Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.17.2013

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЁННОЙ СТРИНГЕРАМИ ОБОЛОЧКИ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Е.И. Михайловский, А.Ю. Кораблев

В работе рассматривается задача об устойчивости продольно сжимаемой шарнирно опёртой цилиндрической оболочки, подкреплённой стрингерами и расположенной на границе двух разномодульных упругих сред. Решение задачи ищется с помощью комбинированного алгоритма перебора вариантов.
Ключевые слова: устойчивость, шарнирно-опёртая цилиндрическая оболочка, комбинированный алгоритм перебора вариантов.

1. Введение

В докторской диссертации [1] (форм. (25)) построена так называемая деформационная теория ребристых оболочек, главная особенность которой заключается в том, что в ней впервые наряду с реактивной силой учтён реактивный момент от ребра жёсткости. Названная теория подробно изложена в монографии [2]. В частности, уравнения статики конструктивно ортотропной цилиндрической оболочки, получаемые путём "размазывания" регулярной системы стрингеров имеют вид:

$$c_0\mathbf{L}u = -R^2 q + \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -C_t\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} \\ \dfrac{K_\nu}{R^2}\dfrac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + \dfrac{K_t}{R^2}\dfrac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - \dfrac{K_t}{R^2}\dfrac{\partial^3 u_2}{\partial\xi^2\partial\varphi} \\ \dfrac{K_n}{R^2}\dfrac{\partial^4 u_2}{\partial\xi^4} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Здесь первая часть уравнения представляет собой матричную запись уравнений статики цилиндрической оболочки в смещениях; K_ν, K_n –

жёсткости стрингера при изгибе соответственно в нормальной плоскости и из этой плоскости, K_t – жёсткость при кручении, C_t – жёсткость стрингера при ратяжении (сжатии); l – расстояние между соседними стрингерами по дуге поперечного сечения; $\xi = x/R$, $\varphi = y/R$.

Примем следующие допущения:

i) для расчёта оболочек без рёбер допустимо использовать упрощённую теорию Доннела-Власова ([3], табл. 13.2, форм. (13.18c));

ii) конструктивно ортотропная оболочка испытывает осесимметричную деформацию, т.е. $df/d\varphi = 0 \; \forall f$;

iii) стрингеры изгибаются в нормальной плоскости как гибкие стержни, т.е.:

$$C_t \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} = \frac{K_n}{R^2}\frac{d^4 u_2}{d\xi^4} = 0;$$

iv) на оболочку действует лишь нормальная нагрузка, т.е. $q_1 = q_2 = 0$.

Тогда уравнению (1.1) можно придать вид

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{R^2}{c_0}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_n \end{bmatrix}, \; c_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2()}{\partial\xi^2} & 0 & -\nu\dfrac{\partial()}{\partial\xi} \\ 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2()}{\partial\xi^2} & 0 \\ -\nu\dfrac{\partial()}{\partial\xi} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{33} = \left(\frac{1}{12}\frac{h^2}{R^2} + \frac{(1-\nu^2)J}{lhR^2}\right)\frac{\partial^4()}{\partial\xi^4} + I,$$

I – тождественный оператор, J – момент инерции поперечного сечения стержня, h – толщина неподкреплённой оболочки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала ребристой оболочки.

Для получения из системы (1.2) соответствующего уравнения относительно функции прогиба воспользуемся операторным методом [4].

"Детерминант" матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$det\mathbf{A} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{h^2}{12R^2} + \frac{(1-\nu^2)J}{lhR^2}\right)\frac{d^8()}{d\xi^8} + \frac{1-\nu}{2}(1-\nu^2)\frac{d^4()}{d\xi^4}$$

Заменяя в матрице **A** последний столбец правой частью уравнения (1.2) и вычисляя "детерминант" так составленной матрицы, получим

$$det\mathbf{A}_w = \frac{1-\nu}{2}\frac{R^2}{c_0}\frac{d^4 q_n}{d\xi^4}$$

Применяя теперь формально правило Крамера, можно записать

$$w = \frac{det\mathbf{A}_w}{det\mathbf{A}} \text{ или } (det\mathbf{A})w = det\mathbf{A}_w$$

Последнее равенство после элементарных преобразований представляет искомое уравнение в виде

$$\left(1 + \frac{EJ}{ld_o}\right)\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4b^4 w = \frac{R^4}{d_o}q_n, \tag{1.3}$$

