Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 513.88

О ПОЛУГРУППЕ МОДУЛЯР МАРЦИНКЕВИЧА

А. А. Меклер

Продолжается изучение инвариантных свойств M-функций и их баз по отношению к полугрупповой операции суперпозиции. Установлено, что степенное, а также и псевдостепенное свойство M-функций выделяют две замкнутые и коммутативные подполугруппы.
Ключевые слова: композиция M-модуляр, суперпозиция баз, подполугруппы, идеалы.

Настоящая статья примыкает к серии предыдущих работ [1] - [8], в большинстве опубликованных в этом же журнале и посвящённых изучению топологических инвариантов пространства Марцинкевича, т.е. таких его свойств, которые определены только составом элементов пространства. Предметом статьи, как и в [7], является полугруппа по композиции так называемых M-модуляр - классов $\overset{m}{\sim}$эквивалентности функций, нормирующих пространства Марцинкевича. Именно M-модуляры несут всю информацию о топологических инвариантах пространства Марцинкевича, а вместе с ним пространств Лоренца и Орлича. Совокупности M-модуляр, отвечающих рассмотренным ниже инвариантам, образуют алгебраические подструктуры в упомянутой полугруппе, - подполугруппы и идеалы, - иногда наделённые ещё и дополнительными свойствами.

Мы ограничиваемся случаем пространств Марцинкевича, состоящих из функций на отрезке $[0,1]$ и отсылаем к [2] - [4], а также к монографии [10] за основными определениями и фактами; здесь же приводим лишь некоторые из них, относящиеся к функциям Марцинкевича (M-функциям), их модулярам и базам.

1. Вспомогательные сведения.

Полугруппы: подполугруппы и идеалы

Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{W}$, операция которой (вообще говоря, некоммутативная) обозначается $\otimes$. Подмножество $\mathcal{V}$ этой полугруппы будем называеть:

- *Подполугруппой*, если $v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}$.
- *Замкнутой подполугруппой*, если $v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Leftrightarrow v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}$.
- *Правозамкнутой подполугруппой*, если

$$\begin{cases} v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}; \\ v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow v_2 \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

- *Двусторонним идеалом*, если $(v_1 \in \mathcal{V}$ или/и $v_2 \in \mathcal{V}) \Rightarrow v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}$.

- Двусторонний идеал $\mathcal{V}$ называется *замкнутым*, если

$$v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V} \Leftrightarrow (v_1 \in \mathcal{V} \text{ или/и } v_2 \in \mathcal{V}).$$

Предложение. 1. Дополнение $\mathcal{V}^c := \mathfrak{W} \setminus \mathcal{V}$ замкнутой подполугруппы $\mathcal{V}$ есть замкнутый идеал.
2. Дополнение $\mathcal{V}$ любого замкнутого идеала $\mathcal{V}^c$ есть замкнутая подполугруппа.

Доказательство. 1. Включение $v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}$ для случаев, когда хотя бы один из сомножителей входит в $\mathcal{V}^c$ выполняться не может в силу замкнутости подполугруппы $\mathcal{V}$. Значит $\mathcal{V}^c$ двусторонний идеал. Включение $v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}^c$ в случае, когда оба сомножителя входят в $\mathcal{V}$, выполняться не может, поскольку $\mathcal{V}$ подполугруппа. Это означает замкнутость $\mathcal{V}^c$.
2. По определению замкнутости идеала $\mathcal{V}^c$ из включения $v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}^c$ вытекало бы, что ($v_1 \in \mathcal{V}^c$ или/и $v_2 \in \mathcal{V}^c$), откуда следует, что $\mathcal{V}$ есть подполугруппа. Если теперь допустить, что ($v_1 \in \mathcal{V}^c$ или/и $v_2 \in \mathcal{V}^c$), то по определению идеала $v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{V}^c$, откуда следует замкнутость подполугруппы $\mathcal{V}$.
□

M-Функции. Полугруппа M-модуляр.

M.1. Две неубывающие функции ψ_1 и ψ_2, определённые на $[0,\infty)$, называются *мультипликативно эквивалентными* (обозначение: $\psi_1 \overset{m}{\sim} \psi_2$), если для подходящей константы $C \geq 1$ выполняются неравенства

$$C^{-1}\psi_2(C^{-1}\cdot t) \leq \psi_1(t) \leq C\cdot\psi_2(C\cdot t),\ t\in[0,\infty). \tag{1.1}$$

M.2. Вещественную функцию, заданную на $[0,\infty)$, непрерывную, вогнутую и равную нулю (или доопределённую нулём) в нуле, а вне нуля - положительную, неубывающую и стремящуюся к бесконечности на бесконечности, мы называем функцией Марцинкевича, или M-*функцией*.

M.3. Класс всех функций на $[0,\infty)$, $\overset{m}{\sim}$эквивалентных некоторой M-функции ψ мы называем M-*модулярой* и обозначаем Ψ. Совокупность всех M-*модуляр* обозначается $\mathfrak{M}$. Всякая функция на $[0,\infty)$, содержащаяся в Ψ называется эквивогнутой.

