Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 519.27

КОМПЛЕКСНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ

А. Б. Певный, Н. О. Котелина

Доказывается комплексный аналог неравенства Сидельникова – Гётельса – Зайделя – Венкова. Устанавливаются условия, при которых неравенство обращается в равенство. Те системы векторов на комплексной сфере, на которых достигается равенство, названы нами комплексными сферическими полудизайнами.
Ключевые слова: комплексные сферические полудизайны, сфера, неравенство Сидельникова – Гётельса – Зайделя – Венкова.

1. Обозначения и основные неравенства

Пространство $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, состоит из векторов $X = (x_1, \ldots, x_n)$ с комплексными компонентами $x_1, \ldots, x_n$. Введём скалярное произведение и норму

$$\langle X, Y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n, \quad \|X\|^2 = \langle X, X\rangle = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Рассмотрим единичную сферу $\Omega(n) = \{X \in \mathbb{C}^n : \ \|X\| = 1\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ — произвольная система точек на сфере $\Omega(n)$. Тогда для любых целых k, $l \geqslant 0$, $k \neq l$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle X_i, X_j\rangle^k \langle X_j, X_i\rangle^l \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Если же $k = l$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |\langle X_i, X_j\rangle|^{2k} \geqslant \tilde{c}_k, \tag{1.2}$$

где

$$\tilde{c}_k = (C_{n+k-1}^k)^{-1} = \frac{k!}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}. \tag{1.3}$$

В процессе доказательства неравенств будут установлены условия, при которых неравенства обращаются в равенство.

Неравенство (1.1) доказано в [1]. Приведём более простое и явное доказательство. Неравенство (1.2) доказывается в [1] неаккуратно, в результате там получается неправильная константа $(C_{n+k-1}^{k-1})^{-1}$ вместо константы (1.3).

2. Доказательство неравенства (1.1)

Будем использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geqslant 0$. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Для вектора $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $Z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$. Пусть $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\langle Z, Y \rangle^k = (z_1 \bar{y}_1 + \cdots + z_n \bar{y}_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} Z^\alpha \bar{Y}^\alpha. \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$.

В левой части (1.1) выражения $\langle X_i, X_j \rangle^k$ и $\langle X_j, X_i \rangle^l$ разложим по формуле (2.4). Получим

$$\sum_{i,j=1}^m \langle X_i, X_j \rangle^k \langle X_j, X_i \rangle^l = \sum_{i,j=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} X_i^\alpha, \bar{X}_j^\alpha \sum_{|\beta|=l} \frac{l!}{\beta!} X_j^\beta \bar{X}_i^\beta =$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{|\beta|=l} \frac{l!}{\beta!} \left| \sum_{i=1}^m X_i^\alpha \bar{X}_i^\beta \right|^2 \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Неравенство (1.1) доказано.

Замечание. Нигде не использовано, что $X_i \in \Omega(n)$. Так что (2.4) справедливо для любых векторов $X_1, \ldots, X_m \in \mathbb{C}^n$. Равенство нулю очевидно имеет место, когда все выражения под знаком модуля в (2.5) равны нулю.

3. Доказательство неравенства (1.2)

Здесь мы будем использвать интегрирование по сфере $\Omega(n)$, используя некоторые факты из [2]. Через $d\omega(X)$ обозначим меру на $\Omega(n)$, инвариантную относительно вращений, $\omega(\Omega(n)) = 1$. (Эту меру можно представлять себе как единичную массу, равномерно размазанную по сфере $\Omega(n)$.) В [2, п. 1.4.8, 1.4.9] вычислен следующий интеграл

$$I(\alpha, \beta) := \int_{\Omega(n)} X^\alpha \bar{X}^\beta d\omega(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ \frac{(n-1)!\alpha!}{(n+|\alpha|-1)!} & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Для доказательства неравенства (1.2) зафиксируем k и рассмотрим сумму

$$S := \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{|\beta|=l} \frac{k!}{\beta!} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha \bar{X}_i^\beta - I(\alpha,\beta) \right|^2. \tag{3.6}$$

По формуле $|a-b|^2 = |a|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) + |b|^2$ раскроем квадрат модуля в (3.6). Получим $S = S_1 - 2\,\mathrm{Re}\,(S_2) + S_3$, где

$$S_1 = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha \bar{X}_i^\beta \right|^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha \bar{X}_i^\beta I(\alpha,\beta),$$

$$S_3 = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} I^2(\alpha,\beta).$$

Сумма S_1 является частным случаем суммы (2.5) при $l = k$. Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} |\langle X_i, X_j \rangle|^{2k},$$

т. е. S_1 именно то выражение, которое стоит в левой части (1.2).

