Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 512.558

МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ИДЕМПОТЕНТНЫЕ ПОЛУКОЛЬЦА С ТОЖДЕСТВОМ $x + 2xyx = x$

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Исследуются структурные свойства мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x + 2xyx = x$. Рассматриваемый класс полуколец включает в себя булевы кольца, дистрибутивные решетки, прямоугольные полукольца.
Ключевые слова: полукольцо, дистрибутивная решетка, идемпотентность, конгруэнция, простой идеал.

В статье продолжается изучение мультипликативно идемпотентных полуколец [2,3]. Некоторые из новых результатов работы анонсированы в [6].

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Если в полукольце S существует элемент 0, такой, что $x + 0 = x, x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ для всех $x \in S$, то S называется *полукольцом с нулем* 0.

Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Коммутативная идемпотентная полугруппа называется *полурешеткой*. Полукольцо с тождеством $xx = x$ (с тождеством $x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, будем называть *идемпотентным*. Примером идемпотентных полуколец служат дистрибутивные решетки, характеризуемые как коммутативные идемпотентные полукольца, удовлетворяющие закону поглощения $x + xy = x$. Полукольцо с тождеством $x + y = xy$ называется *дубль-полукольцом* (или *монополукольцом*). Дубль-полукольца коммутативны. Кроме того, муль-

типликативно идемпотентные дубль-полукольца идемпотентны. Полукольца, удовлетворяющие тождеству $xyx = x$ будем называть *прямоугольными* (по аналогии с соответствующими полугруппами [10]). Легко видеть, что прямоугольные полукольца идемпотентны.

Отметим, что мультипликативно идемпотентные полукольца удовлетворяют тождеству $x + x + x + x = x + x$, или $4x = 2x$.

Для произвольного полукольца S с нулем через $r(S)$ обозначим множество элементов, имеющих противоположный элемент. Ясно, что $r(S)$ будет кольцом, более того, строгим идеалом в S (см. [2]).

Полукольцо S с нулем называется 0-*расширением полукольца A при помощи полукольца B*, если существует такая конгруэнция ρ на S, что $[0]_\rho \cong A$ и $S/\rho \cong B$ (расширение посредством конгруэнции ρ). Так, прямое произведение произвольных полуколец с нулем A и B есть 0-расширение A при помощи B (а также B при помощи A) посредством конгруэнции $\rho : (a, b)\rho(a', b')$ означает $b = b'$ при любых $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$.

Полукольцо S будем называть *полукольцевым расширением (или связкой) семейства полуколец A_i $(i \in I)$ при помощи полукольца B*, если на S существует такая конгруэнция ρ, что $S/\rho \cong B$, и каждый класс $[a_i]_\rho$ является подполукольцом в S, изоморфным соответствующему полукольцу A_i.

Идеал I полукольца S называется *простым* (*строгим*), если для любых $a, b \in S$ выполняется $a, b \notin I \Rightarrow ab \notin I$ (соответственно, $a + b \in I \Rightarrow a \in I$).

Теорема A. [3, теорема 5] *Простые идеалы произвольного полукольца S разделяют его элементы тогда и только тогда, когда S коммутативно и мультипликативно идемпотентно.*

Лемма 1. *Для произвольного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1) *S мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда, классы любой конгруэнции ρ на S являются подполугруппами полугруппы $\langle S, \cdot \rangle$;*

2) *S идемпотентно тогда и только тогда, когда, классы любой конгруэнции ρ на S являются подполукольцами в S.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $x\rho y$ для $x, y \in S$. Тогда $(xy)\rho y^2$, то есть $(xy)\rho y$.

Достаточность. Для конгруэнции, являющейся отношением равенства, все классы одноэлементны. Поэтому $xx = x$.

2) Аналогично.

