Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 531.1

КОНТРАКЦИЯ ЛАГРАНЖИАНОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

И. В. Костяков, В. В. Куратов

Предложен метод получения лагранжиана с галилеевой симметрией из лагранжиана с вращательной симметрией.
Ключевые слова: контракции групп, механика.

1. Введение

Процедура контракции меняет группу симметрий физической системы. Самым известным примером контракции является нерелятивистский предел СТО при $c \to \infty$, меняющий группу Лоренца на группу Галилея. Изучение контракций групп внутренних симметрий некоторых калибровочных теорий а также стандартной модели [1–3], показывает их необычные свойства, в частности, безхигсово воспроизведение масс калибровочных бозонов.

Для прояснения алгебро-геометрического и физического смысла этих результатов, в данной работе рассматривается преобразование одной симметрии в другую на примерах двумерных механических систем.

Обычно, лагранжиан свободной частицы выбирают пропорциональным длине пути $L \sim \sqrt{\dot{x}_\mu^2}$ или в квадратичном виде $L \sim \dot{x}_\mu^2$. При этом учитывается только одно внутреннее свойство траектории — длина. Однако, возможны лагранжианы, где, кроме длины, используются и другие инварианты, например, кривизна и кручение [4, 5].

Для нас будут важны лагранжианы, обладающие вращательной симметрией и содержащие дополнительные слагаемые вида $x\dot{y} - \dot{x}y$.

Под контракцией обычно понимают сингулярное преобразование генераторов алгебры Ли, приводящее к изменению структурных констант и, как следствие, симметрии физической системы. Наша цель – изменить симметрию на языке лагранжианов.

Мы рассматриваем однопараметрическое семейство лагранжианов $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \varepsilon) = L_\varepsilon$, где $L_{\varepsilon=1} = L_1$– начальный лагранжиан, а параметр контракции $\varepsilon \in (0, \infty)$ введен специальным способом, обеспечивающим в пределе $\varepsilon \to 0$ переход от вращательной симметрии L_1 к галилеевой симметрии в новом лагранжиане $L_c = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon$. В качестве примеров рассмотрены контракции свободной релятивистской и нерелятивистской частиц, а также контракция, переводящая траекторию частицы от архимедовой спирали к параболе.

2. Лагранжиан

Пусть лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mS(r)\dot{\phi}^2}{2} + \frac{F(r)}{2}, \tag{1}$$

где r, ϕ – обычные полярные координаты

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \dot{\phi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{x^2 + y^2}.$$

При $S(r) = r^2$, а $F(r) = 0$ или $F(r) = -r^2$ имеем соответственно свободную двумерную частицу и осциллятор.

В декартовых координатах лагранжиан (1) выглядит следующим образом

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{S(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}(y\dot{x} - x\dot{y})^2 + \frac{F(x^2 + y^2)}{2}. \tag{3}$$

Если $S(r) \neq r^2$, то лагранжиан (3) кроме "длины" $dl^2 = dx^2 + dy^2$, содержит слагаемое, пропорциональное "площади" $A = \mid y\dot{x} - x\dot{y} \mid$.

Геометрически, рассмотрение лагранжианов вида (1), означает добавление внешних по отношению к траектории геометрических инвариантов, а именно, площади, построенной на векторах положения и скорости частицы, умноженную на произвольную функцию $S(r^2)$. Выражение для площади A обладает $SL(2)$ симметрией, однако множитель перед ней в формуле (3) понижает ее до $SO(2)$ симметрии двух первых слагаемых в (3) [2].

Уравнения движения для (1)

$$\begin{cases} m\ddot{r} = \dfrac{mS'(r)\dot{\phi}^2}{2} + \dfrac{F'(r)}{2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(mS(r)\dot{\phi}\Big) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

легко решаются.

