Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 513.88

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ МОДУЛЯР МАРЦИНКЕВИЧА. БАЗОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

А. А. Меклер

Устанавлены топологические инварианты суб-, супер- и эквимультипликативности пространств Марцинкевича, заданных как на $[0,1]$, так и на $[0,\infty)$. Дано единообразное описание этих и ранее изученных инвариантов, выраженное в форме предельных соотношений базовых таблиц.
Ключевые слова: пространства Марцинкевича и их базы, суб-, супер-, экви- мультипликативность и аддитивность, базовые таблицы.

В продолжение статьи [5], где были рассмотрены *односторонние* (слева и справа) *суб- и супермультипликативные* модуляры Марцинкевича на $[0,\infty)$, в §1 настоящей работы устанавливается, Теорема 6, связь этих понятий с *двусторонней* суб- и супермультипликативностью модуляр. В §2 получены критерии эквимультипликативности модуляр, т.е. их одновременной суб- и супермультипликативности. Согласно теореме 11, на $[0,1]$ это бывает, тогда и только тогда, когда модуляра эквивалентна некоторой степенной вогнутой функции; в случае же полуоси $[0,\infty)$ по Теореме 12 эквимультипликативные модуляры представимы двумя степенными функциями, вообще говоря, с различными показателями степеней, - одной на $[0,1]$, другой на $[1,\infty)$.

В опубликованных в Вестнике СГУ, 1, работах автора [1] - [5] топологические инварианты пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ интерпретировались как инварианты *натуральной базы* этого пространства, выраженные в форме предельных свойств соответствующей *базовой таблицы.* §3 представляет собой обзор в этих терминах всех инвариантов, рассмотренных в настоящей работе и в работах [1] - [5].

Настоящую статью можно читать независимо от работ [1] - [5], результаты которых мы не приводим полностью, ограничиваясь краткими пояснениями и ссылками. Терминология та же (иногда - с небольшими изменениями), что и в этих работах, см. также [10]. Для удобства чтения определения некоторых основных понятий сформулированы ниже.

§1. Суб-супераддитивность и суб-супермультипликативность

Как обычно $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел, причём $\mathbb{Z}_- := \{z \in \mathbb{Z} | \ z \leq 0\}$; $\mathbb{Z}_+ := \{z \in \mathbb{Z} | \ z \geq 0\}$.

Напомним определения натуральной базы и связанных с ней объектов.

Определение 1, см. [3], Определения 1) и 2). 1. Подмножество $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ называется *биинфинитным*, если как оно само, так и его дополнение $\mathbb{N} \setminus \mathbb{K}$ суть бесконечные подмножества в $\mathbb{N}$.
2. *Натуральной базой* называется любая строго возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел вида $b = \{b_k\}_{0 \leq k < \infty}$, где $b_0 = 0$, а $\{b_k\}_{k \geq 1}$ образует биинфинитное подмножество в $\mathbb{N}$. Его дополнение $\mathbb{N} \setminus \{b_k\}_{k \geq 1}$, дополненное нулём и занумерованное в строго возрастающую последовательность, обозначается $b_* := \{b_{*k}\}_{0 \leq k < \infty}$, $b_{*0} := 0$, и называется базой b_* *двойственной с* b. Двойственность есть инволюция в классе всех натуральных баз.
3. По натуральной базе b определяется её *количественная последовательность*

$$q_b(n) := b_n - b_{n-1}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

а также *плейс-последовательность натуральной базы* [1]

$$p_b(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \chi_b(i), \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

для которых при любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеют место тождества

$$\begin{cases} p_b(1) = 1, \ p_b(n) \leq p_b(n+1) \leq p_b(n) + 1, \ p_b(b_n) = p_b\Big(\sum_{i=1}^{n} q_b(i) \Big) = n; \\ b_{n+m} - b_n - m = \sum_{i=b_n+1}^{b_{n+m}} \chi_{\mathbb{N}}(i) - \sum_{i=b_n+1}^{b_{n+m}} \chi_b(i) = \sum_{i=b_n+1}^{b_{n+m}} \chi_{b_*}(i). \end{cases} \tag{1.3}$$

Каждый из трёх объектов - натуральная база, её количественная и её плейс-последовательность, - очевидным образом определён любым из них, в том смысле, что, исходя из него, формулами (1.1) - (1.3) однозначно восстанавливаются остальные два.

[1] в [3] - *сюръективная последовательность*

Натуральная база, количественная последовательность которой ограничена, называется *равномерной*. Равномерность базы b равносильна положительности нижнего индекса γ_b, [3]. Натуральная база $b^{(1)}$ называется $\overset{a}{\sim}$*эквивалентной* базе $b^{(2)}$ (обозначение: $b^1 \overset{a}{\sim} b^2$), если найдётся натуральное d, такое что $b_k^{(1)} \le b_{k+d}^{(2)} \le b_{k+2d}^{(1)}$, $k \ge 1$. Если любая из двух баз равномерна, то эти неравенства равносильны существованию такого натурального d, что $b_k^{(1)} \le b_k^{(2)} + d \le b_k^{(1)} + 2d$, $k \ge 1$. Плейс- и количественные последовательности $\overset{a}{\sim}$эквивалентных баз тоже называются $\overset{a}{\sim}$*эквивалентными* (обозначение аналогичное).

