Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 517.53

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ С ЯДРОМ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ С МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А. С. Ильчуков

В работе рассматривается сингулярный интеграл с ядром Коши на гладком контуре комплексной плоскости. Предполагается, что плотность сингулярного интеграла принадлежит пространству функций, определённых на контуре, которое задано с помощью модуля непрерывности, выбираемому из специальных классов. Показывается сходимость сингулярного интеграла с указанной плотностью и, кроме того, исследуется его поведение в терминах модуля непрерывности. Для замкнутого контура рассматривается связь между граничными значениями интеграла типа Коши и значений сингулярного интеграла, а именно, что верны формулы Сохоцкого–Племели.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, модуль непрерывности, формулы Сохоцкого–Племели.

Введение

В таких краевых задачах, как задача Римана и задача Римана–Гильберта, центральную роль играет интеграл типа Коши

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L, \tag{0.1}$$

где L является произвольным гладким замкнутым или незамкнутым контуром, а φ является непрерывной на L функцией. Вообще говоря, контур L является линией особенности для интеграла типа Коши $\Psi(z)$. Тем не менее, при некоторых дополнительных предположениях так называемому сингулярному (несобственному) интегралу с ядром Коши

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, t \in L, \tag{0.2}$$

можно придать смысл. Оказывается, что свойства сингулярного интеграла $\Psi(t)$ являются ключевыми для решения указанных задач. Свойства интеграла типа Коши и сингулярного интеграла с ядром Коши хорошо изучены в случае, когда функция φ удовлетворяет условию Гёльдера на L (например, работы [1, 2]). В данной работе исследуется случай, когда функция φ берётся из пространства, заданного с помощью модуля непрерывности, обобщая тем самым результаты исследований классического случая в гёльдеровских пространствах. При этом модули непрерывности выбираются из классов $\Phi^{\rho}_{A_n}$ и $\Phi^{\rho}_{B_n}$, введённых в работе [3]. В разделе 1 даются определения модуля непрерывности, используемых классов и пространств, определяемых с помощью модулей непрерывности, а также приводятся их свойства. В разделе 2 рассматривается сингулярный интеграл с ядром Коши в указанных пространствах. В разделе 3 доказывается основной результат работы, а именно, что в пространствах с модулем непрерывности из приведённых классов выполняются формулы Сохоцкого–Племели и, кроме того, исследуется поведение сингулярного интеграла в терминах модуля непрерывности.

1. Пространства с модулем непрерывности

1.1. Понятие модуля непрерывности

Определение 1. Рассмотрим непрерывную положительную функцию $\mu(t) : (0, l] \to \mathbb{R}$. Будем называть функцию μ *модулем непрерывности*, если μ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$;

2. $\mu(t)$ почти возрастает на $(0, l]$, то есть, существует такая постоянная $c = c(\mu) > 0$, что как только t_1, $t_2 \in (0, l] : t_1 \leqslant t_2$, то $\mu(t_1) \leqslant c \cdot \mu(t_2)$;

3. $\varphi(t) = \frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает на $(0, l]$, то есть, существует такая постоянная $c_1 = c(\mu) > 0$, что как только t_1, $t_2 \in (0, l] : t_1 \leqslant t_2$, то $\varphi(t_2) \leqslant c_1 \cdot \mu(t_1)$.

Замечание. Пусть $\mu(t) : (0, l] \to \mathbb{R}$,— модуль непрерывности.

1. Для всех $l_1 \leqslant l$ сужение $\mu_1 = \mu|_{(0,l_1]}$ является модулем непрерывности.

2. Для всех $l_2 \geqslant l$ следующее расширение функции μ на $(0, l_2]$

$$\mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t), 0 < t < l, \\ \mu(l), l \leqslant t \leqslant l_2. \end{cases}$$

является модулем непрерывности.

Определение 2. Непрерывную положительную почти убывающую функцию $\rho : (0, l] \to \mathbb{R}$ будем называть *потерей гладкости.*

С помощью потери гладкости можно ввести следующие классы модулей непрерывности, как это было сделано в работе [3].