M.4. Суперпозицией двух эквивогнутых функций ψ_1 и ψ_2 называется эквивогнутая функция $\psi_1\circ\psi_2 := \psi_1\Big(\psi_2(t)\Big),\ t\geq 0$. M-модуляра суперпозиции $\psi_1\circ\psi_2$ называется *композицией* M-модуляр Ψ_1 и Ψ_2 и обозначается $\Psi_1\circ\Psi_2$.

M.5. $\overset{m}{\sim}$*инвариантом* называется всякое свойство эквивогнутой функции, которому удовлетворяют все эквивогнутые функции её M-модуляры.

M.6. Эквивогнутая функция ψ (а также и её M-модуляра Ψ) называется *симметрической*, если $\psi \overset{m}{\sim} \widehat{\psi}$, где эквивогнутая функция

$$\widehat{\psi}(t) := \frac{1}{\psi(\frac{1}{t})},\ t>0.$$

Путём расширения по этой формуле с $[0,1]$ на $[0,\infty)$ или, наоборот, сужения с $[0,\infty)$ на $[0,1]$ множество всех симметрических функций отождествимо с множеством всех эквивогнутых функций на отрезке $[0,1]$. Для симметрической M-функции ψ число $\delta_\psi := \lim_{s\to 0}\frac{\log\sup_{t\in[0,1]}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}}{\log s}$ будем называть *верхним индексом*.
Класс всех симметрических M-модуляр обозначается $\mathfrak{M}_s$.

M.7. M-функцию ψ, а с ней и её модуляру Ψ, мы называем *регулярной* (обозначение: $\Psi \in \mathcal{P}_r$), если $\lim_{s\to 0} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} < 1$, и *корегулярной* (обозначение: $\Psi \in \mathcal{P}^r$), если $\lim_{s\to 0} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{s\psi(t)}{\psi(st)} < 1$.

M.8. M-функция ψ, а с ней и её модуляра Ψ называется *субмультипликативной* (*супермультипликативной*), если найдётся константа $c > 0$, такая что выполняются неравенства

$$\psi(s \cdot t) \le c \cdot \psi(s) \cdot \psi(t) \text{ (соответственно, } \psi(s \cdot t) \ge c \cdot \psi(s) \cdot \psi(t)), \ s, t \ge 0.$$

Лемма 1. (ср. [2]). Пусть ξ эквивогнутая симметрическая функция, субмультипликативная на $[0, 1]$. Положим $\mathfrak{S}^0_\xi(s) := \sup_{t\in[0,1], s\cdot t\in[0,1]} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)}$, $0 \le s < \infty$. Тогда для $s \in [0, 1]$ выполняется эквивалентность

$$\mathfrak{S}^0_\xi(s) \overset{m}{\sim} \xi(s).$$

M.9. M-функция на $[0, \infty)$, являющаяся одновременно суб- и супермультипликативной, как и модуляра этой функции, называется *эквимультипликативной*.

M.10. Симметрическая M-функция ψ называется *функцией регулярного изменения в нуле с показателем* α, $0 \le \alpha \le 1$ (запись: $\psi \in RV^0_\alpha$), если $\limsup_{t\to 0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} \overset{m}{\sim} s^\alpha$.

M**.11.** Эквивогнутая функция ψ, как и её M-модуляра Ψ, называется псевдостепенной, если выполняется эквивалентность по s

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} \overset{m}{\sim} \sup_{t\in(0,1]} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}.$$

Базы. Полугруппа B-модуляр

B.1. Подмножество K натурального ряда $\mathbb{N}$ будем называть *биинфинитным*, если оно, как и его дополнение $\mathbb{N} \setminus K$, суть бесконечные подмножества $\mathbb{N}$.
Любую строго возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел вида $b = (b_k)_{0\le k<\infty}$, где $b_0 = 0$, будем называть *(натуральной) базой*, если $(b_k)_{1\le k<\infty}$ биинфинитное подмножество в $\mathbb{N}$. $\mathfrak{b}$ обозначает множество всех баз. Для базы $b = (b_k)_{k\ge 0}$ подмножество

$\mathbb{N} \setminus (b_k)_{k\geq 1} := (b_{*i})_{i\geq 1}$ натурального ряда, занумерованное в строго возрастающую последовательность и дополненное начальным нулём, мы называем *двойственной с* b базой и обозначаем b_*. Очевидно, что двойственность есть инволюция в классе $\mathfrak{b}$.

B.2. По заданной базе b определим два отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: *количественную последовательность*

$$q_b(n) := (b_n - b_{n-1}) > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

и *плейс-последовательность* (в [5]- сюръективная последовательность)

$$p_b(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_b(i),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

где χ_b обозначает индикаторную функцию подмножества $b \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ясно, что

$$p_b(1) = 1,\ p_b(n) \leq p_b(n+1) \leq p_b(n) + 1,\ n \geq 1;\ \lim_{n\to\infty} p_b(n) = \infty. \tag{1.4}$$

Замечание. Каждый из трёх объектов - база, её количественная и её плейс-последовательность, - очевидным образом определён любым из них, в том смысле, что, исходя из него, формулами (1.2) - (1.4) однозначно восстанавливаются остальные два.