где

$$4b^4 = 12(1-\nu^2)\tfrac{R^2}{h^2},\ d_o = \tfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Представим удельную нормальную нагрузку в виде суммы

$$q_n = q_n^{'} + q_n^{''} \tag{1.4}$$

В условиях наличия внутри и вне оболочки винклеровых сред различной жёсткости (c_1, c_2), можно записать [5]

$$q_n^{'} = -c_1 w_+ - c_2 w_- \tag{1.5}$$

Кроме этого при рассмотрении продольной устойчивости цилиндрической оболочки от действия сжимающих усилий T_o, следует положить [3]

$$q_n^{''} = -\frac{T_o}{R^2}\frac{d^2 w}{d\xi^2} \tag{1.6}$$

Подставив соотношения (1.4) в уравнение (1.3) и выполнив замену

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi R}{L}\xi = \frac{\pi R}{L}\frac{x}{R} = \frac{\pi x}{L} \in [0, \pi]$$

(L - длина оболочки)

и, сохранив за новой переменной $\tilde{\xi}$ прежнее обозначение ξ, окончательно получим

$$(1+\alpha)\frac{d^4w}{d\xi^4} + 4\beta^4 w + \lambda\frac{d^2w}{d\xi^2} + k_1 w_+ + k_2 w_- = 0 \tag{1.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\xi = \frac{\pi x}{L} \in [0,\pi],\ \alpha = \frac{EJ}{ld_o},\ \lambda = \frac{T_0 L^2}{\pi^2 d_o},\\ 4\beta^4 = \frac{12(1-\nu^2)L^4}{\pi^4 R^2 h^2},\ d_o = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\ k_i = \frac{c_i L^4}{\pi^4 d_o}\end{gathered} \tag{1.8}$$

где L - длина оболочки, T_o - сжимающие усилия. Обратим внимание, что от сжимающих усилий T_o зависит параметр λ.

2. Постановка задачи

Рассматриваем дифференциальное уравнение (1.7):

$$(1+\alpha)w^{IV} + 4\beta^4 w + k_1 w_+ + k_2 w_- = -\lambda w'' \tag{2.9}$$

и найдём такое λ, при котором имеет нетривиальное решение краевая задача с граничными условиями шарнирного опирания:

$$w(0) = w(\pi) = 0; w''(0) = w''(\pi) = 0$$

Проинтегрируем по частям функционал, образованный уравнением (2.9), умноженный на $w(\xi)$. Имеем

$$(1+\alpha)\int_0^\pi {w''}^2 d\xi + 4\beta^4\int_0^\pi w^2 d\xi + k_1\int_0^\pi {w_+}^2 d\xi + k_2\int_0^\pi {w_-}^2 d\xi = \lambda\int_0^\pi {w'}^2 d\xi \tag{2.10}$$

Заменим формулу (2.10) приближённой с использованием дискретного представления функции w, задаваемой её значениями на равномерной сетке, т.е. $w_i = w(x_i), i = 0..n$

Далее аппроксимируем производные конечно-разностными схемами:

$$w_i' = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}; w_i'' = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \tag{2.11}$$

Интегралы будем вычислять по квадратурной формуле трапеций

$$\int_0^\pi f(\xi)d\xi = \frac{\pi}{n}\left(\frac{f(\xi_0)}{2} + f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_{n-1}) + \frac{f(\xi_n)}{2}\right) \tag{2.12}$$

Значения срезок функции в узлах сетки представляем формулами

$$w_+(\xi_i) = b_i w_i, w_-(\xi_i) = (1 - b_i) w_i, b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w_i \leq 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Граничные условия шарнирного опирания аппроксимируем формулами

$$w_0 = w_n = 0, w_{-1} = -w_1, w_{n+1} = -w_{n-1} \tag{2.14}$$

После преобразования уравнение (2.9) примет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} = \lambda Q\tilde{w} \tag{2.15}$$

Матрицы A, Q - пятидиагональные:

$$A = \frac{1+\alpha}{h^3}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix};$$

$$Q = \frac{1}{4h}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = diag\left[k_1 b_i + k_2(1 - b_i) + 4\beta^4\right] h$$

Необходимое условие минимума функционала имеет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0$$

3. Комбинированный алгоритм

Для решения задачи будем использовать комбинированный алгоритм, который включает в себя применение на первой стадии алгоритма полного перебора вариантов (ППВ), а на последующих - локального перебора вариантов ЛПВ [6].