Определение 3. Пусть $\rho : (0, l] \to \mathbb{R}$ — потеря гладкости, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Пусть далее $\mu : (0, l] \to \mathbb{R}$ — модуль непрерывности, причём $\mu\rho^{n+1}$ также является модулем непрерывности на $(0, l]$. Будем говорить, что μ принадлежит классу $\Phi^{\rho}_{A_n}$, если для μ выполнены следующие условия.

1_{A_n}. Найдётся такая постоянная $A > 0$, зависящая только от функций ρ и μ, что для всех $x \in (0, l]$

$$\int_0^x \frac{\mu(t)}{t} \cdot \rho^n(t)\, dt \leqslant A \cdot \mu(x)\rho^{n+1}(x).$$

2_{A_n}. Найдётся такая постоянная $B > 0$, зависящая только от функций ρ и μ, что для всех $x \in (0, l]$

$$\int_x^l \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt \leqslant B \cdot \frac{\mu(x)}{x}.$$

Аналогично, будем говорить, что μ принадлежит классу $\Phi^{\rho}_{B_n}$, если для μ выполнены следующие условия.

1_{B_n}. Найдётся такая постоянная $A > 0$, зависящая только от функций ρ и μ, что для всех $x \in (0, l]$

$$\int_0^x \frac{\mu(t)}{t} \cdot \rho^{n+1}(t)\, dt \leqslant A \cdot \mu(x)\rho^{n+1}(x).$$

2_{B_n}. Найдётся такая постоянная $B > 0$, зависящая только от функций ρ и μ, что для всех $x \in (0, l]$

$$\int_x^l \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt \leqslant B \cdot \frac{\mu(x)}{x} \cdot \rho(x).$$

Модули непрерывности из классов $\Phi^{\rho}_{A_n}$ и $\Phi^{\rho}_{B_n}$ обладают следующими свойствами.

1. Любой модуль непрерывности $\mu \in \Phi^{\rho}_{A_n} \bigcup \Phi^{\rho}_{B_n}$ удовлетворяет условию Дини:
$$\int_0^l \frac{\mu(t)}{t}\,dt < +\infty.$$

2. Для всех $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0$, выполнены вложения $\Phi^{\rho}_{A_{n+1}} \subset \Phi^{\rho}_{A_n}$ и $\Phi^{\rho}_{B_{n+1}} \subset \Phi^{\rho}_{B_n}$.

3. В случае, когда потеря гладкости ограниченна на $(0, l]$, классы $\Phi^{\rho}_{A_n}$ и $\Phi^{\rho}_{B_n}$ в точности совпадают с классом модулей непрерывности Φ, который рассматривался, например, в работах [4, 5].

1.2. Пространства с модулем непрерывности

Рассмотрим произвольное множество E комплексной плоскост $\mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$, а также пространство $B(E)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на E. Задавшись каким-нибудь произвольным модулем непрерывности можно выделить подпространство функций пространства $B(E)$ следующим образом.

Определение 4. Пусть $\mu : (0, l] \to \mathbb{R}$ — модуль непрерывности. Будем говорить, что функция $f \in B(E)$ принадлежит классу $C^{\mu}(E)$, если найдётся такая постоянная $C > 0$, зависящая только от μ и E, что для всех точек $z_1,\ z_2 \in E : z_1 \neq z_2, |z_1 - z_2| \leqslant l$ выполнено, что
$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant C \cdot \mu(|z_1 - z_2|).$$

В дальнейшем пространство $C^{\mu}(E)$ будем называть пространством функций на множестве E с модулем непрерывности μ.

Класс $C^{\mu}(E)$ обладает следующими свойствами.

1. $C^{\mu}(E) \subset C(E)$.

2. $C^{\mu}(E)$ является векторным подпространством пространства $C(E)$.

3. В пространстве $C^{\mu}(E)$ можно ввести норму следующим образом:
$$||f||_{C^{\mu}(E)} = \max[\sup_{z \in E} |f(z)|, \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ z_1 \neq z_2 \\ |z_1 - z_2| \leqslant l}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\mu(|z_1 - z_2|)}].$$

4. Пространство $C^{\mu}(E)$ с введённой нормой $||\cdot||_{C^{\mu}(E)}$ является пространством Банаха.

5. Для модуля непрерывности $\mu_0(t) = t$ и произвольного модуля непрерывности μ следует, что $C^{\mu_0}(E) \subset C^{\mu}(E)$.

