{31} = x_0, & a_{32} = y_0. \end{array} \tag{4.9}$$

4.2. Специальный случай: „четырёхугольник в единичный квадрат“ В случае, когда требуется найти преобразование обратное рассмотренному ранее, сначала находят преобразование как для случая „единичный квадрат в четырёхугольник“, формируют из полученных коэффициентов матрицу, а затем находят обратную ей.



Формулы для нахождения $\mathbf{T}^{-1}$ приведены выше, матрицу $\mathbf{T}$ можно найти как $\left(\mathbf{T}^{-1}\right)^{-1}$.

Для реализации преобразования в общем случае, можно использовать композицию двух специальных случаев: первым шагом выполнить преобразование из искомого четырёхугольника в единичный квадрат, вторым — из единичного квадрата в исходный четырёхугольник. В результате, задача сводится к нахождению корней системы (4.8) по формулам (4.9) и нахождению обратной матрицы размера 3x3, вместо решения системы (3.7). Если же искомый четырёхугольник является прямоугольником, то преобразование, выполняемое на первом шаге — это непропорциональное масштабирование в u* раз по одной оси и в v* раз по другой.



Литература

1. **Вудс Р., Гонсалес Р.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

2. **Роджерс Д., Адамс Дж.** Математические основы машинной графики. М.: Мир 2001. 604 с.

3. **Хартсхорн Р.** Основы проективной геометрии. М., 1970. 160 с.

Summary

Moskin G. V., Nikitenkov V. L., Sitkarev G. A. Synthesis of perspective transformation matrix

In this article the distortion of digital image influenced by perspective is considered. The method to find a perspective transformation matrix to get undistorted image is described.

Keywords: Image processing, Transformation of two-dimensional homogeneous, coordinates Perspective transformation.

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 31.05.2013*