B.3. Базу $b^{(1)}$ будем называть *аддитивно эквивалентной* базе $b^{(2)}$ (пишем $b^1 \overset{a}{\sim} b^2$), если найдётся натуральное d, такое что $b_k^{(1)} \leq b_{k+d}^{(2)} \leq b_{k+2d}^{(1)}$, $k \geq 1$. Совокупность всех баз, $\overset{a}{\sim}$эквивалентных базе b, будем называть B-модулярой и обозначать $\mathcal{B}$. $\mathfrak{B}$ обозначает множество всех B-модуляр. $\overset{a}{\sim}$*инвариантом* называется всякое свойство базы, которому удовлетворяют все базы её B-модуляры.

B.4. Базу $b = (b_k)_{k\geq 0}$ назовём d-равномерной, если при подходящем натуралльном d справедливы неравенства $b_{k+1} - b_k \leq d,\ n \geq 1$.

Лемма 2. Для d-равномерной базы $b = (n_k)$ при любых $j, m \geq 1$ справедливо неравенство $\sum_{i=n_j+1}^{n_j+m} \chi_b(i) \leq \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+m}} \chi_b(i) \leq \sum_{i=n_j+1}^{n_j+m\cdot d} \chi_b(i)$.

Введём следующие обозначения. Для натуральных баз $b = (b_n)$, $b^{(1)} = (b_n^{(1)})$ и любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{cases} S_b(m) := \sup_{n\geq 0} \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_b(i),\ L_b(m) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_b(i); \\ \langle S_{b^{(1)}}\rangle_b(m) := \sup_{n\geq 0} \sum_{i=b_{n+1}^{(1)}}^{b_{n+m}^{(1)}} \chi_b,\ \langle L_{b^{(1)}}\rangle_b(m) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=b_{n+1}^{(1)}}^{b_{n+m}^{(1)}} \chi_b. \end{cases}$$

Лемма 3, [5]. Для любых двух баз $b = (b_n)$ и $b^{(1)} = (b^{(1)}{}_n)$ выполняются $\overset{a}{\sim}$эквивалентности по m

$$S_b(m) \overset{a}{\sim} \langle S_{b^{(1)}} \rangle_b(m);\ L_b(m) \overset{a}{\sim} \langle L_{b^{(1)}} \rangle_b(m),\ m \geq 1.$$

B.5. Базу $b = (b_n)$ назовём *псевдостепенной*, если $S_b \overset{a}{\sim} L_b$. Эта эквивалентность равносильна тому, что b является *уплотняющейся* базой, т.е. существует натуральное d, для которого при любых натуральных m, n найдётся число n', $n' = n'(m) > n$, такое что

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_b(i) \leq \sum_{i=n'+1}^{n'+m+d} \chi_b(i). \tag{1.5}$$

Лемма 4. База $b = (b_n)$ является уплотняющейся, тогда и только тогда, когда найдётся натуральное d, обладающее тем свойством, что для любой пары (m, n) натуральных чисел существует число $n' = n'(m, n) > n$, такое что для всякого $k \geq n'$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_b(i) \leq \sum_{i=k+1}^{k+m+d} \chi_b(i),\ \text{где}\ |\sum_{i=k+1}^{k+m+d} \chi_b(i) - m \cdot \delta_b| \leq d. \tag{1.6}$$

Лемма 5. База $b_\varphi = (v_\mu)$ **не является** уплотняющейся, тогда и только тогда, когда для любого $C > 1$ найдутся монотонно возрастающие к $+\infty$ последовательности натуральных чисел $\{n_j\}, \{m_j\}, \{d_j\}$, такие что для любых $j \geq 1$ и $n' > n_j$

$$\sum_{i=n_j+1}^{n_j+m_j} \chi_{(v_\mu)}(i) > \sum_{i=n'+1}^{n'+m_j+d_j} \chi_{(v_\mu)}(i). \tag{$\neg$ 1.5}$$

B.6. *Суперпозицией* $b_1 \circ b_2$ баз b_1 и b_2 назовём базу, определяемую плейс-последовательностью $p_{b_1}(p_{b_2}(j)) := p_{b_1} \circ p_{b_2}$, $j \geq 1$. $\mathcal{B}_1 \circ \mathcal{B}_2$ обозначает B-модуляру суперпозиции $b_1 \circ b_2$ и называется композицией B-модуляр $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Лемма 6, [6]. Суперпозиция баз $b_1 = (u_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$ и $b_2 = (v_\mu)_{j=0,1,\ldots}$ вычисляется как база $b_1 \circ b_2 = (u_{v_\mu}))_{\mu=0,1,\ldots}$. Поэтому для любых натуральных μ и c справедливо неравенство

$$\sum_{i=v_\mu}^{v_\mu+c} \chi_{b_\varphi}(i) \geq \sum_{i=u_{v_\mu}}^{u_{v_\mu}+c} \chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(i) \tag{1.7}$$

B.7. Число $\delta_b := \lim_{m\to\infty} \sup\limits_{0\le n<\infty} \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}$ называется *верхним индексом* базы $b = (b_k)_{k\ge 0}$. Ясно, что это число является $\overset{a}{\sim}$инвариантом.