   Следствие. *Пусть $f \in C^{\mu}(E)$, $M = f(E)$ и $g \in C^{\mu_0}(M)$. Тогда $(g \circ f) \in C^{\mu}(E)$, где $\circ$ обозначает композицию функций.*

2. Сингулярный интеграл с ядром Коши в пространствах с модулем непрерывности

Рассмотрим гладкий контур L комплексной плоскости $\mathbb{C}$, непрерывную функцию $\varphi : L \to \mathbb{C}$ и функцию $\Psi(z)$, заданную с помощью формулы (0.1)

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L.$$

Из теорем классического комплексного анализа известно, что функция $\Psi(z)$ определена корректно на $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$. Если L является замкнутым контуром, делящим расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на внутреннюю область D^+ и D^-, то функция $\Psi(z)$ голоморфна на каждой из областей D^+ и D^-, в противном случае $\Psi(z)$ голоморфна на всей $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$ (см., например, [1, с. 16–18]). Кроме того, $\Psi(\infty) = 0$. Как отмечалось во введении, контур L является линией особенности для интеграла (0.1). Вообще говоря, сингулярный интеграл (0.2)

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, t \in L,$$

расходится даже для функции $\varphi(t) \equiv 1$ на L. Поэтому сингулярный интеграл (0.2) понимается исключительно в смысле *главного значения по Коши*. Так, например, если φ берётся из пространства Гёльдера на L, то сингулярный интеграл $\Psi(t)$ сходится в смысле главного значения по Коши (см., например, [1, с. 28–30]). В данном разделе будет показано, что этот результат сохраняется, если выбрать φ из пространства с модулем непрерывности, удовлетворяющего условию Дини.

2.1. Главное значение по Коши сингулярного интеграла

Прежде чем дать определение главного значения по Коши, рассмотрим следующие два свойства гладкого контура L, взятых из [2, с. 457–459], которые понадобятся в этом и в следующем разделе.

1. Найдётся такое число $R_0 > 0$, зависящее только от L, что для всех $0 < R \leqslant R_0$ и всех $t \in L$ окружность с центром в точке t радиуса R пересечёт контур L не более, чем в двух точках. Следуя [2], будем называть число R_0 *стандартным радиусом*.

2. Найдётся такая постоянная $k_0 > 0$, зависящая только от L, что для всех точек t_1, $t_2 \in L$ выполнено неравенство

$$k_0 \cdot \sigma(t_1, t_2) \leqslant r(t_1, t_2) \leqslant \sigma(t_1, t_2),$$

где под $\sigma(t_1, t_2)$ понимается длина дуги между точками t_1 и t_2, а под $r(t_1, t_2)$ — расстояние между точками t_1 и t_2.

Пусть $\varphi \in C(L)$. Зафиксируем точку $t \in L$, не совпадающую с концами контура L, тогда любая окружность с центром в точке t достаточно малого радиуса ρ, который меньше стандартного радиуса, пересекает контур L в двух точках t_1 и t_2. Обозначим дугу контура, заключённую между t_1 и t_2 за $l = l(\rho)$.

Определение 5. *Главным значением по Коши* сингулярного криволинейного интеграла (0.2) будем называть следующий предел:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{2.3}$$

Замечание. В дальнейшем тексте работы сингулярные интегралы будут пониматься исключительно в смысле главного значения по Коши, потому это не будет отмечаться отдельно.

Известно ([1, с. 29]), что

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln \frac{b - t}{t - a} + i \cdot \alpha, \tag{2.4}$$

где a, b — концы контура L, α — предельное значение угла между векторами $\overline{tt_1}$ и $\overline{tt_2}$ при $\rho \to 0$, а первообразная функция подынтегрального выражения $\ln(\tau - t)$ является ветвью аналитической многозначной функции $\ln(z - t)$, взятой в плоскости, разрезанной вдоль некоторой кривой, соединяющей точки t и ∞, проходящей при этом справа от кривой L. В случае, когда контур L является замкнутым, а t — его точкой гладкости, из равенства (2.4) следует, что

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i \cdot \pi. \tag{2.5}$$

Представляя сингулярный интеграл (0.2) в формальном виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t}, \tag{2.6}$$

получим, что существование интеграла (0.2) эквивалентно существованию сингулярного интеграла

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{2.7}$$

2.2. Существование сингулярного интеграла

Лемма 1. *Пусть L — гладкий контур комплексной плоскости, $\varphi \in C^\mu(L)$, где $\mu : (0, l] \to \mathbb{R}$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини. Тогда в каждой точке $t \in L$, не совпадающей с концами контура L, существует сингулярный интеграл $\Psi(t)$, заданный формулой* (0.2).