Сохраняюшийся нетеровский ток $J = mS\dot{\phi} = \dfrac{mS}{x^2+y^2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ пропорционален площади и соответствует вращательной симметрии лагранжиана

$$r \to r, \qquad \phi \to \phi + \alpha$$

или в декартовых координатах

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Подставляя $\dot{\phi} = \dfrac{J}{mS(r)}$ в первое уравнение движения (4) имеем

$$m\ddot{r} = \frac{J^2 S'(r)}{2mS^2(r)} + \frac{F'(r)}{2}. \tag{5}$$

Для случая свободной частицы уравнения (4) есть

$$\begin{cases} m\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0, \\ \ddot{\phi} + \dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

с решениями в виде прямых

$$\begin{cases} r\cos\phi = at + b, \\ r\sin\phi = ct + d, \end{cases} \tag{7}$$

или, исключая t

$$r = \frac{A}{\cos(\phi - \phi_0)}.$$

Нетеровский ток есть обычный момент $J = m(\dot{x}y - \dot{y}x)$.

3. Контракция лагранжиана

Введем ε–деформированные полярные координаты

$$\begin{cases} r_\varepsilon = \sqrt{x^2+\varepsilon^2 y^2}, \qquad \phi_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{arctg}\left(\varepsilon\dfrac{y}{x}\right), \\ \dot\phi_\varepsilon = \dfrac{x\dot y - y\dot x}{x^2+\varepsilon^2 y^2}, \quad \dot r_\varepsilon^2 = \dot x^2 + \varepsilon^2 \dot y^2 - \varepsilon^2 \dfrac{(x\dot y - y\dot x)^2}{x^2+\varepsilon^2 y^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство ε–лагранжианов

$$L_\varepsilon = \frac{m\dot r_\varepsilon^2}{2} + \frac{mS(r_\varepsilon)\dot\phi_\varepsilon^{\,2}}{2} + F(r_\varepsilon^2), \tag{9}$$

или, переходя согласно (8), к декартовым координатам

$$L_\varepsilon = \frac{m\dot x^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 m\dot y^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{S(r_\varepsilon) - \varepsilon^2\left(x^2+\varepsilon^2 y^2\right)}{\left(x^2+\varepsilon^2 y^2\right)^2}\left(y\dot x - x\dot y\right)^2 + F(r_\varepsilon^2). \tag{10}$$

Далее мы будем изучать лагранжиан $L_c = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$, который и есть результат контракции первоначального лагранжиана L_1.

$$L_c = \frac{m\dot x^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{S(x)}{x^4}\left(y\dot x - x\dot y\right)^2 + F(x^2). \tag{11}$$

Удобно ввести контрактированные полярные координаты

$$r_c = x, \qquad \phi_c = \frac{y}{x}, \qquad \dot\phi_c = \frac{x\dot y - y\dot x}{x^2},$$

тогда контрактированный лагранжиан выглядит аналогично (1)

$$L_c = \frac{m\dot r_c^2}{2} + \frac{mS(r_c)\dot\phi_c^{\,2}}{2} + F(r_c^2). \tag{12}$$

Лагранжиан (12) инвариантен относительно преобразований

$$r_c \to r_c, \qquad \phi_c \to \phi_c + v,$$

которые в декартовых координатах становятся галилеевыми

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Галилеевы преобразования являются группой движений не только общеизвестной метрики

$$\mathrm{d}s = \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}r_c, & \mathrm{d}x \neq 0, \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x\phi_c) = x\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \mathrm{d}x = 0, \end{cases} \tag{13}$$

но и обобщенной метрики

$$\mathrm{d}s = \begin{cases} \mathrm{d}x, & \mathrm{d}x \neq 0, \\ \Psi(x)\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Лагранжиан (12), если не считать третьего слагаемого, имеет вид суммы двух инвариантов галилеевой геометрии.