Определение *суб- (супер)аддитивной* базы см. [3], Определение 6. Поскольку всякая субаддитивная база равномерна, [3], а свойства суб- и супераддитивности двойственны, суб- (супер)аддитивность базы $b = (b_n)$ означает существование натурального d, такого что выполняются неравенства

$$b_{n+m} \le b_n + b_m + d \ \Big(\text{соответственно, } b_{n+m} + d \ge b_n + b_m\Big), \ n, m \ge 0, \quad (1.4)$$

Аналогичными неравенствами, определяется и *суб-(супер)аддитивность* плейс-последовательности $\{p_b(n)\}_{n\ge1}$ базы b.

Лемма 1. Натуральная база b субаддитивна (супераддитивна), тогда и только тогда, когда её плейс-последовательность p_b супераддитивна (соответственно, субаддитивна).

Доказательство. Если p_b супераддитивна, то выполняется первое неравенство в (1.4). Действительно, иначе нашлись бы натуральные последовательности $n_k \uparrow \infty$ и/или $m_k \uparrow \infty$, такие что

$$\sum_{i=1}^{m_k+k} q_b(i) + \sum_{i=1}^{n_k+k} q_b(i) \le \sum_{i=1}^{n_k+m_k} q_b(i), \ k = 1, 2, \ldots \quad (1.5)$$

Согласно(1.3), справедливы равенства $n_k + k = p_b\Big(\sum_{i=1}^{n_k+k} q_b(i)\Big)$, $m_k + k = p_b\Big(\sum_{i=1}^{m_k+k} q_b(i)\Big)$; $n_k + m_k = p_b\Big(\sum_{i=1}^{n_k+m_k} q_b(i)\Big)$, $k = 1, 2, \ldots$. Используя (1.3), (1.5), монотонность плейс-последовательности p_b и её супераддитивность, получаем противоречие:

$$n_k + m_k = p_b\Big(\sum_{i=1}^{n_k+m_k} q_b(i)\Big) \ge p_b\Big(\sum_{i=1}^{m_k+k} q_b(i) + \sum_{i=1}^{n_k+k} q_b(i)\Big) \ge n_k + m_k + 2k + d.$$

Докажем супераддитивность p_b, предполагая, что выполняется первое из неравенств (1.4). Возьмём любые натуральные j и k и предположим, что $b_m \le j < b_{m+1}$; $b_n \le k < b_{n+1}$, откуда $b_m + b_n \le j + k <$

$b_{m+1}+b_{n+1}$, где в силу равномерности $b_{m+1}+b_{n+1}-(b_m+b_n)\le 2d$. Тогда $p_b(j)=m,\ p_b(k)=n$ и по монотонности p_b в силу (1.4) получаем: $p_b(j+k)+d\ge p_b(b_m+b_n)+d\ge p_b(b_{m+n})=m+n=p_b(j)+p_b(k),\ j,k\ge 1$.

Аналогичными рассуждениями доказывается равносильность супераддитивности b и субаддитивности p_b.

□

Введём следующие обозначения. Для натуральных баз $b=(b_n),\ b^{(1)}=(b_n^{(1)})$ и любого $m\in\mathbb{N}$ положим

$$\begin{cases} S_b(m):=\sup_{n\ge 0}\sum_{i=n+1}^{n+m}\chi_b(i),\ L_b(m)=\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{n+m}\chi_b(i);\\ \mathbb{S}_b(m):=\sup_{n\ge 0}(b_{n+m}-b_n),\ \mathbb{L}_b(m)=\limsup_{n\to\infty}(b_{n+m}-b_n);\\ \langle S_{b^{(1)}}\rangle_b(m):=\sup_{n\ge 0}\sum_{i=b^{(1)}_{n+1}}^{b^{(1)}_{n+m}}\chi_b(i),\ \langle L_{b^{(1)}}\rangle_b(m)=\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=b^{(1)}_{n+1}}^{b^{(1)}_{n+m}}\chi_b(i). \end{cases} \tag{1.6}$$

Из формулы (1.3) вытекает

Следствие 2. Для любого $m\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\mathbb{S}_b(m)=m+\langle S_{b_*}\rangle_b(m),\ \mathbb{L}_b(m)=m+\langle L_{b_*}\rangle_b(m). \tag{1.7}$$

Поскольку всякая натуральная база представляет собой мажорирующее (в смысле естественного упорядочения) подмножество в $\mathbb{N}$, имеет место