О соответствии между M-функциями и базами.

Как показано в §4 работы [4] (см. также [10]), путём логарифмирования значений функций в двоичных точках между M-функциями на $[0,1]$ и базами можно установить взаимно-однозначное соответствие $\psi_b \leftrightarrow b_\psi$, которое в свою очередь порождает взаимно-однозначное соответствие $\mathfrak{M}_s \leftrightarrow \mathfrak{B}$ между M-модулярами симметрических M-функций и B-модулярами. Это соответствие инволютивно, поскольку $\psi_b \to b_\psi$, влечёт $\psi_{b_\psi} \to \psi$; $b_{\psi_b} = b$. Отметим ещё, что композиции M-модуляр $\Psi \circ \Phi$ соответствует композиция B-модуляр $\mathcal{B}_\psi \circ \mathcal{B}_\varphi$. Подчеркнём, что указанное соответствие распространяется на все $\overset{m}{\sim}$ и $\overset{a}{\sim}$инварианты, в частности $\delta_\psi = \delta_{b_\psi}$, [4].

Лемма 7. 1. [1]. Симметрическая функция ξ является регулярной, тогда и только тогда, когда количественная последовательность её базы ограничена.

2. [5]. Следующие условия равносильны.
I). Эквивогнутая функция φ на $[0,1]$ является псевдостепенной;
II). База b_φ является псевдостепенной;
III). База b_φ является уплотняющейся.

2. Результаты.

Прежде всего проверим корректность определения бинарной операции $\circ$ на множестве $\mathfrak{B}$ всех B-модуляр (и тем самым на множестве $\mathfrak{M}_s$ всех симметрических M-модуляр).
Допустим, что $b_1 = (m_k^1) \overset{a}{\sim} b_2 = (m_k^2)$; $c_1 = (n_k^1) \overset{a}{\sim} c_2 = (n_k^2)$. Иными словами найдётся натуральное d, такое что выполняются неравенства $m_k^1 \le m_{k+d}^2 \le m_{k+2d}^1$; $n_k^1 \le n_{k+d}^2 \le n_{k+2d}^1$. Тогда имеем $m_{n_k^1}^1 \le m_{n_{k+d}^2}^1 \le m_{n_{k+d}^2+d}^2 \le m_{n_{k+2d}^2}^2$, ибо $n_{k+d}^2 + d \le n_{k+2d}^2$. В точности также доказывается обратное.

Всюду в дальнейшем за базами двух эквивогнутых функций φ и ψ закреплены обозначения $b_\varphi = (v_\mu)$ и $b_\psi = (u_\nu)$, соответственно. Тем самым $b_{\psi\circ\varphi} = (u_{v_\mu})$, [6].

Теорема 1. Верхний индекс суперпозиции двух эквивогнутых на $[0,1]$ функций не превосходят произведения верхних индексов сомножителей.

Доказательство. Достаточно доказать, что для базы суперпозиции $b_{\psi\circ\varphi} := (u_\nu)\circ(v_\mu) = (u_{v_\mu})$ выполняется неравенство

$$\delta_{b_{\varphi\circ\psi}} \le \delta_{b_\varphi}\cdot\delta_{b_\psi}, \tag{2.1}$$

Зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$ и найдём для каждой из трёх баз своё натуральное число $M^\varepsilon_\varphi,\ M^\varepsilon_\psi,\ \ M^\varepsilon_{\psi\circ\varepsilon}$, такое что при любом $m \ge M^\varepsilon_\varphi$, соответственно, $m \ge M^\varepsilon_\psi,\ m \ge M^\varepsilon_{\psi\circ\varepsilon}$ справедливы неравенства

$$\left\{\begin{array}{r} m\cdot(\delta_{b_\varphi}-\varepsilon) \le \sup_{n\ge0}\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b_\varphi}(j) \le m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon); \\ m\cdot(\delta_{b_\psi}-\varepsilon) \le \sup_{n\ge0}\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b_\psi}(j) \le m\cdot(\delta_{b_\psi}+\varepsilon). \\ m\cdot(\delta_{b_{\psi\circ\varphi}}-\varepsilon) \le \sup_{n\ge0}\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(j) \le m\cdot(\delta_{b_{\psi\circ\varphi}}+\varepsilon). \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Обозначим $M^\varepsilon := \max\left(M^\varepsilon_\varphi,\ M^\varepsilon_\psi,\ M^\varepsilon_{\psi\circ\varepsilon}\right)$ и будем считать $m > \max\left(M^\varepsilon,\ \frac{M^\varepsilon}{\delta_{b_\varphi}+\varepsilon}\right)$. Для некоторых из таких m супремум по n в средних частях (3_δ) достигается на подходящем числе (не обязательно большем M^ε), для остальных - как верхний предел по n. В обоих случаях найдутся такие натуральные числа $n^\varepsilon_\varphi(m)$ и, соответственно, $n^\varepsilon_\psi(m)$ и $n^\varepsilon_{\psi\circ\varphi}(m)$, для которых выполняются неравенства