$$\mathrm{d}s = \begin{cases} \mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t, & \mathrm{d}x \neq 0, \\ \Psi(x)\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\Psi(x)}{x^2}(\dot{y}x - y\dot{x})\mathrm{d}t, & \mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Существует другой вариант замены переменных (8)

$$\begin{cases} r_\varepsilon = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2 y^2}, & \phi_\varepsilon = \mathrm{arctg}\left(\varepsilon\dfrac{y}{x}\right), \\ \dot{\phi}_\varepsilon = \varepsilon\dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + \varepsilon^2 y^2}, & \dot{r}_\varepsilon^2 = \dot{x}^2 + \varepsilon^2\dot{y}^2 - \varepsilon^2\dfrac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{x^2 + \varepsilon^2 y^2} \end{cases} \tag{16}$$

который приводит просто к уменьшению степеней свободы системы

$$L = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2 \to L_\varepsilon = \frac{\dot{r}_\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}r_\varepsilon^2\dot{\phi}_\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \tag{17}$$

что соответствует вырождению метрики при $\varepsilon \to 0$

$$\mathrm{d}s = \begin{cases} \mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t, & \mathrm{d}x \neq 0, \\ \Psi(x)\mathrm{d}\left(\dfrac{\varepsilon y}{x}\right) = \varepsilon\dfrac{S(x)}{x^2}(\dot{y}x - y\dot{x})\mathrm{d}t, & \mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Якобианы замен переменных в случаях (8) и (16) выглядят соответственно

$$J = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2 y^2}} \begin{pmatrix} x & \varepsilon^2 y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2 y^2}} \begin{pmatrix} x & \varepsilon^2 y \\ -\varepsilon y & \varepsilon x \end{pmatrix}.$$

Второй якобиан при $\varepsilon \to 0$ становится вырожденным. Поэтому вариант (16) мы рассматривать не будем.

4. Контракция релятивистской частицы

Напомним основные уравнения механики свободной релятивистской частицы.

$$L = -mc\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2}. \tag{19}$$

$$p_t = -\frac{mc^2\dot{t}}{\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2}}, \qquad p_x = \frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2}}.$$

Уравнения движения

$$\dot{p}_t = 0, \qquad \dot{p}_x = 0. \tag{20}$$

Выбирая соответствующую калибровку ($\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2} = 1$), имеем

$$p_t = -mc^2\dot{t}, \qquad p_x = m\dot{x}. \tag{21}$$

Ток, соответствующий бусту пропорционален площади

$$J = m^2c^3\frac{\dot{x}t - \dot{t}x}{L}. \tag{22}$$

Уравнения движения

$$\ddot{t} = 0, \qquad \ddot{x} = 0, \tag{23}$$

с решениями

$$\begin{cases} x = a\tau + b, \\ t = c\tau + d. \end{cases} \tag{24}$$

Введем теперь параметр ε, не связывая его со скоростью света.

$$\begin{gathered} \rho = \sqrt{c^2t^2 - \varepsilon^2x^2}, \qquad \phi = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arcth}\left(\frac{\varepsilon x}{ct}\right), \\ \dot{\rho} = \frac{c^2t\dot{t} - \varepsilon^2x\dot{x}}{\sqrt{c^2t^2 - \varepsilon^2x^2}}, \qquad \dot{\phi} = c\frac{t\dot{x} - x\dot{t}}{c^2t^2 - \varepsilon^2x^2}, \\ \dot{\rho}^2 = c^2\dot{t}^2 - \varepsilon^2\dot{x}^2 + c^2\varepsilon^2\frac{(t\dot{x} - x\dot{t})^2}{c^2t^2 - \varepsilon^2x^2}. \end{gathered} \tag{25}$$

Записывая лагранжиан в полярных координатах и переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем

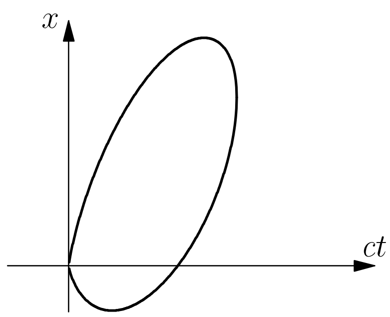
$$L_\varepsilon = -mc\sqrt{\dot{\rho}_\varepsilon^2 - \rho_\varepsilon^2\dot{\phi}_\varepsilon^2} \quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \quad L_c = -mc^2\sqrt{\dot{t}^2 - \frac{1}{c^2t^2}\left(\dot{x}t - \dot{t}x\right)^2}. \tag{26}$$