Лемма 3. Для любых двух баз $b=(b_n)$ и $b^{(1)}=(b^{(1)}{}_n)$ выполняется $\overset{a}{\sim}$эквивалентность по m

$$S_b(m)\overset{a}{\sim}\langle S_{b^{(1)}}\rangle_b(m). \tag{1.8}$$

Доказательство. Из определения видно, что $\langle S_{b^{(1)}}\rangle_b(m)\le S_b(m),\ m\ge 1$. Зафиксируем любое $m\ge 1$ и для любого $i\ge 1$ обозначим через $i^{(<)}$ ближайший к i элемент базы $b^{(1)}$, меньший i, а через $i^{(>)}$ ближайший к i элемент $b^{(1)}$, больший i. Тогда при любых $i,m\ge 1$ справедливо $\sum_{j=i+1}^{i+m}\chi_b(j)\le\sum_{j=i^{(<)}}^{(i+m)^{(>)}}\chi_b(j)$. Если теперь обозначить $i^{(<)}:=b^{(1)}{}_\nu<(i+m)^{(>)}:=b^{(1)}{}_{\nu+\mu}$, то очевидно неравенство $0\le\mu\le m+1$. Отсюда вытекает, что $\sum_{j=i+1}^{i+m}\chi_b(i)\le\sum_{j=b^{(1)}{}_\nu}^{b^{(1)}{}_{\nu+\mu}}\chi_b(j)\le\sum_{j=b^{(1)}{}_\nu}^{b^{(1)}{}_{\nu+m+1}}\chi_b(j)$. Значит $S_b(m)\le\langle S_{b^{(1)}}\rangle_b(m+1),\ m\ge 1$, то есть $S_b(m)\overset{a}{\sim}\langle S_{b^{(1)}}(m)\rangle_b$.

□

Замечание 4. Аналогично для любой базы $b=(b_n)$ доказывается эквивалентность

$$L_b(m)\overset{a}{\sim}\langle L_{b^{(1)}}\rangle_b(m),\ m\ge 1. \tag{1.9}$$

Следствие 5. Для любой натуральной базы b справедливы эквивалентности

$$S_b\overset{a}{\sim}\langle S_{b_*}\rangle_b,\ L_b(m)\overset{a}{\sim}\langle L_{b_*}\rangle_b(m),\ m\ge 1. \tag{1.10}$$

Определение 2. Рассмотрим две произвольные натуральные базы $b^0 := (b^0_m)$ и $b^\infty := (b^\infty_n)$. Упорядоченная пара $\mathfrak{b} := (b^0, b^\infty)$, называется *целой базой.* Её *плейс- и количественной последовательностями* мы называем, соответственно, пары плейс- и количественных последовательностей $(p_{b^0}(m), p_{b^\infty}(n))$ и $(q_{b^0}(m), q_{b^\infty}(n))$, определенные для баз b^0 и b^∞ формулами (1.1) и (1.2). *Двойственной целой базой* к целой базе $\mathfrak{b} = (b^0, b^\infty)$ называется целая база $\mathfrak{b}_* := (b^0_*, b^\infty_*)$. Целые базы $\mathfrak{b}^{(1)} := \Big((b^0)^{(1)}, (b^\infty)^{(1)}\Big)$ и $\mathfrak{b}^{(2)} := \Big((b^0)^{(2)}, b(b^\infty)^{(2)}\Big)$ называются $\overset{a}{\sim}$эквивалентными (обозначение: $\mathfrak{b}^{(1)} \overset{a}{\sim} \mathfrak{b}^{(2)}$), если одновременно $(b^0)^{(1)} \overset{a}{\sim} (b^0)^{(2)}$ и $(b^\infty)^{(1)} \overset{a}{\sim} (b^\infty)^{(2)}$. Аналогично определяется $\overset{a}{\sim}$эквивалентность для плейс- и количественных последовательностей целых баз.

Напомним понятия $\overset{m}{\sim}$эквивалентности / эквивогнутости функции и её суб- и супермультипликативности, см. Определение 3, [4], и Определение 6, [2].

Две вещественные неотрицательные функции f и g, обе заданные на $[0,1]$ или на $[1,\infty)$, или на всей полуоси $[0,\infty)$ называются $\overset{m}{\sim}$*эквивалентными* , если для некоторого $C > 1$ выполняются неравенства $C^{-1}g(Ct) \le f(t) \le Cg(C^{-1}t)$, - там, где они имеют смысл. Непрерывная неубывающая функция φ, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, заданная на подходящей этим требованиям одной из трёх областей и $\overset{m}{\sim}$эквивалентная там некоторой вогнутой функции называется *эквивогнутой.*

Эквивогнутая функция φ, заданная на полуоси $[0,\infty)$, или на $[0,1]$, или на $[1,\infty)$ называется *субмультипликативной (супермультипликативной)*, если для подходящего $C > 1$, неравенство

$$\varphi(s\cdot t) \le C\cdot\varphi(s)\cdot\varphi(t)\ \Big(\text{соответственно, } \varphi(s\cdot t) \ge C^{-1}\cdot\varphi(s)\cdot\varphi(t)\Big) \quad (smp)$$

выполняется там, где оно имеет смысл. Для эквивогнутой функции ψ и двойственной к ней эквивогнутой функции ψ_*, $\psi_*(t) \overset{m}{\sim} \frac{t}{\psi(t)}$, $t > 0$, суб- и супермультипликативность суть двойственные понятия.

С точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности соотношения (smp) равносильны тому, что неравенство

$$\varphi(2^{m+n}) \le D\cdot\varphi(2^m)\cdot\varphi(2^n)\ \Big(\text{соответственно, } \varphi(2^{m+n}) \ge D^{-1}\cdot\varphi(2^m)\cdot\varphi(2^n)\Big). \quad (smp_2)$$

справедливо при некотором D для всех подходящих целых m, n. Прологарифмируем как обе части неравенства (smp_2), так и аргументы φ в нём по основанию 2, затем перейдём к целым частям. Тогда условие

(smp_2) будет означать, что при некотором d для любых подходящих целых m, n справедливы неравенства суб- и, соответственно, суперaддитивности:

$$\mathfrak{p}_\varphi(m+n) \le \mathfrak{p}_\varphi(m)+\mathfrak{p}_\varphi(n)+d \Big(\text{соответственно, } \mathfrak{p}_\varphi(m+n) \ge \mathfrak{p}_\varphi(m)+\mathfrak{p}_\varphi(n)-d\Big). \tag{sad}$$

Займёмся случаем эквивогнутых функций на $[0,\infty)$. Как показано в [4], Определения 4.1 и 4.2, таким функциям φ взаимно однозначно с точностью до $\overset{m}{\sim}\leftrightarrow\overset{a}{\sim}$эквивалентностей соответствуют целые базы $\mathfrak{b}_\varphi = (b^0_\varphi, b^\infty_\varphi)$, где натуральные базы b^0_φ и b^∞_φ определены, соответственно, плейс-последовательностями $|p^-_\varphi(k)|$ и $p^+_\varphi(k)$; здесь $p^-_\varphi(k) = [\log_2\varphi(2^{-k})]$, $p^+_\varphi(k) = [\log_2\varphi(2^k)]$, $k \ge 0$, и $[r]$ обозначает целую часть вещественного числа r. Перепишем первое из неравенств (sad), применяя функцию $\varsigma(z)$ для обозначения знака целого числа $z:\ \varsigma(z) = \frac{|z|}{z} = \frac{z}{|z|}$, $z \ne 0$; $\varsigma(0) = 0$. Тогда получим, что субмультипликативность φ равносильна существанию такого натурального d, для которого при всех целых m, n выполняются неравенства

$$p^{\varsigma(m+n)}_\varphi(m+n) \le p^{\varsigma(m)}_\varphi(m) + p^{\varsigma(n)}_\varphi(n) + d. \tag{1.11}$$

Покажем, что выполнение (1.11) равносильно одновременной субаддитивности базы b^0_φ и супераддитивности базы b^∞_φ.

Поскольку для $m, n \le 0$ неравенства (1.11) означают, что последовательность $p^-_\varphi(k)$ является субаддитивной, то плейс-последовательность $\{p_{b^0_\varphi}(|k|) = |p^-_\varphi(k)|\}$ супераддитивна, откуда по Лемме 1 база b^0_φ является субаддитивной. Аналогично для $m, n \ge 0$ в силу (1.11) последовательность $p^+_\varphi(k)$ субаддитивна, значит и плейс-последовательность $\{p_{b^\infty_\varphi}(k) = p^+_\varphi(k)\}$ субаддитивна, откуда по Лемме 1 база b^∞_φ супераддитивна.

Итак, субаддитивность b^0_φ и одновременная супераддитивность b^∞_φ суть необходимые условия для того, чтобы эквивогнутая функция $\varphi_\mathfrak{b}$, соответствующая целой базе $\mathfrak{b}_\varphi = (b^0_\varphi, b^\infty_\varphi)$ и $\overset{m}{\sim}$эквивалентная φ, [4], была субмультипликативной.

Покажем, что эти условия и достаточны, т. е. при их выполнении неравенства (1.11) выполняются. Это очевидно, когда m и n одинакового знака. Значит достаточно рассмотреть случаи разных знаков чисел m и n. Ввиду их равноправия в (sad) можно считать, что $m \le 0 \ge n$. При этом, когда $m + n \ge 0$ неравенства (1.11) выполняться не могут, ибо в этом случае $|m+n| = m+n$, $|m| = -m$ и выполнение неравенства (1.11) означало бы, что $p_{b^\infty_\varphi}(m + n) \le -p_{b^0_\varphi}(|m|) + p_{b^\infty_\varphi}(n) + d$, откуда

$p_{b_\varphi^\infty}(m+n)+p_{b_\varphi^0}(m)\le p_{b_\varphi^\infty}(n)+d$, чего быть не может по монотонности и неограниченности плейс-последовательности.

Если же $m+n\le 0$, то неравенства (1.11) выполненяются всегда. Действительно, они означают, что $p_\varphi^-(m+n)\le p_\varphi^-(m)+p_\varphi^+(n)+d$, или, равносильно, $-p_{b_\varphi^0}(|m+n|)\le -p_{b_\varphi^0}(|m|)+p_{b_\varphi^\infty}(n)+d$, и остаётся вновь воспользоваться монотонностью плейс-последовательности натуральной базы b^0.