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $t \in L$, не совпадающую с концами L. Как и в определении 5 рассмотрим достаточно малое $\rho > 0$, окружность с центром в t, пересекающую L в точках t_1 и t_2 и дугу $l = l(\rho)$, заключённую между t_1 и t_2. Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{L \setminus l} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|}\, |d\tau| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \int_{L \setminus l} \frac{\mu(|\tau - t|)}{|\tau - t|}\, |d(\tau - t)|.$$

Из свойств гладкого контура, рассмотренных в предыдущем подразделе, следует, что найдётся такая постоянная $m = m(L) > 0$, что для всех $t, \tau \in L$

$$|d(\tau - t)| \leqslant m \cdot d|\tau - t|. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau \right| \leqslant C_1 \cdot m \int_\rho^l \frac{\mu(x)}{x}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \cdot m \int_0^l \frac{\mu(x)}{x}\, dx < +\infty.$$

Отсюда следует, что сингулярный интеграл (2.7) сходится абсолютно, откуда получаем существование сингулярного интеграла (0.2). $\square$

Следствие. *При условиях леммы сингулярный интеграл* (0.2) *существует для $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$, $\mu \in \Phi^\rho_{A_n} \bigcup \Phi^\rho_{B_n}$.*

3. Краевые значения интеграла типа Коши в пространствах с модулем непрерывности

3.1. Формулы Сохоцкого–Племели

Докажем сначала утверждение, аналогичное основной лемме для предельных значений интеграла типа Коши в работе [1, с. 34], и покажем, что в пространствах с модулем непрерывности из классов $\Phi^{\rho}_{A_n}$ и $\Phi^{\rho}_{B_n}$ выполнены формулы Сохоцкого–Племели.

Лемма 2. *Пусть L — гладкий контур комплексной плоскости, $\mu \in \Phi^{\rho}_{A_n} \bigcup \Phi^{\rho}_{B_n}$, $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$. Пусть далее точка t не совпадает ни с одним из концов контура L. Рассмотрим функцию*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau. \tag{3.9}$$

Тогда

$$\lim_{z\to t}\psi(z) = \psi(t), \tag{3.10}$$

где $\psi(t)$ задана формулой (2.7), а точка z приближается к точке t по произвольному пути с любой стороны контура L.

Доказательство. Оценим разность

$$\psi(z) - \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau \tag{3.11}$$

в случае, когда стремление точки z к точке t происходит по некасательному к L пути, то есть нетупой угол между отрезком zt и соответствующей касательной к L в точке t не меньше некоторого угла $\omega_0 > 0$.

Представим интеграл, стоящий в правой части равенства (3.11), в следующем виде:

$$\int_L \frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau =$$
$$= \int_{L_\delta} \frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{L\setminus L_\delta} \frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau = I_1 + I_2,$$

где L_δ является участком контура L, лежащему внутри окружности с центром в точке t достаточно малого радиуса δ. Выберем далее такой радиус δ, чтобы острый угол между вектором $t\tau$, $\tau \in L_\delta$, с одним из касательных векторов в точке t был меньше $\frac{\omega_0}{2}$. Тогда

$$\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right| = \frac{|z-t|}{|\tau-z|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\omega_0}{2}} = K,$$

где $K > 0$. Воспользуемся также неравенством (2.8). Тогда

$$|I_1| \leqslant \int_{L_\delta} \left|\frac{z-t}{\tau - z}\right| \left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}\right| |d\tau| \leqslant$$
$$\leqslant K \cdot C \int_{L_\delta} \frac{\mu(|\tau - t|)\rho^n(|\tau - t|)}{|\tau - t|} |d(\tau - t)| \leqslant$$
$$\leqslant K \cdot m \cdot C \int_0^\delta \frac{\mu(r)\rho^n(r)}{r} dr \leqslant K \cdot m \cdot C \cdot A \cdot \mu(\delta)\rho^{n+1}(\delta),$$