Мы получили галилеево-инвариантный лагранжиан, содержащий, тем не менее, скорость света. Ток, соответствующий галилееву бусту равен

$$J_c = m^2 c^3 \frac{\dot{x}t - \dot{t}x}{L_c}. \tag{27}$$

Решением для (26) является нелинейная ограниченная кривая

$$ct = \frac{A}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{ct} - \phi_0\right)}. \tag{28}$$



На рисунке изображена траектория $x = ct \cdot \operatorname{arcch}\left(\frac{1}{ct}\right) + ct$.

Чтобы получить привычный нерелятивистский предел, устремим скорость света в бесконечность.

$$L = -mc^2\dot{t} + \frac{m}{2}\left(\dot{x} - \frac{x}{t}\right)^2. \tag{29}$$

Выделяя полную производную в (29) получаем обычный лагранжиан нерелятивистской частицы

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2\dot{t}}. \tag{30}$$

5. Контракция нерелятивистской свободной частицы

Лагранжиан (10) при $L_{\varepsilon=1}$, $S(r) = r^2$, $F(r) = 0$, есть лагранжиан свободной нерелятивистской частицы. Схема контракций такова

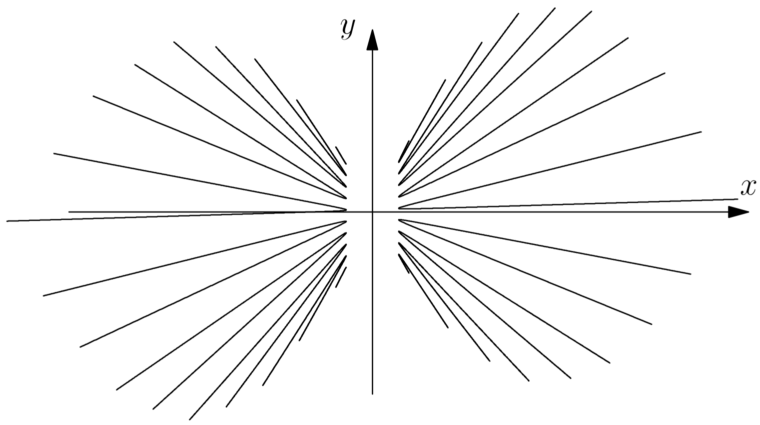
$$L_\varepsilon = \frac{\dot{r}_\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2} r_\varepsilon^2 \dot{\phi}_\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} L_c = \frac{\dot{r}_c^2}{2} + \frac{1}{2} r_c^2 \dot{\phi}_c^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)^2}{2x^2}. \tag{31}$$

Уравнения движения для координат x и $\dfrac{y}{x}$ совпадают с уравнениями для r и ϕ. Ток, соответствующий галилеевым преобразованиям совпадает с начальным

$$J_c = m\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right) = J. \tag{32}$$

Траектории имеют вид

$$x = \frac{c_2}{\cos\left(\dfrac{y}{x} - c_1\right)}. \tag{33}$$



На рисунке изображены траектории кривой $x \cdot \cos\left(\dfrac{y}{x} - 2\right) = 1$. Отметим размножение траекторий и появление непроницаемой, отражающей полосы вдоль оси y.

6. Архимедова спираль и ее контракции

Лагранжиан (10) при $L_{\varepsilon=1}$, $S(r) = R^2$, $F(r) = 0$, есть лагранжиан несвободной частицы с решениями в виде архимедовой спирали. Схема контракции

$$L_\varepsilon = \frac{m}{2}\left(\dot{r}_\varepsilon^2 + R^2\dot{\phi}_\varepsilon^2\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