$$\left\{\begin{array}{r} m\cdot(\delta_{b_\varphi}-\varepsilon) \le \sum_{j=n^\varepsilon_\varphi+1}^{n^\varepsilon_\varphi(m)+m}\chi_{b_\varphi}(j) \le m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon); \\ m\cdot(\delta_{b_\psi}-\varepsilon) \le \sum_{j=n^\varepsilon_\psi+1}^{n^\varepsilon_\psi(m)+m}\chi_{b_\psi}(j) \le m\cdot(\delta_{b_\psi}+\varepsilon). \\ m\cdot(\delta_{b_{\psi\circ\varphi}}-\varepsilon) \le \sum_{j=n^\varepsilon_{\psi\circ\varphi}+1}^{n^\varepsilon_{\psi\circ\varphi}(m)+m}\chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(j) \le m\cdot(\delta_{b_{\psi\circ\varphi}}+\varepsilon), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Будем, как обычно, обозначать через $[r]$ целую часть вещественного числа r. Зафиксируем $m > \max\left(M^\varepsilon,\ \frac{M^\varepsilon}{\delta_{b_\varphi}+\varepsilon}\right)$, и возьмём любое целое n. Поскольку $m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon) > M^\varepsilon$, то неравенства (2.3) вместе с леммой 6 влекут

$$\sum_{j=n+1}^{n+[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]}\chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(j) \le \sum_{j=n+1}^{n+[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]}\chi_{b_\psi}(j) \le \sum_{j=n^\varepsilon_\psi(m)+1}^{n^\varepsilon_\psi(m)+[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]}\chi_{b_\psi}(j)$$

$$\le [m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]\cdot(\delta_{b_\psi}+\varepsilon) = (m+1)\cdot[\delta_{b_\psi}\cdot\delta_{b_\varphi} + (\delta_{b_\psi}+\delta_{b_\varphi})\cdot\varepsilon + \varepsilon^2].$$

Перейдём в левой части на основании третьей из формул (2.2) $\Big($в которой роль m играет $[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]\Big)$ к супремуму по n. Поскольку $[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]>M^\varepsilon$, то для всех $m>\max\Big(M^\varepsilon,\ \frac{M^\varepsilon}{\delta_{b_\varphi}+\varepsilon}\Big)$ получим

$$\sup_{n\geq 0}\sum_{j=n+1}^{n+[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]}\chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(j)\leq(m+1)\cdot[\delta_{b_\psi}\cdot\delta_{b_\varphi}+(\delta_{b_\psi}+\delta_{b_\varphi})\cdot\varepsilon+\varepsilon^2],$$

откуда

$$\delta_{b_{\psi\circ\varphi}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sup_{n\geq 0}\sum_{j=n+1}^{n+[m\cdot(\delta_{b_\varphi}+\varepsilon)]}\chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(j)}{m}\leq\delta_{b_\psi}\cdot\delta_{b_\varphi}+(\delta_{b_\psi}+\delta_{b_\varphi})\cdot\varepsilon+\varepsilon^2$$

Ввиду произвольной малости ε имеет место доказываемое неравенство. $\square$

Теорем 2, [7]. 1°. Каждый из $\overset{m}{\sim}$инвариантов $(\mathcal{HLP})_M$ и mRV_1^0 образует замкнутую подполугруппу;

2°. $\overset{m}{\sim}$инвариант $(\mathcal{HLP})_\Lambda$, образует идеал, а $\overset{m}{\sim}$инвариант mRV_0^0 - замкнутый идеал.

Теорема 3. Каждый из $\overset{m}{\sim}$инвариантов суб- и супермультипликативности образует подполугруппу.

Доказательство элментарно вытекает из монотонности M-функций.

Теорема 4. Множество $\bigcup_{0<\omega<1}RV_\omega^0$ образует подполугруппу. Более того, $(\psi\in RV_\alpha^0,\ \varphi\in RV_\beta^0,\ 0<\alpha,\beta<1)\Rightarrow\psi\circ\varphi\in RV_{\alpha\cdot\beta}^0$.

Доказательство. Пусть M-функция $\psi\in mRV_\alpha^0$, а M-функция $\varphi\in mRV_\alpha^0$; докажем, что $\psi\circ\varphi\in mRV_{\alpha\cdot\beta}^0$.
Поскольку речь идёт о модулярах, применима теорема 5, [9], согласно которой, не умаляя общности, можно считать, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(ts)}{\psi(t)}=s^\alpha,\ s\geq 0 \qquad (2.4),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(ts)}{\varphi(t)}=s^\beta,\ s\geq 0. \qquad (2.5)$$