где число C зависит от φ и μ, число A зависит от μ. Таким образом, задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое δ, что $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ равномерно по z. Зафиксируем такое число δ. На участке $L \setminus L_\delta$ интеграл I_2 является непрерывной функцией от z, поэтому, выбирая точку z так, чтобы $|z-t|$ было достаточно малым, получим, что $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тем самым, показано, что

$$|\psi(z) - \psi(t)| \leqslant |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

На основе этого результата можно далее проверить случай стремления точки z к точке t по касательному пути абсолютно аналогично тому, как это было сделано в [1]. □

Замечание. Поскольку в доказательстве леммы оценка $|\psi(z)-\psi(t)|$ была произведена равномерно по t, то функция $\psi(t)$ непрерывна на L.

Следствие. *Пусть L — замкнутый и гладкий контур комплексной плоскости, $\mu \in \Phi^\rho_{A_n} \bigcup \Phi^\rho_{B_n}$, $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$. Следуя [1, с. 37], обозначим за $\Psi^+(t)$, $\psi^+(t)$ предельные значения функций $\Psi(z)$ и $\psi(z)$, заданных с помощью формул (0.2) и (2.7), при стремлении $z \in D^+$ к t, а за $\Psi^-(t)$, $\psi^-(t)$ обозначим предельные значения $\Psi(z)$ и $\psi(z)$ при стремлении $z \in D^-$ к t. Учитывая, что*

$$\int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+, \\ \pi i, & z \in L, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases}$$

получим, что для всех $t \in L$

$$\psi^+(t) = \Psi^+(t) - \varphi(t),$$

$$\psi^-(t) = \Psi^-(t),$$

$$\psi(t) = \Psi(t) - \frac{1}{2} \cdot \varphi(t),$$

а поскольку $\psi(t)$ непрерывна на L, то и правые части приведённых тождеств равны. Отсюда получаем формулы Сохоцкого–Племели*:*

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t} \, d\tau, t \in L, \tag{3.12}$$

$$\Psi^-(t) = -\frac{1}{2} \cdot \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t} \, d\tau, t \in L. \tag{3.13}$$

3.2. Поведение сингулярного интеграла

Из представления (2.6) и замечания к лемме (2) можно сделать вывод, что в случае гладкого контура L, $\mu \in \Phi^\rho_{A_n} \bigcup \Phi^\rho_{B_n}$, $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$, сингулярный интеграл (0.2) является непрерывной на L функцией. На самом деле, можно доказать более сильное утверждение, выражающее поведение сингулярного интеграла в терминах модуля непрерывности μ.

Лемма 3. *Пусть L является гладким контуром, $\mu \in \Phi^\rho_{A_n} \bigcup \Phi^\rho_{B_n}$, $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$. Тогда $\Psi \in C^{\mu\rho^{n+1}}(L)$.*

Доказательство. Утверждение леммы будет немедленно следовать из представления (2.6), если показать, что $\psi \in C^{\mu\rho^{n+1}}(L)$, где $\psi(t)$ задана формулой (2.7).

Зафиксируем число $0 < \delta \leqslant R_0$, где R_0 — стандартный радиус контура L. Отметим, что для всех таких t_1, $t_2 \in L$, что $|t_1 - t_2| \geqslant \delta$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant C \cdot \mu(|t_1 - t_2|)\rho^n(|t_1 - t_2|) \leqslant \\ \leqslant \frac{C_1}{\rho(\delta)} \cdot \mu(|t_1 - t_2|)\rho^{n+1}(|t_1 - t_2|) = C_2 \cdot \mu(|t_1 - t_2|)\rho^{n+1}(|t_1 - t_2|), \end{aligned}$$

где C_2 зависит только от μ и L.

Докажем аналогичное неравенство для t_1, $t_2 : |t_1 - t_2| < \delta$. Выберем произвольную точку $t_1 \in L$ и проведём окружность с центром в точке t_1 радиуса δ, пересекающую контур L в двух точках a и b. Обозначим дугу ab контура L, лежащую внутри построенной окружности, за l и зафиксируем на ней произвольную точку t_2, не совпадающую с точками t_1, a и b. Обозначим $k = \frac{\delta}{|t_1 - t_2|}$.