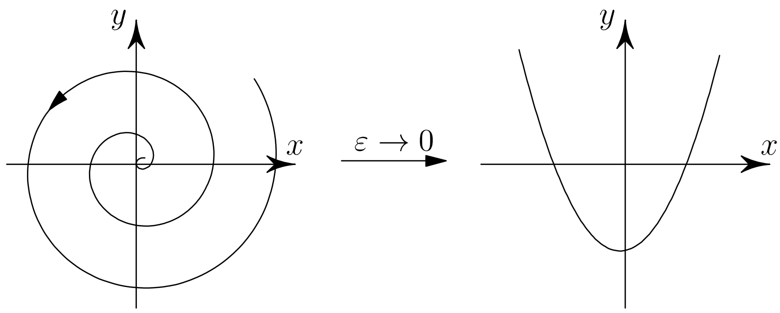
$$L_c = \frac{m}{2}\left(\dot{r}_c^2 + R^2\dot{\phi}_c^2\right) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mR^2\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)^2}{2x^4}. \tag{34}$$

переводит первоначальные уравнения движения $\ddot{r} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$ в контрактированные $\ddot{r}_c = 0$, $\ddot{\phi}_c = 0$, а архимедову спираль

$$\begin{cases} r = r_0 + vt, \\ \phi = \phi_0 + \omega t \end{cases} \tag{35}$$

в параболу

$$\begin{cases} r_c = x = x_0 + v_{0x} t, \\ \phi_c = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y_0}{x_0} + \dfrac{v_{0y} x_0 - v_{0x} y_0}{x_0^2} t. \end{cases} \tag{36}$$



Соответствующие токи для спирали и параболы имеют вид

$$J = \frac{mR^2}{x^2 + y^2} \left(y\dot{x} - y\dot{x} \right), \qquad J = \frac{mR^2}{x^2} \left(y\dot{x} - y\dot{x} \right). \tag{37}$$

7. Выводы

Разработан метод получения лагранжианов, описывающих механические системы с галилеевой симметрией. Заметим, что лагранжиан (12) можно получить из (1) заменой переменной, и, разумеется, это будут одинаковые системы, но в разных координатах. Мы, однако, получили (12) предельным переходом в старых координатах, поэтому лагранжианы (1) и (12) описывают разные системы, связанные процедурой контракции. Контракция релятивистской частицы приводит к нелинейной траектории движения, а контракция нерелятивистской, кроме нелинейности, приводит к размножению начальной траектории на бесконечное число ветвей, параметризуемых целым числом. Таким образом контракция приводит к "квантованию"траекторий. Существование систем с такими свойствами нам неизвестны, но галилеева симметрия встречается при описании эффекта Холла [6], а квантование траекторий может ассоциироваться с уровнями Ландау.

Литература

1. **Костяков И. В., Куратов В. В.** Калибровочные симметрии Кэли-Клейна // *Известия Коми научного центра УрО РАН. Вып. 1(9). С. 4-10.*

2. **Костяков И. В., Куратов В. В.** Предельные переходы в калибровочных теориях // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика. Вып. 11. С. 140-149.*

3. **Костяков И. В., Куратов В. В.** Массивные поля Янга-Миллса, трансляционные и неполупростые калибровочные симметрии // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика. Вып. 10. С. 57-70.*

4. **Nesterenko V. V.** On model of relativistic particle with curvature and torsion // *J.Mat.Phys. V.34, 1993. Pp. 5589-5595.*

5. **Kuznetsov Yu. A., Plyushchay M. S.** (2+1)dimensional models of relativistic particles with curvature and torsion // *J.Math.Phys. V.35, 1994. Pp. 2772-2784.*

6. **Дюваль К., Хорвати П. А.** Некоммутативные координаты, экзотические частицы и аномальные анионы в эффекте Холла. // *ТМФ, 2005, т. 144, №1, с. 26–34.*

Summary

Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Contraction of Lagrangian in classical mechanics

A method of obtaining the Lagrangian with Galilean symmetry from the Lagrangian with rotational symmetry is proposed.

Keywords: contraction of Lagrangian, mechanic.

Отдел математики КНЦ УРО РАН *Поступила 26.06.2013*