Зафиксируем $s > 0$. Функция ψ на промежутке $[0,1]$ непрерывна, следовательно и равномерно непрерывна. Из (2.4) следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что $|t' - t''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\psi(t') - \psi(t'')| < \varepsilon$ для всех $t', t'' \in [0,1]$. В силу же непрерывности $\varphi(t)$ в нуле и в силу (2.5) найдётся такое t_{δ_ε} : $0 < t_{\delta_\varepsilon} < 1$, что при всех $0 < t < t_{\delta_\varepsilon}$ выполняются два неравенства: $0 < \varphi(t) < (\delta_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ и $|\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} - s^\beta| < (\delta_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, так что для всех этих t имеем: $|\varphi(st) - s^\beta\varphi(t)| < \delta_\varepsilon$, откуда по предыдущему $|\psi(\varphi(st)) - \psi(\varphi(t)s^\beta))| < \varepsilon$.
Но в силу (2.4) для всех $0 < t < t_{\delta_\varepsilon} < t_\delta$ и для всех $s > 0$, в том числе при $\varphi(t) < t_{\delta_\varepsilon}$ и для s^β из соотношения $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(\varphi(t)s^\beta)}{\psi(\varphi(t))} = (s^\beta)^\alpha = s^{\alpha\beta}$ вытекает , что

$$|\psi(\varphi(st))-\psi(\varphi(t))s^{\alpha\beta}|<|\psi(\varphi(st))-\psi(\varphi(t)s^\beta)|+\varepsilon<|\psi(\varphi(st))-\psi(\varphi(t))s^{\alpha\beta}|+2\varepsilon.$$

□

Теорема 5. Множество всех симметрических псевдостепенных M-модуляр образует правозамкнутую коммутативную подполугруппу в полугруппе $(\mathfrak{M}_s, \circ)$, причём для псевдостепенных эквивогнутых функций ψ и φ выполняеся равенство $\delta_{\psi\circ\varphi} = \delta_\psi \cdot \delta_\varphi$.

Доказательство. 1. Докажем, что если ψ и φ псевдостепенные функции, то такова же и их суперпозиция $\psi \circ \varphi$.

Поскольку обе M-функции ψ и φ являются псевдостепенными на $[0,1]$, то каждая из них там субмультипликативна, [5]. Следовательно, [1], можно с точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности считать их такими функциями регулярного изменения: $\psi \in RV_{\delta_\psi}(0,1)$, $\varphi \in RV_{\delta_\varphi}(0,1)$, что для обеих имеют место равенста (2.4) и (2.5), в которых $\alpha = \delta_\psi$, $\beta = \delta_\varphi$, откуда по теореме 4 $\lim_{t\to 0} \dfrac{\psi\Big(\varphi(s\cdot t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} = \limsup_{t\to 0} \dfrac{\varphi\Big(\psi(s\cdot t)\Big)}{\varphi\Big(\psi(t)\Big)} = s^{\delta_\varphi\cdot\delta_\psi}$. С другой стороны, поскольку для субмультипликативных на $[0,1]$ функций, а именно: $\limsup_{t\to 0} \dfrac{\psi\Big(\varphi(s\cdot t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} = s^{\delta_\varphi\cdot\delta_\psi}$ и $\sup_{t\in[0,1]} \dfrac{\psi\Big(\varphi(s\cdot t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} = s^{\delta_{\varphi\circ\psi}}$ первая не превосходит вторую, то справедливо неравенство, $\delta_\varphi \cdot \delta_\psi \le \delta_{\varphi\circ\psi}$. Обратное неравенство доказано в теореме 1. Остаётся воспользоваться теоремой 5, [5].

2. Докажем, что если $\psi \circ \varphi$ псевдостепенная, то будет псевдостепенной и φ. Уже упоминалось, что псевдостепенная функция на $[0,1]$

субмультипликативна, [5], и, следовательно, регулярна, [2]. Поэтому, если $\psi \circ \varphi$ псевдостепенная, то по Теореме 3, [7], обе функции ψ и φ регулярны; не умаляя общности, можно считать обе базы b_ψ и b_φ d-равномерными.

Допустим, что b_φ не уплотняющаяся база. В лемме 5, примененной к b_φ, выберем возрастающие к бесконечности натуральные последовательности $\{n_j\}$, $\{m_j\}$, $\{d_j\}$. Для $n' > n_j$ получим:

$$\sum_{\nu=u_{v_{n_j+1}}}^{u_{v_{n_j+m_j}}} \chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(\nu) \overset{B.6}{=} \sum_{\mu=v_{n_j+1}}^{v_{n_j+m_j}} \chi_{b_\varphi}(\mu) \overset{\text{л.2}}{\geq} \sum_{\mu=v_{n_j+1}}^{v_{n_j+m_j}} \chi_{b_\varphi}(\mu) \overset{\text{л.5}}{>} \sum_{\mu=v_{n'}+1}^{v_{n'}+m_j+d_j} \chi_{b_\varphi}(\mu) \overset{\text{л.6}}{\geq}$$

$$\sum_{\nu=u_{v_{n'}+1}}^{u_{v_{n'}+m_j+d_j}} \chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(\nu) \overset{\text{л.2}}{\geq} \sum_{\nu=u_{v_{n'}+1}}^{u_{v_{n'}+m_j+\frac{d_j}{2}}} \chi_{b_{\psi\circ\varphi}}(\nu) \overset{B.6}{=} \sum_{\mu=v_{n'}+1}^{v_{n'}+m_j+\frac{d_j}{2}} \chi_{b_\varphi}(\mu),\ j \geq 1.$$

Таким образом для последовательности $m_j \uparrow \infty$ супремум на натуральных сегментах длины m_j количества точек базы $b_{\psi\circ\varphi}$ не менее, чем на число $\frac{d_j}{2}$ превосходит верхний предел этого количества на сегментах той же длины. Но $d_j \uparrow \infty$, и тем самым для базы $b_{\psi\circ\varphi}$ супремум и верхний предел не могут быть $\overset{a}{\sim}$ эквивалентны по m, а это по определению противоречит тому, что $b_{\psi\circ\varphi}$ является псевдостепенной базой.