Для любых элементов a, b мультипликативно идемпотентного полу-

кольца S положим

$$a\rho_m b \Leftrightarrow 2a = 2b.$$

Лемма 2. *Отношение ρ_m является наименьшей конгруэнцией на произвольном мультипликативно идемпотентном полукольце S, факторполукольцо по которой будет идемпотентным полукольцом.*

Доказательство. Очевидно, что отношение ρ_m является конгруэнцией на S. Кроме того, $s\rho_m(2s)$ для любого $s \in S$. Для всякой конгруэнции τ, такой, что S/τ — идемпотентное полукольцо, поскольку при любых $a, b \in S$ из $a\rho_m b$ следует

$$[a]_\tau = [2a]_\tau = [2b]_\tau = [b]_\tau.$$

Предложение 1. *Всякое мультипликативно идемпотентное полукольцо S является полукольцевым расширением семейства мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x = 2y$ при помощи идемпотентного полукольца.*

Доказательство. Учитывая лемму 2, достаточно проверить, что любой класс конгруэнции ρ_m на S будет подполукольцом в S. Действительно, пусть для $a, b \in S$ имеем $a\rho_m b$, то есть $2a = 2b$. Тогда $2(a+b) = 2a+2b = 2a+2a = 2a$, откуда $(a+b)\rho_m a$. И $(ab)\rho_m a$ по лемме 1, 1).

Предложение 2. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем является 0-расширением булева кольца $r(S)$ с помощью идемпотентного полукольца.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы 2, S/ρ_m — идемпотентное полукольцо. Кроме того, нетрудно видеть, что $[0]_{\rho_m} = r(S)$ — булево кольцо.

Замечание 1. В работе [5] указана наименьшая конгруэнция ρ на произвольном полукольце S с нулем, факторполукольцо по которой является аддитивно идемпотентным полукольцом, а класс нуля совпадает с множеством $r(S)$. Таким образом, произвольное полукольцо с нулем является 0-расширением кольца $r(S)$ с помощью аддитивно идемпотентного полукольца.

Лемма 3. *Всякое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с тождеством $2x = 2y$ обладает поглощающим элементом по умножению.*

Доказательство. В силу тождества $2x = 2y$ получаем, что все «удвоенные» элементы из S равны между собой. Обозначим этот элемент через θ. Тогда для любого $s \in S$ $s + s = \theta$, в частности, $\theta + \theta = \theta$, откуда $s\theta = s(\theta+\theta) = s\theta + s\theta = \theta$ (аналогично, $\theta s = \theta$). Таким образом, θ является поглощающим элементом по умножению.

Теорема 1. *Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с тождеством $x + 2xyx = x$ является полукольцевым расширением семейства булевых колец при помощи идемпотентного полукольца с тождеством $x + xyx = x$.*

Доказательство. Из предложения 1 и тождества $x + 2xyx = x$ следует, что фактороколукольцо S/ρ_m будет идемпотентным полукольцом с тождеством $x + xyx = x$.

Произвольный класс конгруэнции ρ_m на S будет мультипликативно идемпотентным полукольцом с тождеством $2x = 2y$. Поэтому в силу леммы 3 и тождества $3x = x$ на S имеем $s = s + 2s = s + \theta$ для любого $s \in S$. Таким образом, θ служит нулем полукольца S, а само S является булевым кольцом.

Следствие 1. *Любое мультипликативно идемпотентное (коммутативное) полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ является полукольцевым расширением семейства булевых колец при помощи идемпотентного полукольца с тождеством $x + xy = x$ (дистрибутивной решетки, соответственно).*

Введем на произвольном полукольце S бинарное отношение σ :

$$(\forall a, b \in S)\,(a\sigma b \Leftrightarrow aba = a \text{ и } bab = b).$$

Теорема 2. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с тождеством $x + xyx = x$ является полукольцевым расширением семейства прямоугольных полуколец при помощи дистрибутивной решетки.*

Доказательство. То, что отношение σ будет конгруэнцией на произвольной идемпотентной полугруппе, факторполугруппа по которой является полурешеткой, доказано в [11, Theorem 1]. Покажем, что σ сохраняет сложение на S. Действительно, если для некоторых $a, b \in S$ выполняется $a\sigma b$, то, учитывая тождество $x+xyx = x$, для любого $c \in S$ получаем:

$$\begin{gathered}(a + c)(b + c)(a + c) = aba + abc + aca + ac + cba + cbc + ca + c = \\ = a + ac + ca + c + aba + abc + cba + cbc = (a + c)^2 + (a + c)b(a + c) = \\ = (a + c) + (a + c)b(a + c) = a + c.\end{gathered}$$

Аналогично, $(b + c)(a + c)(b + c) = b + c$. Таким образом, σ является конгруэнцией на S, причем факторполукольцо по ней коммутативно, идемпотентно и обладает тождеством $x + xy = x$, то есть является дистрибутивной решеткой.