С учётом двойственности получена

Теорема 6. Эквивогнутая функция φ, заданная на полуоси $[0,\infty)$, субмультипликативна (соответственно, супермультипликативна), тогда и только тогда, когда, одновременно выполнены два условия:
1. Левая база b_φ^0 субаддитивна (соответственно, супераддитивна).
2. Правая база b_φ^∞ супераддитивна (соответственно, субаддитивна).
□

§2. Эквимультипликативные функции и эквиаддитивные базы

Определение 3. Эквивогнутую функцию, заданную на $[0,\infty)$ (или на $[0,1]$, или на $[1,\infty)$) будем называть *эквимультипликативной*, если в области своего задания она одновременно суб- и супермультипликативна.

Замечание 7. Из Теоремы 6 вытекает, что эквивогнутая функция на $[0,\infty)$ является эквимультипликативной, тогда и только тогда, когда она эквимультипликативна как на $[0,1]$, так и на $[1,\infty)$.

Определение 4. Одновременно суб- и супераддитивную целую (натуральную) базу будем называть *эквиаддитивной целой (* соответственно, *натуральной) базой.*

Замечание 8. 1. Всякая целая (натуральная) база является эквиаддитивной, тогда и только тогда, когда такой же является двойственная ей база. Поэтому для индексов, [3], любой эквиаддитивной натуральной базы b выполняются неравенства $0<\gamma_b\le\delta_b<1; 0<\gamma_{b_*}\le\delta_{b_*}<1$.
2. Целая база является эквиаддитивной, тогда и только тогда, когда обе её натуральные базы,- левая и правая, - являются эквиаддитивными.

Рассмотрим ближе оба неравенства (1.4), определяющие (суб-) супераддитивную натуральную базу. Увеличение d в них может их только усилить, поэтому можно считать, что в определении эквиаддитивной базы одно и то же натуральное d обслуживает и суб-, и супераддитивность. Иными словами для того, чтобы база b была эквиаддитивной, необходимо и достаточно, чтобы нашлось натуральное d, такое что $b_{n+m-d}\le b_n+b_m\le b_{n+m+d}$; $n+m\ge d$; $m,n\ge 1$. В силу равномерности субаддитивной, а значит и эквиаддитивной базы, это условие равносильно существованию натурального d, такого что для всех элементов базы b справедливо неравенство

$$b_{n+m} - d \leq b_n + b_m \leq b_{n+m} + d \Leftrightarrow |(b_{n+m} - b_n) - b_m| \leq d, \ n, m \geq 1. \quad (2.1)$$

Применяя к (2.1) неравенство треугольника, получим, что при всех натуральных n; k, m выполняются соотношения

$$|(b_{k+m} - b_k) - (b_{n+m} - b_n)| \leq D, \quad (2.2)$$

где $D = 2d$. Учитывая (1.3), при любых $n, k, m \geq 1$ из (2.2) получаем

$$|(b_{k+m} - b_k) - (b_{n+m} - b_n)| = |\sum_{i=b_k+1}^{b_{k+m}} \chi_{b_*}(i) - \sum_{i=b_n+1}^{b_{n+m}} \chi_{b_*}(i)| \leq D. \quad (2.3)$$

Обозначим на время $b_* := (b_n^*)$. В определении эквиаддитивности двойственные базы равноправны, поэтому для любых натуральных n, k, m имеем аналогичные неравенства

$$|\sum_{i=b_{k+1}^*}^{b_{k+m}^*} \chi_b(i) - \sum_{i=b_n^*+1}^{b_{n+m}^*} \chi_b(i)| \leq Q$$

для подходящей натуральной константы Q. Иными словами

$$\sup_{n,k,m \geq 1} |\sum_{i=b_k^*+1}^{b_{k+m}^*} \chi_b(i) - \sum_{i=b_n^*+1}^{b_{n+m}^*} \chi_b(i)| = Q < \infty. \quad (2.4)$$

Лемма 9. Для эквиаддитивной базы b справедлива эквивалентность

$$\langle S_{b_*} \rangle_b(m) \overset{a}{\sim} \langle L_{b_*} \rangle_b(m). \quad (2.5)$$

Доказательство. Очевидно, что $\langle L_{b_*} \rangle_b(m) \leq \langle S_{b_*} \rangle_b(m)$, $m \geq 1$. Поэтому, если Лемма 9 неверна, то найдутся натуральные последовательности $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$ такие что $\sum_{\nu=b_{n_i+1}^*}^{b_{n_i+m_i}^*} \chi_b(\nu) - \limsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=b_n^*+1}^{b_{n+m_i}^*} \chi_b(\nu) \geq j_i \uparrow \infty$. Подставляя сюда последовательность $\{k_i\}$, такую что $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=b_{k_i}^*+1}^{b_{k_i+m_i}^*} \chi_b(\nu) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=b_n^*+1}^{b_{n+m_i}^*} \chi_b(\nu)$, мы при $j_i > Q$ найдём для каждого m_i такое k_i, на котором неравенство (2.4) нарушается. $\square$