3. Покажем, наконец, что на подполугруппе псевдостепенных M-модуляр на $[0,1]$ композиция коммутативна.

Обозначим: $b_{\varphi\circ\psi} = (e_\iota) = (v_{u_\nu})$, $b_{\psi\circ\varphi} = (f_\iota) = (u_{v_\mu})$; как доказано выше, обе базы псевдостепенные. Зафиксируем натуральное n, и пользуясь леммой 4, для базы $b_{\varphi\circ\psi}$ найдём $n' = n'(n,m)$, удовлетворяющее (1.6), т.е. такое, что для всякого $k \geq n'$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{(v_{u_\nu})}(i) \leq \sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(v_{u_\nu})}(i), \text{ где } \Big|\sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(v_{u_\nu})}(i) - m\cdot\delta_{b_\varphi}\cdot\delta_{b_\psi}\Big| \leq d. \quad (2.6)$$

Аналогично, пользуясь (1.6), для базы $b_{\psi\circ\varphi}$ выберем $n'' > n'$, удовлетворяющее т.е. такое, что для всякого $k \geq n''$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{(u_{v_\mu})}(i) \leq \sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(u_{v_\mu})}(i), \text{ где } \Big|\sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(u_{v_\mu})}(i) - m\cdot\delta_{b_\psi}\cdot\delta_{b_\varphi}\Big| \leq d. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) и неравенства треугольника заключаем, что для лю-

бого $m \geq 1$ при $k \geq n'' = n''(n,m) \geq n'$ справедливо

$$|\sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(v_{u_\nu})}(i) - \sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_{(u_{v_\mu})}(i)| \leq 2 \cdot d. \tag{2.8}$$

Таким образом для баз регулярных эквивогнутых функций $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ на натуральном ряде справедлива эквивалентность

$$L_{b_{\psi\circ\varphi}}(m) \overset{a}{\sim} L_{b_{\varphi\circ\psi}}(m). \tag{2.9}$$

Если теперь обозначить через $\underline{\psi \circ \varphi}$ и $\underline{\varphi \circ \psi}$ симметрические расширения на всю полуось функций $\psi\circ\varphi$ и $\varphi\circ\psi$, соответственно, то в обозначениях Леммы 4.5, [4], и с учётом первого из её соотношений можно записать эквивалентность

$$\mathfrak{L}^{\infty}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(s), \tag{2.10}$$

откуда вытекает эквивалентность на $[0,1]$

$$\mathfrak{L}^{\infty}_{\psi\circ\varphi}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{\varphi\circ\psi}(s). \tag{2.11}$$

Далее, поскольку обе функции $\psi\circ\varphi$ и $\varphi\circ\psi$ являются псевдостепенными, по теоремам 5.7 - 5.9, [4], псевдостепенными являются и обе функции $\underline{\psi \circ \varphi}$ и $\underline{\varphi \circ \psi}$. Воспользуемся теоремой 10, [5], из которой следует, что функции $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ субмультипликативны на $[0,1]$. Тогда по лемме 2 на $[0,1]$ выполняются $\overset{m}{\sim}$эквивалентности $\psi \circ \varphi \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{0}_{\psi\circ\varphi}$, $\varphi \circ \psi \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{0}_{\varphi\circ\psi}$ Применяя лемму 4.6, [4], получим, что на $[0,1]$

$$\psi \circ \varphi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{0}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(s)$$

и

$$\varphi \circ \psi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{0}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(s), \tag{2.12}$$

соответственно. Каждая из функций $\underline{\psi \circ \varphi}$ и $\underline{\varphi \circ \psi}$, будучи псевдостепенной, удовлетворяет условию 4) теоремы 5.9, [4]:

$$\mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(s);\ \mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(s),\ s \in [0,\infty). \tag{2.13}$$

Окончательно из (2.9) - (2.13) выводим цепочку эквивалентностей:

$$\psi \circ \varphi(t) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\psi\circ\varphi}}(t) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{b_{\underline{\psi\circ\varphi}}}(t) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(t) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^{\infty}_{\underline{\varphi\circ\psi}}(t) \overset{m}{\sim} \varphi \circ \psi(t),\ t \in [0,1].$$

□

Следующая теорема очевидна.

Теорема 6. В полугруппе $(\mathfrak{M}_s, \circ)$ множество всех *степенных* M-модуляр, т. е. M-модуляр, порождённых M-функциями t^α, $t \in [0,1]$, $0 < \alpha < 1$, образует коммутативную подполугруппу.