Для построения части собственного спектра уравнения применяется алгоритм ППВ форм изгиба, который заключается в следующем:

i) перебираются все 2^{m-1} возможных представления вектора формы

$$b = [b_1, b_2, ..., b_{m-1}]^T;$$

ii) для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения;

iii) запоминается собственная пара (число и форма) для которой форма изгиба согласуется с выбранным вектором формы.

В процессе применения алгоритма ППВ получаем качественно-адекватную форму, то есть собственную форму, имеющую устойчивый с ростом m вид графика.

После этого будем применять алгоритм ЛПВ, используя в качестве приближения полученную качественно-адекватную форму:

j) последовательно удваиваем число узлов сетки путём деления интервалов пополам;

jj) осуществляем перебор вариантов лишь вблизи корней последнего приближения к искомой собственной форме;

jjj) процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой точностью.

4. Численное решение

Применим комбинированный алгоритм "ППВ+ЛПВ" (ППВ при $n = 6$, ЛПВ при $n = 24$) при следующих значениях параметров: $k_1 = 16, k_2 = 18$. Значения параметра α будем изменять в пределах от 0 до 90.

Из таблицы 1 можно заметить, что при прочих равных параметрах если увеличивается $\alpha(\alpha = 0$ - оболочка не подкреплённая стрингерами), то оболочка укрепляется, т.к. увеличивается значение λ, а значит и значение первой критической силы.

Таблица 1

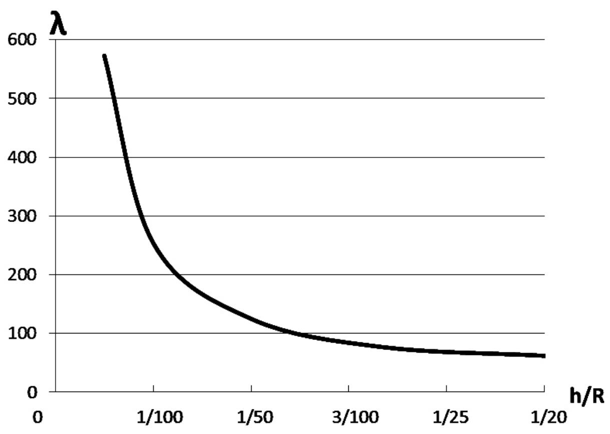
α	$4\beta^4$	λ
0	43.68	17.54060017038568
10	43.68	61.73360008456593
30	43.68	91.95393728433567
50	43.68	112.1229929869527
70	43.68	132.2920486895459
90	43.68	152.4611043921551

Таблица 2

α	h/R				
	1/200	1/100	1/50	1/30	1/20
10	573	254	125	77	62
30	885	433	208	150	93
50	1079	515	291	170	113
70	1274	598	373	190	133
90	1468	681	393	211	153

Зафиксируем значения L=200см и ν=0.3 и получим зависимость λ от h/R при различных α.

Построим соответствующий график при $\alpha = 10$.



Литература

1. **Михайловский Е.И.** Деформационная теория ребристых оболочек и её приложения: автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наукр. Спец. 01.02.04 - Мех. деф. тв. тела. Л.: Ленинградский гос. ун-т, 1989. 31с.

2. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

3. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1969. 984 с.

4. **Филин А.П.** Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.

5. **Михайловский Е.И.** Элементы конструктивно-нелинейной механики. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2011. 212 с.

6. **Михайловский Е.И., Тулубенская Е.В.** Алгоритм локального перебора вариантов в одной существенно нелинейной спектральной задаче // *ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 299-310.*

Summary

Mikhailovskii E.I., Korablev A.J. The longitudinal stability of a cylindrical cover supported by stringers in a multimodulus elastic surroundings

In the work the stability of a longitudinal compressed hinge-supported cylindrical cover stiffened by stringers and located on the border of two Winkler's ambiences is considered. The problem is solved using a combined exhaustive search algorithm.

Keywords: stability, hinge-supported cylindrical cover, combined exhaustive search algorithm.

Сыктывкарский университет *Поступила 09.06.2013*