Следствие 2. *Всякое идемпотентное полукольцо S с тождеством $x+xy=x$ является полукольцевым расширением семейства полуколец с тождеством $xy=x$ при помощи дистрибутивной решетки.*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно показать, что для любого $a \in S$ класс конгруэнции $[a]_\sigma$ удовлетворяет тождеству $xy=y$. Поскольку на $[a]_\sigma$ выполняется тождество $xyx=x$, то на $[a]_\sigma$ тождественно

$$x = x + xy = (xy)x + xy = xy.$$

Для любого простого идеала P коммутативного полукольца S рассмотрим бинарное отношение θ_P :

$$(\forall a, b \in S)\, a\theta_P b \Leftrightarrow (\exists\, c \in S \setminus P)\, ac = bc.$$

Отношение θ_P является конгруэнцией на произвольном коммутативном полукольце S и называется *конгруэнцией Ламбека* [7, с. 54].

Лемма 4. *Для всякого простого идеала P коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S выполняются свойства:*

(1) *множество $S \setminus P$ является классом конгруэнции θ_P;*

(2) *факторполукольцо S/θ_P обладает единицей;*

(3) *разбиение $\widetilde{P} = \{P, S \setminus P\}$ является двухклассовой конгруэнцией на мультипликативной полугруппе полукольца S.*

Доказательство. (1). Заметим, что $u\theta_P v$ для любых $u, v \in S \setminus P$, так как $u(uv) = uv = v(uv)$. Предположим, что для элементов $p \in P, u \in S \setminus P$ выполняется $p\theta_P u$, то есть $pw = uw$ для некоторого $w \in S \setminus P$. Тогда $uw \in P$, что невозможно, так как P — простой идеал. Таким образом, $S \setminus P$ является классом конгруэнции θ_P.

(2). Покажем, что множество $S \setminus P$ является единичным классом в S/θ_P. Для любых $p \in P, u \in S \setminus P$ имеем $(pu)u = pu$, то есть $(pu)\theta_P p$.

(3). Очевидно.

Обозначим через $\mathbb{B}$ двухэлементную цепь, а через $\mathbb{Z}_2$ — двухэлементное поле. Конгруэнц-простые полукольца $\mathbb{B}$ и $\mathbb{Z}_2$ являются коммутативными мультипликативно идемпотентными полукольцами с тождеством $x + 2xy = x$.

Теорема 3. [8, corollary 4.4] *Для того, чтобы произвольное полукольцо S являлось коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцом с тождеством $x + 2xy = x$ необходимо и достаточно, чтобы S было подпрямым произведением некоторого семейства полуколец $\mathbb{B}$ и $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. *Достаточность* очевидна.

Докажем *необходимость*. Возьмем произвольный простой идеал P в полукольце S с указанными свойствами. Положим $Q = S \setminus P$. Покажем,

что $p + u \notin P$ для произвольных $p \in P, u \in Q$. Если $p + u \in P$, то $up + u \in P$, откуда $u + 2up = u \in P$, противоречие. Так как по лемме 4 Q является классом конгруэнции θ_P, то либо $Q + Q \subseteq P$, либо $Q + Q \subseteq Q$. В обоих случаях получаем двухклассовую конгруэнцию $\widetilde{P} = \{P, Q\}$ на полукольце S. В первом случае факторполукольцо по конгруэнции $\widetilde{P}$ изоморфно двухэлементному полю $\mathbb{Z}_2$, во втором — двухэлементной цепи $\mathbb{B}$.

Остается применить теорему A.