Поскольку $I(\alpha,\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, то в S_2 надо оставить только слагаемые с $\alpha = \beta$:

$$S_2 = \frac{1}{m} \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{k!}{\alpha!}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha \bar{X}_i^\alpha \frac{(n-1)!\alpha!}{(n+k-1)!} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} X_i^\alpha \bar{X}_i^\alpha.$$

Последняя сумма равна 1, ибо $X_i \in \Omega(n)$. В результате получим, что $S_2 = \tilde{c}_k$.

Сумма S_3 вычисляется совсем просто:

$$S_3 = \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{k!}{\alpha!}\right)^2 \left[\frac{(n-1)!\alpha!}{(n+k-1)!}\right] = \sum_{|\alpha|=k} (\tilde{c}_k)^2.$$

Количество мультииндексов α таких, что $|\alpha| = k$, равно $C_{n+k-1}^k = (\tilde{c}_k)^{-1}$. Поэтому $S_3 = \tilde{c}_k$. В итоге получим

$$S = S_1 - 2\,\mathrm{Re}\,\tilde{c}_k + \tilde{c}_k = S_1 - \tilde{c}_k.$$

Поскольку $S \geqslant 0$, то $S_1 \geqslant \tilde{c}_k$ и неравенство (1.2) доказано.

3.1. Условия достижения равенства в неравенстве (1.2)

Очевидно, что неравенство (1.2) обращается в равенство только в случае, когда выражение (3.6) равно нулю. Вывод: неравенство (1.2) становится равенством тогда и только тогда, когда система $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega(n)} X^\alpha \bar{X}^\beta d\omega(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^\alpha \bar{X}_i^\beta \text{ при } |\alpha| = k,\ |\beta| = k,$$

т. е. для функций $f_{\alpha,\beta}(X) = X^\alpha \bar{X}^\beta$ среднее по сфере $\Omega(n)$ равно среднему по системе $\mathfrak{X}$. Такое же свойство будет выполняться для всевозможных линейных комбинаций $f_{\alpha,\beta}$. Введём линейное пространство $Hom(k,k)$, состоящее из обобщённых полиномов вида

$$f(X) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} d(\alpha,\beta) X^\alpha \bar{X}^\beta,$$

где $d(\alpha,\beta)$ — произвольные комплексные коэффициенты.

Неравенство (1.2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Omega(n)} f(X) d\omega(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(X_i) \quad \forall f \in Hom(k,k). \tag{3.7}$$

В вещественном случае системы точек $\mathfrak{X}$, обладающие аналогичным свойством, названы нами (см. [3]) сферическими полудизайнами. Введём определение для комплексного случая.

Определение 1. *Система точек $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ на сфере $\Omega(n)$ называется комплексным сферическим полудизайном порядка $2k$, если выполнено условие (3.7).*

Это определение позволяет сформулировать главное утверждение статьи в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть k — натуральное число. Для любой системы $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ на сфере $\Omega(n)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} |\langle X_i, X_j \rangle|^{2k} \geqslant \tilde{c}_k,$$

где константа $\tilde{c}_k$ определена в (1.3). Равенство достигается тогда и только тогда, когда система $\mathfrak{X}$ является комплексным сферическим полудизайном порядка $2k$.

Доказательству этой теоремы посвящён весь раздел 3.

Из теоремы следует удобный критерий комплексного сферического полудизайна.

СЛЕДСТВИЕ. *Система* $\mathfrak{X} = \{X_1, \dots, X_m\} \subset \Omega(n)$ *является комплексным сферическим полудизайном порядка* $2k$ *тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} |\langle X_i, X_j \rangle|^{2k} = \tilde{c}_k. \tag{3.8}$$

В этом критерии нужно проверить одно единственное равенство (3.8).