Замечание. Ни подполугруппа псевдостепенных, ни подполугруппа степенных эквивогнутых функций замкнутыми не будут. В качестве примера приведём симметрические функции ψ и φ, задавая их на бесконечности: $\psi(t) = (t \log_2 t)^{\frac{1}{2}}$, $\varphi(t) = \frac{t}{\log_2 t}$, $t > 2$. Как отмечено в [4], ψ не является псевдостепенной (ни тем более степенной) эквивогнутой функцией, хотя $\psi \circ \varphi$ на бесконечности есть степенная, т.е. $\overset{m}{\sim}$эквивалентная $t^{\frac{1}{2}}$ функция.

О двойственной базе для суперпозиции двух баз.

Пусть даны две базы, $b = (b_n)$ и $c = (c_n)$, и их суперпозиция $b \circ c = (b_{c_n})$; нужно построить базу $(b \circ c)_*$, двойственную к этой суперпозиции.

Очевидно, что справедливо теоретико-множественное равенство

$$(b \circ c)_* = b_* \cup b \circ c_*, \tag{2.16}$$

где b_* и $b \circ c_*$ дизъюнктные подмножества натурального ряда.

Формула (2.16) описывает $(b_\psi \circ b_\varphi)_*$ как подмножество натурального ряда, но не как его подпоследовательность. Для того, чтобы придать формуле (2.16) "базовый"смысл, построим базу $d := b \vee c$ - точную верхнюю грань баз $b = (b_n)$ и $c = (c_n)$, дизъюнктных друг другу как подмножества натурального ряда.

Считая, что $d_0 := b_0 = c_0 = 0$, предположим, что элемент d_{n-1} уже построен, $n \geq 1$. Положим $d_n := \min\{u \in b \cup c \mid u > d_{n-1}\}$. По индукции база $d := b \vee c$ построена, причём очевидно равенство баз

$$(b \circ c)_* = b_* \vee b \circ c_*, \tag{2.17}$$

где базы b и $b \circ b_*$ не имеют общих элементов (кроме 0).

Последнее означает, что

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{(b \circ c)_*}(i) = \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{b_*}(i) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{b \circ c_*}(i), \ n, m > 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, для любого $m \geq 0$ выполняются неравенства

$$S_{(b\circ c)_*}(m) := \sup_{n\geq 0} \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{(b\circ c)_*}(i) \leq \sup_{n\geq 0} \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{b_*}(i) + \sup_{n\geq 0} \sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_{b\circ c_*}(i), \tag{2.19}$$

откуда по теореме 1

$$\delta_{(b\circ c)_*} \leq \delta_{b_*} + \delta_{b\circ c_*} \leq \delta_{b_*} + \delta_b \cdot \delta_{c_*}. \tag{2.20}$$

Отметим, что неравенства (2.20) справедливы также и для верхних индексов M-функции, двойственной к суперпозиции двух M-функций.

Литература

1. **Меклер А. А.** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр // *Вестник Сыктывкарского университета, I, 8(2008) с. 27 - 38. Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

2. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Маршинкевича и Орлича, I // *Вестник Сыктывкарского университета, 1, 14(2011) с. 33-48, Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

3. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича, II // *Вестник Сыктывкарского университета, 1, 14(2011) с. 49-66, Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

4. **Меклер А. А.** О модулярах пространства Маршинкевича на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$ // *Вестник Сыктывкарского университета, 1, 15(2012) с. 95-112, Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

5. **Меклер А. А.** О модулярах пространства Маршинкевича на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$, II // *Вестник Сыктывкарского университета, 1, 16(2012) с. 101- 111, Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

6. **Меклер А. А.** Представление суперпозиции вогнутых модуляр на двоичной логарифмической шкале // *Герценовские Чтения-2007, 16-21 апреля 2007, LX с. 121 - 128, СПГУ им. Герцена, СПб, 2007. (in Russian)*

7. **Меклер А. А.** О полугруппе модулярных функций с операцией инволюции. Исследования по линейным операторам и теории функций. *32. Записки научных семинаров ПОМИ, т. 315, 2004, 121 - 131. (in Russian)*

8. **Меклер А. А.** Мультипликативность модуляр Марцинкевича. Базовые таблицы // *Вестник Сыктывкарского университета, 1, 17(2013), с. 67-80, Сыктывкар: Изд-во СГУ.*

9. **Abakumov E. V., Mekler A. A.** Concave Regularly Varying Leader for Equiconcave Functions, *J. Math. Anal. Appl., 187(1994)3, pp. 943-951.*

10. **Одинец В. П., Шлензак В. А.** Основы выпуклого анализа. /Авторизованный перевод с польск. В.П.Одинца при участии М.Я.Якубсона/ Под ред. В.Н.Исакова. - М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, РХД, 2011, - 520 с.

Summary

Mekler A. A. On semigroup of Marcinkiewicz Modulars

The presented paper contains a study of semigroup of M-modulars with their composition as algebraic operation. It is stated that several classes of M-modulars corresponding to some important topological invariants of Marcinkiewicz space $\mathsf{M}(0,1)$ form sub-semigroups and ideals of this semigroup which sometimes may be closed e.g. for classes of power and pseudopower M-modulars.

Keywords: composition of M-modulars, superposition of bases, sub-semigroups, ideals.

MSC-1991: 46E30

Бременский Университет *Поступила 27.06.2013*