Для выбранных точек t_1, t_2 получим, что

$$\begin{aligned}\psi(t_2)-\psi(t_1)=\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\,d\tau-\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\,d\tau=\\ =\int_l\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\,d\tau-\int_l\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\,d\tau+\\ +\int_{L\setminus l}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{\tau-t_1}\,d\tau+\int_{L\setminus l}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi(t_2))(t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}\,d\tau=\\ =I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

Оценим абсолютные значения интегралов I_1, I_2, I_3, I_4.

1. Пусть $\mu\in\Phi^{\rho}_{A_n}$. Тогда

$$\begin{aligned}|I_1|\leqslant\int_l\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_2)|}{|\tau-t_2|}\,|d\tau|\leqslant C\int_l\frac{\mu(|\tau-t_2|)\rho^n(|\tau-t_2|)}{|\tau-t_2|}\,|d\tau|\leqslant\\ \leqslant C\cdot m\int_0^{2\delta}\frac{\mu(r)\rho^n(r)}{r}\,dr\leqslant C\cdot m\cdot A\cdot\mu(2\delta)\rho^{n+1}(2\delta)\leqslant\\ \leqslant C\cdot m\cdot A_1\cdot\mu(\delta)\rho^{n+1}(\delta)\leqslant B_1\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}|I_2|\leqslant\int_l\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_1)|}{|\tau-t_1|}\,|d\tau|\leqslant C\int_l\frac{\mu(|\tau-t_1|)\rho^n(|\tau-t_1|)}{|\tau-t_1|}\,|d\tau|\leqslant\\ \leqslant C\cdot m\int_0^{\delta}\frac{\mu(r)\rho^n(r)}{r}\,dr\leqslant C\cdot m\cdot A\cdot\mu(\delta)\rho^{n+1}(\delta)\leqslant\\ \leqslant B_2\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).\end{aligned}$$

Интеграл I_3 можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}|I_3|=\int_{L\setminus l}\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|\tau-t_1|}\,|d\tau|\leqslant|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\left|\int_{L\setminus l}\frac{1}{|\tau-t_1|}\,|d\tau|\right|\leqslant\\ \leqslant C\cdot m\cdot\frac{C_L}{\delta}\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^n(|t_1-t_2|)=B_3\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).\end{aligned}$$

Для оценки интеграла I_4 предварительно отметим, что

$$\min_{\tau\in L\setminus l}|\tau-t_1|=\delta=k|t_1-t_2|,$$

следовательно, для точек $\tau\in L\setminus l$, учитывая, что $k\geqslant 1$, получаем, что

$$|\tau-t_2|\leqslant|t_1-t_2|+|\tau-t_1|\leqslant\frac{1}{k}\cdot|\tau-t_1|+|\tau-t_1|\leqslant 2\cdot|\tau-t_1|.$$

Таким образом, для интеграла I_4 имеем, что

$$|I_4| \leqslant \int_{L\setminus l} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_2)||t_2-t_1|}{|\tau-t_1||\tau-t_2|}\,|d\tau| \leqslant |t_2-t_1| \int_{L\setminus l} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_2)|}{|\tau-t_1||\tau-t_2|}\,|d\tau| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{2}\cdot|t_2-t_1| \int_{L\setminus l} \frac{\mu(|\tau-t_2|)\rho^n(|\tau-t_2|)}{|\tau-t_2|^2}\,|d\tau| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\cdot m\cdot|t_2-t_1| \int_{(k-1)|t_1-t_2|}^{R} \frac{\mu(r)\rho^n(r)}{r^2}\,dr \leqslant$$
$$\leqslant C_2\cdot m\cdot|t_2-t_1|\rho^n((k-1)|t_1-t_2|) \int_{(k-1)|t_1-t_2|}^{R} \frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \leqslant$$
$$\leqslant C_2\cdot m\cdot A\cdot\rho^n((k-1)|t_1-t_2|)\cdot|t_2-t_1|\cdot\frac{\mu((k-1)|t_1-t_2|)}{(k-1)|t_1-t_2|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_3\cdot m\cdot A_2}{k-1}\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|) = B_4\cdot\mu(|t_1-t_2|).$$