Следствие 3. *Многообразие коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x + 2xy = x$ порождается полукольцами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{Z}_2$.*

Замечание 2. Хорошо известны классические результаты Г. Биркгофа и М. Стоуна о том, что дистрибутивные решетки суть (с точностью до изоморфизма) подпрямые произведения семейств цепи $\mathbb{B}$ (см. [1], [4, с. 156–157]), а булевы кольца — это в точности подпрямые произведения семейств поля $\mathbb{Z}_2$ [12]. Отметим, что синтез булевых алгебр и булевых колец осуществлен в так называемых алгебрах Ньюмена [1, с. 71]. Для мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей аналогичный следствию 3 результат получен в [?].

Следствие 4. [3, теорема 7] *Всякое конечное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ является прямым произведением семейства полуколец $\mathbb{B}$ и $\mathbb{Z}_2$.*

Лемма 5. *Всякое прямоугольное полукольцо S изоморфно прямому произведению полукольца с тождеством $xy = x$ и полукольца с тождеством $xy = y$.*

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующего результата для прямоугольных полугрупп (см., например, [10, Lemma 1]). Для полноты изложения докажем лемму.

Пусть в полукольце S выполняется тождество $xyx = x$. Тогда S удовлетворяет тождеству $xyz = xz$, поскольку

$$xyz = (xzx)yz = x(zxyz) = xz.$$

Для любого фиксированного элемента $a \in S$ рассмотрим подполукольца $L = Sa$ и $R = aS$ в S. Покажем, что L удовлетворяет тождеству $xy = x$. Пусть $x = ua, y = va$, где $u, v \in S$. Тогда $xy = uava = u(ava) = ua = x$. Аналогично, на R тождественно $xy = y$.

Проверим, что $S \cong L \times R$. Рассмотрим отображение $f : S \to L \times R$, заданное формулой $f(x) = (xa, ax)$. Отображение f является гомомор-

физмом полуколец, так как для любых $x, y \in S$:

$$f(x)f(y) = (xa, ax)(ya, ay) = (xaya, axay) =$$
$$= (xa, ay) = (xya, axy) = f(xy);$$
$$f(x) + f(y) = (xa, ax) + (ya, ay) =$$
$$= (xa + ya, ax + ay) = ((x + y)a, a(x + y)) = f(x + y).$$

Чтобы установить взаимную однозначность f достаточно показать, что существует обратное к f отображение. Рассмотрим отображение $g : L \times R \to S$, определенное равенством: $g(((xa, ay)) = xy$ для любых $x \in L, y \in R$. Тогда

$$f(g((xa, ay))) = f(xy) = (xa, ay),$$

то есть $f \circ g$ — тождественное отображение на $L \times R$.

С другой стороны,

$$g(f(x)) = g((xa, ax)) = xx = x,$$

то есть $g \circ f$ — тождественное отображение на S. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbb{L}$ (через $\mathbb{L}'$) двухэлементное полукольцо с тождеством $xy = x$ ($xy = y$). Заметим, что полугруппы с тождеством $xy = x$ ($xy = y$) суть полугруппы левых (правых) нулей.

Лемма 6. *В произвольной полурешетке $\langle S, +\rangle$ различные элементы a и b разделяются двухклассовой конгруэнцией, классы которой P и Q являются подполурешетками в S, причем класс P обладает свойством $P + S \subseteq P$.*

Доказательство. Зададим на S умножение следующим образом: $x \cdot y = x + y$ для любых $x, y \in S$ Нетрудно видеть, что алгебра $\langle S, +, \cdot\rangle$ является идемпотентным дубль-полукольцом. По теореме А существует простой идеал P, разделяющий элементы a и b. Через Q обозначим множество $S \setminus P$. По свойству (3) леммы 4 разбиение $\widetilde{P} = \{P, Q\}$ является конгруэнцией на дубль-полукольце S. В силу простоты идеала P, $u + v = uv \in Q$ для любых $u, v \in Q$. Поэтому Q является подполукольцом в дубль-полукольце S. Кроме того, $P + S = P \cdot S \subseteq P$.