Отсюда и из Следствия 5 вытекает

Следствие 10. Для эквиаддитивной базы b справедлива эквивалентность

$$S_b(m) \overset{a}{\sim} L_b(m).$$

□

Тем самым для эквиаддитивной базы b выполнено условие $5')$ Теоремы 5, [5], согласно которой для *симметрической* эквивогнутой фукции φ_b, порождённой b как базой, [3], выполняются условия 2) и 3) Теоремы 5.9 работы [4], в обозначениях которой эти условия представляют собой эквивалентности

$$\begin{cases} \mathfrak{S}^{\infty}_{\varphi_b}(s) \overset{a}{\sim} s^{\delta_b}, \ 1 \le s < \infty; \\ \mathfrak{S}^{0}_{\varphi_{b_*}}(s) \overset{a}{\sim} s^{\gamma_{b*}}, \ s \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.6}$$

В силу Замечания 8.1 эквивалентности (2.6) справедливы и для b_* :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}^{\infty}_{\varphi_{b_*}}(s) \overset{a}{\sim} s^{\delta_{b*}}, \ 1 \le s < \infty; \\ \mathfrak{S}^{0}_{\varphi_b}(s) \overset{a}{\sim} s^{\gamma_b}, \ s \in [0,1], \end{cases} \tag{2.7}$$

где φ_{b_*} обозначает симметрическую эквивогнутую функцию, порождённую натуральной базой b_*. Для симметрической функции φ_b Лемма 4.6, [4], вместе с (2.6) и (2.7) влекут

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{\varphi_b}(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_b}, \ 1 \le s < \infty; \\ \mathfrak{S}_{\varphi_b}(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_b}, \ s \in [0,1], \end{cases} \tag{2.8}$$

По Теореме 6 и по Замечанию 8.2 симметрическая эквивогнутая фукция φ_b, имея эквиаддитивные (совпадающие) левую и правую базы, является субмультипликативной на полуоси $[0,\infty)$, тем самым по Замечанию 2.3, [2], она $\overset{m}{\sim}$эквивалентна своей супремальной функции $\mathfrak{S}_{\varphi_b}(s)$: $\varphi_b \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_{\varphi_b}(s)$. Таким образом

$$\begin{cases} \varphi_b(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_b}, \ 1 \le s < \infty; \\ \varphi_b(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_b}, \ s \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Отсюда, пользуясь формулой (4.10), [4], выводим утверждение:

Теорема 11 (см. также Теорему 3.8, [3]). Заданная на $[0,1]$ (соответственно, на $[1,\infty)$) эквивогнутая функция φ, $0 < \gamma_\varphi \le \delta_\varphi < 1$, эквимультипликативна, тогда и только тогда, когда она $\overset{m}{\sim}$эквивалентна степенной, а именно $\varphi(t) \overset{m}{\sim} t^{\gamma_\varphi}$, $0 \le t \le 1$ (соответственно, $\varphi(t) \overset{m}{\sim} t^{\delta_\varphi}$, $1 \le t < \infty$.)

Пусть теперь φ произвольная, вообще говоря, не симметрическая эквимультипликативная фунция на $[0,\infty)$ с левой и правой и базами

b^0_φ и b^∞_φ, соответственно. По Теореме 6 и по Замечанию 8 каждая из этих баз эквиаддитивна. Подставляя их в верхнюю и, соответственно, в нижнюю строчку (2.6) и (2.7) и вновь пользуясь формулой (4.10), [4], окончательно получаем:

Теорема 12. Заданная на полуоси $[0,\infty)$ эквивогнутая функция φ, $0<\gamma_\varphi\le\delta_\varphi<1$, эквимультипликативна, тогда и только тогда, когда $\varphi(s)\overset{m}{\sim}\psi(s),\ 0\le s<\infty$, где

$$\psi(s)=\begin{cases} s^{\gamma_\varphi},\ s\in[0,1];\\ s^{\delta_\varphi},\ 1\le s<\infty.\end{cases} \tag{2.10}$$

§3. Базовые таблицы и топологические инварианты $M_\psi(0,1)$. Обзор

Определение 4. *Нижней таблицей* натуральной базы $b=(b_n)$ (или *таблицей базового сжатия*) называется бесконечная по строкам и столбцам таблица натуральных чисел $\mathfrak{T}_b(n,m):=\sum_{i=b_n+1}^{b_{n+m}}\chi_b(i),\ n,m\ge 0$. *Верхней таблицей* базы b (или *таблицей базового растяжения*) называется таблица натуральных чисел $\mathfrak{T}^b(n,m):=b_{n+m}-b_n,\ n,m\ge 0$.

Цель этого параграфа - дать единобразное представление в виде предельных соотношений для верхней таблицы базы b_ψ полученным выше, а также изучаемым в [1]- [5] весьма различным по типу $\overset{m}{\sim}$инвариантам пространств Марцинкевича $M_\psi(0,1)$. В силу результатов §1 и §2, а также работ [4]- [5] для целых баз отсюда будут вытекать представления $\overset{m}{\sim}$инвариантов пространств Марцинкевича $M_\psi(0,\infty)$ в форме предельных соотношений для верхних таблиц левой и правой базы функции ψ.