4. Вещественные сферические полудизайны

Теория вещественных полудизайнов разработана достаточно полно (см. [3]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим единичную сферу

$$S^{n-1} = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Определение 2. *Система точек* $\mathfrak{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ *на* S^{n-1} *называется сферическим полудизайном порядка* $2k$*, если выполнено равенство*

$$\int_{S^{n-1}} P(X) dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(X_i)$$

для любого однородного полинома $P(X)$ *степени* $2k$ *от* n *переменных.*

Основное экстремальное свойство полудизайнов содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой системы точек* $\mathfrak{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ *на сфере* S^{n-1} *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} \langle X_i, X_j \rangle^{2k} \geqslant c_k, \tag{4.9}$$

где

$$c_k = \frac{(2k-1)!!}{n(n+2)\dots(n+2k-2)}.$$

Равенство в (4.9) достигается на сферических полудизайнах порядка $2k$ *и только на них.*

Неравенство (4.9) разными способами устанавливалось в [4–6]. В [3] было введено понятие полудизайна, что позволило чётко сформулировать условия достижения равенства.

Всякий вещественный вектор может рассматриваться как частный случай комплексного. Возникает вопрос: будет ли вещественный полудизайн одновременно комплексным полудизайном? Ответ таков: при $k = 1$ будет, а при $k > 1$ – не будет. Это следует из соотношения констант $\tilde{c}_k$ и c_k:

$$\tilde{c}_1 = c_1 = \frac{1}{n},$$

$$\tilde{c}_k = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{s+1}{n+s} < c_k = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{2s+1}{n+2s}$$

при $k \geqslant 2,\ n \geqslant 2$.

5. Пример комплексного сферического полудизайна

5.1. Пример из книги Кокстера [7].

Построим полудизайн $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ на сфере $\Omega(3)$.

Обозначим $\omega = e^{2\pi i/3}$ — корень 3–ей степени из 1. Рассмотрим три множества векторов:

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \omega^\mu, -\omega^\nu) \middle| \mu, \nu \in 0:2 \right\},$$

$$\Phi_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-\omega^\mu, 0, \omega^\nu) \middle| \mu, \nu \in 0:2 \right\},$$

$$\Phi_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^\mu, -\omega^\nu, 0) \middle| \mu, \nu \in 0:2 \right\}.$$

Каждое из множеств содержит 9 векторов, а тогда $m = |\Phi| = 27$.

Множество Φ является несимметричным. Можно сказать больше: для любого $X \in \Phi$ вектор $-X$ не принадлежит Φ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система Φ является комплексным сферическим полудизайном 4–го порядка.*

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$S := \sum_{X,Y \in \Phi} |\langle X, Y \rangle|^4 = \tilde{c}_2 m^2 = \frac{1}{6} 27^2 = \frac{243}{2}.$$

Среди скалярных произведений много однотипных. Можно показать, что

$$S = 3 \sum_{X,Y \in \Phi_1} |\langle X, Y \rangle|^4 + 6 \sum_{\substack{X \in \Phi_1 \\ Y \in \Phi_2}} |\langle X, Y \rangle|^4 =$$

$$= 3 \sum_{\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2} \left| \frac{1}{2}\omega^{\mu_1-\mu_2} + \frac{1}{2}\omega^{\nu_1-\nu_2} \right|^4 + 6 \sum_{\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2} \left| -\frac{1}{2}\omega^{\nu_1-\nu_2} \right|^4, \qquad (5.10)$$

где $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ независимо принимают значения 0, 1, 2, так что в каждой сумме 81 слагаемое. Сразу видно, что вторая сумма в (5.10) равна $81/16$.

Для слагаемых в первой сумме в (5.10) могут быть только две возможности:

1) $\omega^{\mu_1-\mu_2} = \omega^{\nu_1-\nu_2}$ и тогда слагаемое равно 1. Этот случай будет, если $\mu_1 - \mu_2 \equiv \nu_1 - \nu_2 (\mathrm{mod}\ 3)$. Это условие выполняется для 27 четвёрок $(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$.

2) В противном случае $|\omega^{\mu_1-\mu_2} + \omega^{\nu_1-\nu_2}| = 1$ и слагаемое равно $1/2^4$. Например, $\omega^0 + \omega^1 = -\omega^2$.

Окончательно,

$$S = 3 \cdot \frac{54}{16} + 3 \cdot 27 + 6\frac{81}{16} = \frac{243}{2}.$$

Предложение доказано. □

Рассмотрим аналогичный пример при $n = 2$. На сфере $\Omega(2)$ рассмотри множество

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^\mu, \omega^\nu) \middle| \mu, \nu \in 0:2 \right\},$$

состоящее из 9 векторов ($m = 9$). Образует ли оно комплексный сферический полудизайн 4–го порядка? Нужно проверить равенство двух чисел

$$S_1 = \sum_{X,Y \in \Phi_1} |\langle X, Y \rangle|^4 \text{ и } \tilde{c}_2 m^2 = \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot 9^2 = 27.$$

Сумма вычисляется совершенно так же, как и выше: 27 слагаемых равны 1 и 54 слагаемых равны $1/2^4$. Поэтому $S_1 > 27$. Значит, Φ_1 не является полудизайном 4–го порядка.