Предложение 3. *Любое полукольцо с тождеством $xy = x$ ($xy = y$) является подпрямым произведением семейства полукольца $\mathbb{L}$ (соответственно, $\mathbb{L}'$).*

Доказательство. По лемме 5 полукольцо S изоморфно прямому произведению полукольца L с тождеством $xy = x$ и полукольца R с тождеством $xy = y$. Конгруэнция $\widetilde{P} = \{P, Q\}$ на полурешетке $\langle L, +\rangle$

будет конгруэнцией и на полукольце L. Для полукольца L имеем $L/\widetilde{P} \cong \mathbb{L}$. В силу леммы 6 полукольцо L является подпрямым произведением полуколец $\mathbb{L} \cong L/\widetilde{P}$. Аналогично, R будет подпрямым произведением полуколец $\mathbb{L}'$.

Следствие 5. *Многообразие полуколец с тождеством $xy = x$ ($xy = y$) порождается конгруэнц-простым полукольцом $\mathbb{L}$ (соответственно, $\mathbb{L}'$).*

Из леммы 5 и предложения 3 вытекает

Теорема 4. *Произвольное прямоугольное полукольцо S является подпрямым произведением конгруэнц-простых полуколец $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$.*

Следствие 6. *Многобразие прямоугольных полуколец порождается полукольцами $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$.*

Исправления к статье [2]. К сожалению, в предыдущей статье авторы допустили неточности, которые следует исправить. В примерах должно быть: в примере 2.1 полукольцо содержит 40 элементов, в 2.2 существует 15 полуколец, в 2.4 полукольцо имеет 9 элементов. В примере 3 указана ассоциативная система, не являющаяся полукольцом. В примере 4 полугруппа A, полукольца T и S конечны. Это следует из того, что любая конечнопорожденная идемпотентная полугруппа конечна [11, Corollary]. Поэтому теорема 7 должна формулироваться следующим образом: *свободное мультипликативно идемпотентное полукольцо с множеством X свободных образующих конечно тогда и только тогда, когда множество X конечно.*

Литература

1. **Биркгоф Г.** Теория решеток / Пер. с англ. *М.: Наука, 1984. 568 с.*

2. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Полукольца с идемпотентным умножением // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2011. № 14. С. 21-32.*

3. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Свойства мультипликативно идемпотентных полуколец // *Ученые записки Орловского государственного университета. Серия «Естественные, технические и медицинские науки». 2012. №6. Ч. 2. С. 60–68.*

4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток / Пер. с англ. *М.: Мир, 1982. 456 с.*

5. **Лукин М. А.** Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // *Проблемы современного математического образования в вузах и школах России: материалы V Всеросс. научно-практ. конф. Киров, 2012. С. 312–316.*

6. **Петров А. А.** Один класс мультипликативно идемпотентных полуколец // *Алгебра и комбинаторика: тезисы Междунар. конф., посв. 60-летию А. А. Махнева. Екатеринбург, 2013. С. 131–132.*

7. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец. *Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.*

8. **Ghosh S.** A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring // *Semigroup forum. 1999. V. 59. P. 106–120.*

9. **Guzman F.** The Variety of Boolean semirings // *Journal of Pure and Applied Algebra, 1992. V. 78. P. 253–270.*

10. **Kimura N.** The structure of idempotent semigroups // *Pasific J. Math., 1958. V. 8, №3. P. 257–275.*

11. **McLean D.** Idempotent semigroups // *Amer. Math. Monthly, 1954. V. 61, №2. P. 110–113.*

12. **Stone M.** Applications of the theory of Boolean rings to general topology // *Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41, №3. P. 375–481.*

Summary

Vechtomov E. M., Petrov A. A. Multiplicative idempotent semirings with identity $x + 2xyx = x$

In this paper we study the structural properties of multiplicatively idempotent semirings with identity $x + 2xyx = x$. This class of semirings contains Boolean rings, distributive lattices, rectangular semirings.

Keywords: semiring, distributive lattice, idempotency, congruence, prime ideal.

Вятский государственный гуманитарный университет

Поступила 03.06.2013