Предложение B1. (*Свойство Харди-Литтлвуда пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ и сепарабельность сопоставленного ему пространства Орлича $L^*_\varphi(0,1)$*, [2]).
Для эквивогнутой функции ψ на $[0,1]$ неравенство $\gamma_\psi>0$ равносильно неравеству

$$\limsup_{n\ge 0}\mathfrak{T}^{b_\psi}(n,1)<\infty. \qquad \Big((HLP)_\psi\Leftrightarrow(\Delta_2)_\varphi\Big)$$

□

Предложение B2. (*α-регулярное изменение*, [1], [5]).
α-регулярность $(0\le\alpha\le 1)$ изменения эквивогнутой функции ψ на $[0,1]$ имеет место, тогда и только тогда, когда для повторного предела выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\mathfrak{T}^{b_\psi}(n,m)}=\alpha. \qquad (\alpha RegVar)$$

□

Предложение B3. Для того, чтобы эквивогнутая функция ψ на $[0,1]$ была субмультипликативна, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{m,n\geq 1}\Big(\mathfrak{T}^{b_\psi}(0,m)-\mathfrak{T}^{b_\psi}(n,m)\Big)<\infty. \qquad (Submult)$$

Критерий супермультипликативности имеет двойственный вид.

□

Эквивогнутую функция $\psi(t),\ t\in[0,1],\ \delta_\psi>0$, мы называем *псевдостепенной*[2], если функция $\psi(t)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$ является эквивогнутой. Известно, [8], [2], что это свойство равносильно инварианту пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1)$, называемому *p-выпуклостью* при $p=\frac{1}{\delta_\psi}$. Выразим этот инвариант в терминах верхней таблицы $\mathfrak{T}^{b_*}(n,m)$ базы $b_*=b_{\psi_*}$. Пользуясь характеризацией свойства функции быть псевдостепенной - условием 5′), [5], Теорема 5, и применяя (1.3), лемму 3 и Замечание 4, приходим к следующему критерию $\frac{1}{\delta_\psi}$-выпуклости:

Предложение B4. Для $\frac{1}{\delta_\psi}$-выпуклости пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1),\ \delta_\psi>0$, необходимо и достаточно, чтобы верхняя таблица $\mathfrak{T}^{b_*}(n,m)$ натуральной базы b_ψ удовлетворяла условию

$$\sup_{n\geq 0}\mathfrak{T}^{b_*}(n,m)\overset{a}{\sim}\limsup_{n\to\infty}\mathfrak{T}^{b_*}(n,m). \qquad (\tfrac{1}{\delta_\psi}\text{-conv})$$

□

Предложение B5. $\Big($ [3], Теорема 3.7.2); [5], Замечание 11$\Big)$. Для пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1),\ \delta_\psi>0$, справедливы импликации

$$(\frac{1}{\delta_\psi}\text{-conv})\Rightarrow(1RegVar)\Rightarrow(Submult).$$

Импликация $(Submult)\Rightarrow(\frac{1}{\delta_\psi}\text{-conv})$, вообще говоря, неверна, [4], Пример 5.4.2.

□

Из Теоремы 11, §2, для базы b_ψ функции ψ на $[0,1]$ выводится условие эквимультипликативности ψ в терминах таблиц:

Предложение B6. (Критерий того, что $M_\psi(0,1)$ - степенное пространство Марцинкевича).
Эквивогнутая на $[0,1]$ функция $\psi,\ 0<\gamma_\psi\leq\delta_\psi<1$, эквимультипликативна, тогда и только тогда, когда

$$\sup_{n;\ k,\ m}|\mathfrak{T}^{b_\psi}(k,m)-\mathfrak{T}^{b_\psi}(n,m)|<\infty. \qquad (M_\psi(0,1)=M_{t^{\gamma_\psi}}(0,1))$$

---

[2] в [2], [3] - *экстремальная* эквивогнутая функция

Последнее бывает в том и только в том случае, когда $\psi \overset{m}{\sim}$эквивалентна степенной функции:

$$\psi(t) \overset{m}{\sim} t^{\gamma_\psi}. \qquad (\psi(t) \overset{m}{\sim} t^{\gamma_\psi}).$$

□

Предложение B7. ([3], Замечание 5.2.) Пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ совпадает по составу элементов с пространством Орлича $L^*_\varphi(0,1)$, тогда и только тогда, когда ψ и φ взаимосопоставлены, [2], и для базы b_{ψ_*} двойственной к ψ функции ψ_* выполняется неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\mathfrak{T}^{b_{\psi_*}}(n,1)} < \infty. \qquad (M_\psi(0,1) = L^*_\varphi(0,1))$$

□

Будем говорить, что пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ обладает свойством $\mathcal{P}^*$, если невозрастающая функция $\frac{\psi(t)}{t}$ суммируема на отрезке $[0,1]$. Ясно, что свойство $\mathcal{P}^*$ есть топологический инвариант пространства Марцинкевича; найдём для него выражение через базовую таблицу $\mathfrak{T}^{b_\psi}$.

Как обычно, обозначим невозрастающую производную вогнутой функции $\psi(t)$ через $f^*(t) : f^*(t) = \psi'(t);\ f^{**}(t) := \frac{\psi(t)}{t},\ t \in (0,1]$.