5.2. Естественное вложение в $\mathbb{R}^{2n}$.

Всякому вектору $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ из $\mathbb{C}^n$, где $z_j = x_j + iy_j$, поставим в соответсвие вектор $\varphi(Z) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Нетрудно проверить, что $\langle \varphi(Z_1), \varphi(Z_2) \rangle = Re\, \langle Z_1, Z_2 \rangle$ для любых $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^n$.

Применим отображение φ к векторам комплексного полудизайна Φ из п. 5.1. Очевидно, что $\varphi(\Phi) \subset S^5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система $\varphi(\Phi)$ является сферическим полудизайном на сфере S^5.*

Доказательство. Вычислим сумму

$$S = \sum_{X,Y \in \Phi} \langle \varphi(X), \varphi(Y) \rangle^4 =$$
$$= 3 \sum_{X,Y \in \Phi_1} [Re\langle X, Y \rangle]^4 + 6 \sum_{X \in \Phi_1, Y \in \Phi_2} [Re\langle X, Y \rangle]^4 =$$
$$= 3 \sum_{\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2} \left[Re \left\{ \frac{1}{2}\omega^{\mu_1-\mu_2} + \frac{1}{2}\omega^{\nu_1-\nu_2} \right\} \right]^4 + 6 \sum_{\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2} \left[Re \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\nu_1-\nu_2} \right\} \right]^4,$$

где $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ независимо принимают значения 0, 1, 2.

Здесь 9 выражений $Re\{\omega^{\nu_1-\nu_2}\}$ принимают значение 1 (3 раза) и значение $-\frac{1}{2}$ (6 раз).

Выражение $Re\{\omega^{\mu_1-\mu_2} + \omega^{\nu_1-\nu_2}\}$ принимает значения 2 (9 раз), $\pm\frac{1}{2}$ (36 раз), -1 (36 раз).

В итоге получаем

$$S = \frac{3}{16} \left[2^4 \cdot 9 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 36 + (-1)^4 \cdot 36 \right] + \frac{6 \cdot 9}{16} \left[3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 6 \right] = \frac{27^2}{16}.$$

В тоже время $c_2 = \frac{3}{6 \cdot 8} = \frac{1}{16}$, $c_2 m^2 = \frac{27^2}{16}$. Значит, система $\varphi(\Phi)$ является сферическим полудизайном 4–го порядка. □

Напрашивается гипотеза: если Φ — комплексный полудизайн на сфере $\Omega(n)$ порядка $2k$, то $\varphi(\Phi)$ будет сферическим полудизайном на сфере S^{2n-1} также порядка $2k$.

Литература

1. **Roy A., Suda S.** Complex spherical designs and codes // *arXiv: 1104.4692v1 [math] 25 Apr 2011. 45 pp.*

2. **Рудин У.** Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

3. **Котелина Н. О., Певный А. Б.** Экстремальные свойства сферических полудизайнов // *Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. Вып. 5. С. 162–170.*

4. **Сидельников В. М.** Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n–мерном эвклидовом пространстве // *Матем. сб. 1974. Т. 95. № 1. С. 148–158.*

5. **Goethals J. M., Seidel J. J.** Spherical designs // *Proc. Symp. Pure Math. 1979. V. 34. P. 255–272.*

6. **Venkov B. B.** Réseaux et designs sphériques. Réseaux Euclidiens, Designs Sphériques et Formes Modulaires. Monogr. Enseign. Math., vol. 37. Genève, 2001, pp. 10–86.

7. **Coxeter H. S. M.** Regular complex polytopes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

Summary

Pevnyi A. B., Kotelina N. O. Complex spherical semidesigns

The autors establish a complex version of the inequality of Sidelnikov, Goethals–Seidel and Venkov. The equality occurs if and only if the system of vectors is a complex spherical semidesign.

Keywords: complex spherical semidesign, inequality of Sidelnikov, Goethals–Seidel and Venkov.

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 20.06.2013*