2. Пусть теперь $\mu \in \Phi^{\rho}_{B_n}$. Этот случай во многом аналогичен рассмотренному выше. Для I_1 получаем

$$|I_1| \leqslant C\cdot m\int_0^{2\delta}\frac{\mu(r)\rho^n(r)}{r}\,dr \leqslant C_1\int_0^{2\delta}\frac{\mu(r)\rho^{n+1}(r)}{r}\,dr \leqslant$$
$$\leqslant C_2\mu(2\delta)\rho^{n+1}(2\delta) \leqslant B_1\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).$$

Аналогично рассуждая, получаем, что

$$|I_2| \leqslant B_2\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).$$

Как и в предыдущем пункте

$$|I_3| \leqslant B_3\cdot\mu(|t_1-t_2|)\rho^{n+1}(|t_1-t_2|).$$

$$|I_4| \leqslant C_2\cdot|t_2-t_1|\rho^n((k-1)|t_1-t_2|)\int_{(k-1)|t_1-t_2|}^{R}\frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \leqslant$$
$$\leqslant C_3\cdot|t_2-t_1|\rho^n((k-1)|t_1-t_2|)\cdot\frac{\mu((k-1)|t_1-t_2|)\rho((k-1)|t_1-t_2|)}{((k-1)|t_1-t_2|)} \leqslant$$
$$\leqslant B_4\cdot\mu(|t_2-t_1|)\rho^{n+1}(|t_2-t_1|).$$

При этом в вышеприведённых оценках постоянные B_1–B_4 зависят только от μ и L.

$\square$

Следствие. *Пусть L является гладким замкнутым контуром, $\mu \in \Phi^{\rho}_{A_n} \bigcup \Phi^{\rho}_{B_n}$, $\varphi \in C^{\mu\rho^n}(L)$. Тогда из формул Сохоцкого–Племели следует, что Ψ^+, $\Psi^- \in C^{\mu\rho^{n+1}}(L)$.*

Замечание. Из следствия видно существенное отличие рассматриваемого случая сингулярного интеграла в пространствах с модулем непрерывности от классического случая в гёльдеровских пространствах, поскольку известно (см., например, [1, с. 52–55]), что если φ удовлетворяет на L условию Гёльдера с показателем $\lambda \in (0, 1)$, то и сингулярный интеграл, построенный по формуле (0.2) с помощью функции φ, удовлетворяет на L условию Гёльдера *с тем же самым* показателем λ. При решении краевой задачи Римана или краевой задачи Римана–Гильберта с краевым условием, чье поведение задаётся с помошью модуля непрерывности из $\Phi^{\rho}_{A_n} \bigcup \Phi^{\rho}_{B_n}$, где потеря гладкости $\rho(t)$ не является ограниченной на $(0, l]$, поведение решения будет определяться модулем непрерывности вида $\mu\rho^{n+k}$, $k > 0$, что приведёт к так называемому *«логарифмическому эффекту»*.

Литература

1. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. Москва: Наука, 1977. 640 с.

2. **Мусхелишвили Н. И.** Синуглярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 512 с.

3. **Ilchukov A. S., Reissig M, Timofeev A. Y.** Loss of regularity and the Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with modulus of continuity, *Complex Variables and Elliptic Equations*, http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17476933.2011.652955

4. **Ильчуков А. С., Тимофеев А. Ю.** Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах функций, описываемых поведением модуля непрерывности // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 58–65.*

5. **Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш.** Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

Summary

Ilchukov A. S. Singular integral with Cauchy kernel in spaces defined by modulus of continuity

In the paper singular integral with Cauchy kernel on a smooth contour of complex plane is considered. It is supposed that density of the singular integral belongs to space of functions defined on the contour by modulus of continuty, which is chosen from classes with special properties. Existence of the singular integral with such a density is shown and behaviour of the singular integral is studied. For closed contour connection of boundary values of Cauchy-type integral and the singular integral is considered in form of Sokhotski–Plemelj formulas.

Keywords: singular integral, modulus of continuity, Sokhotski–Plemelj formulas

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 19.06.2013*