Замечание ($\mathcal{P}^*$). Условие $f^{**} \in L^1(0,1)$ для эквивогнутой функции ψ на $(0,1]$ равносильно тому что $f^*(t) \in L\log^+ L(0,1)$, [7]. Из того, что пространство $L\log^+ L(0,1)$, будучи пространством Орлича, интерполяционно между $L^1(0,1)$ и $L^\infty(0,1)$, следует, что свойство $\mathcal{P}^*$ для $M_\psi(0,1)$ равносильно включению $M_\psi(0,1) \subset L\log^+ L(0,1)$.

Лемма ($\mathcal{P}^*$). Для того, чтобы пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ обладало свойством $\mathcal{P}^*$, необходима и достаточна суммируемость ряда

$$\sum_{n\ge 1} q_{b_\psi}(n) \cdot 2^{-n},$$

где $q_{b_\psi}(n)$ - количественная последовательность базы b_ψ вогнутой функции ψ.

Доказательство. Положим $D_k := (2^{-k}, 2^{-k+1}],\ k \ge 1;\ f^{(2)} := \sum_{k\ge 1}(2^k \int_{D_k} f^*(s)ds)\chi_{D_k};\ f_{(2)} := \sum_{k\ge 1} f^*(2^{-k+1})\chi_{D_k}$. Очевидно, что

$$f^{**} \in L^1(0,1) \Leftrightarrow (f^{(2)})^{**} \in L^1(0,1) \Leftrightarrow (f_{(2)})^{**} \in L^1(0,1). \tag{3.5}$$

Обозначим $\zeta_n := \psi(2^{-n}) = \int_0^{2^{-n}} f^{(2)}(s)ds,\ n \ge 0$. По определению и в силу невозрастания f^* имеем

$$\sum_{n\ge 1} q_{b_\psi}(n) \cdot 2^{-n} = \sum_{n\ge 1} \overline{\overline{\{j : \zeta_j \in D_n\}}} \cdot 2^{-n} \le \sum_{n\ge 1} \sum_{\zeta_k \in D_n} \zeta_k = \sum_{m\ge 0} \zeta_m \le$$

$$\leq \sum_{n\geq 1}\sum_{\zeta_k\in D_n} 2^{-n+1} = 2\cdot\sum_{n\geq 1}\overline{\overline{\{j:\zeta_j\in D_n\}}}\cdot 2^{-n} = 2\cdot\sum_{n\geq 1} q_{b_\psi}(n)\cdot 2^{-n}. \quad (3.6)$$

С другой стороны $(f^{(2)})^{**}(2^{-n}) = f^{**}(2^{-n}) = \zeta_n\cdot 2^n,\ n\geq 0$, значит в силу (3.5) и (3.6)

$$f^{**}\in L^1(0,1)\Leftrightarrow (f^{(2)})^{**}\in L^1(0,1)\Leftrightarrow [(f^{(2)})^{**}]_{(2)}\in L^1(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} f^{(2)^{**}}(2^{-n+1})\cdot 2^{-n}<\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}\zeta_{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot 2^{-n}\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}\zeta_n<\infty\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} q_{b_\psi}(n)\cdot 2^{-n}<\infty.$$

Последнюю Лемму можно переписать как

Предложение B8. Пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ обладает свойством $\mathcal{P}^*$, тогда и только тогда, когда для верхней таблицы натуральной базы b_ψ выполняется условие

$$\sum_{n\geq 1}\mathfrak{T}^{b_\psi}(n,1)\cdot 2^{-n}<\infty. \qquad (M_\psi(0,1)\subset L\log^+ L(0,1))$$

□

Литература

1. **Меклер А. А.** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 2008. Вып. 8. с. 27 – 38.*

2. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича, I // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 2011. Вып. 14. с. 33 – 48.*

3. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича, II // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 2011. Вып. 14. с. 49 – 66.*

4. **Меклер А. А.** О модулярах пространства Марцинкевича на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$, // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 2012. Вып. 15. с. 95 – 112.*

5. **Меклер А. А.** О модулярах пространства Марцинкевича на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$, II // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 2012. Вып. 16. с. 104 – 111.*

6. **Одинец В. П., Шлензак В. А.** Основы выпуклого анализа. /Авторизованный перевод с польск. В.П.Одинца при участии М.Я.Якубсона/ Под ред. В.Н.Исакова. - М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, РХД, 2011, - 520 с.

7. **Bennett C. , Sharpley R.** Interpolation of Operators. Academic Press, Pure and applied mathematics, v. 129, New York - London, 1988.

8. **Новиков С. И.** Котип и тип функциональных пространств Лоренца // *Матем. Заметки, 32(1982)2, с. 213 - 221.*

Summary

Mekler A. A. Multiplicativity of Marcinkiewicz Modulars. Tables of Bases

The previous study of equi-concave, sub-(super)multiplicative and equi-multiplicative modulars is continued. Topological invariants of Marcinkiewicz spaces are characterized by some relations for tables of natural bases.

Keywords: equi-concave, sub-(super)multiplicative and equi-multiplicative Marcinkiewicz modulars, their bases and tables of bases.
MSC-1991: 46E30

Бременский Университет *Поступила 18.12.2012*