Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.17.2013

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В СРЕДЕ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЖЕСТКОСТЬЮ (РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ)

В. Л. Никитенков, П. И. Коюшев

В [1],[2] рассмотрены задачи определения поведения критических нагрузок и границ их изменения в зависимости от жесткости объемлющей стержень среды, имеющей постоянное значение по всей длине стержня В данной работе жесткость среды, в которую помещен стержень, изменяется по его длине линейно. Получены значения критических нагрузок и формы потери устойчивости (упругие линии) стержня для различных граничных условий при изменении коэффициента роста жесткости среды.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, критическая нагрузка,жесткость среды, упругая линия.

Рассмотрим стержень, концы которого определенным образом закреплены (или свободны), помещен в среду, жесткость которой $K(x)$ (см. Рис. 1) линейно изменяется по длине стержня

$$K(x) = k^2x + b \tag{1}$$

На верхний конец стежня действует вертикальная сжимающая сила, характеризующаяся параметром λ.

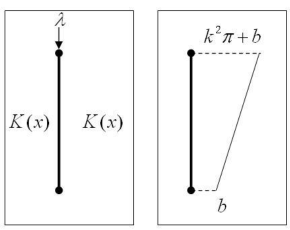

Рис. 1

Запишем уравнение продольного изгиба стержня

$$w^{IV} + 2\lambda w'' + (k^2 x + b)w = 0 \tag{2}$$

Заметим, что при $k = 0$ жесткость среды постоянна. Мы будем искать решение (2) в виде следующего степенного ряда:

$$w\,(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots (2)$$

Последовательное дифференцирование этого ряда дает:

$$w'(x) = c_1 + 2c_2 x + ... + nc_n x^{(n-1)} + (n+1)c_{(n+1)} x^n$$
$$w''\,(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + \ldots + n\,(n+1)\,c_{n+1} x^{n-1} + (n+1)\,(n+2)\,c_{n+2} x^n$$
$$w'''\,(x) = 2\cdot 3c_3 + \ldots + (n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,c_{n+3} x^n$$
$$w^{IV}\,(x) = 2\cdot3\cdot4c_4 + 2\cdot3\cdot4\cdot5c_5 x + \ldots + (n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,c_{n+4} x^n$$

Подставляя нужные нам производные в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при степенях x к нулю, получим:

$$x^0 : \qquad bc_0 + 1\cdot 2\cdot (2\lambda)c_2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c_4 = 0$$
$$x^1 : k^2 c_0 + bc_1 + 2\cdot 3\cdot (2\lambda)c_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5c_5 = 0$$
$$x^2 : k^2 c_1 + bc_2 + 3\cdot 4\cdot (2\lambda)c_4 + 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6c_6 = 0$$
$$x^3 : k^2 c_2 + bc_3 + 4\cdot 5\cdot (2\lambda)c_5 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7c_7 = 0$$
$$x^4 : k^2 c_3 + bc_4 + 5\cdot 6\cdot (2\lambda)c_6 + 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8c_8 = 0$$

....

$$x^n : k^2 c_{n-1} + bc_n + (n+1)(n+2)(2\lambda)c_{n+2} +$$
$$+ (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)c_{n+4} = 0$$

Далее, рассмотрим 4 случая:

Случай 1.

$$c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c_4 = -bc_0$$
$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5c_5 = -k^2 c_0$$
$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6c_6 = -3\cdot 4\cdot (2\lambda)c_4$$
$$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7c_7 = -4\cdot 5\cdot (2\lambda)c_5$$
$$5\cdot 6\cdot 7\cdot 8c_8 = -5\cdot 6\cdot (2\lambda)c_6 - bc_4$$
$$6\cdot 7\cdot 8\cdot 9c_9 = -6\cdot 7\cdot (2\lambda)c_7 - bc_5 - k^2 c_4$$

....

$$(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,c_{n+4} = -\,(n+1)\,(n+2)\,(2\lambda)c_{n+2} -$$
$$-bc_n - k^2 c_{n-1} (n \geqslant 5)$$

Случай 2.

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$$

$c_4 = 0$
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5c_5 = -b$
$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6c_6 = -k^2$
$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7c_7 = -4 \cdot 5 \cdot (2\lambda)c_5$
$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8c_8 = -5 \cdot 6 \cdot (2\lambda)c_6$
$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9c_9 = -6 \cdot 7 \cdot (2\lambda)c_7 - bc_5$
$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10c_{10} = -7 \cdot 8 \cdot (2\lambda)c_8 - bc_6 - k^2c_5$
……………………………………………………
$c\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,c_{n+4} = -\,(n+1)\,(n+2)\,(2\lambda)c_{n+2}-$
$-bc_n - k^2c_{n-1}(n \geqslant 6)$

Случай 3.

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 = -2 \cdot (2\lambda)c_2$
$c_5 = 0$
$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6c_6 = -3 \cdot 4 \cdot (2\lambda)c_4 - bc_2$
$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7c_7 = -k^2$
$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8c_8 = -5 \cdot 6 \cdot (2\lambda)c_6 - bc_4$
$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9c_9 = -6 \cdot 7 \cdot (2\lambda)c_7 - k^2c_4$
$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10c_{10} = -7 \cdot 8 \cdot (2\lambda)c_8 - bc_6$
$8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11c_{11} = -8 \cdot 9 \cdot (2\lambda)c_9 - bc_7 - k^2c_6$
……………………………………………………
$(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,c_{n+4} = -\,(n+1)\,(n+2)\,(2\lambda)c_{n+2}-$
$-bc_n - k^2c_{n-1}\,(n \geqslant 7)$

Случай 4.

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$$

$c_4 = 0$
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 c_5 = -2 \cdot 3 \cdot (2\lambda)$
$c_6 = 0$
$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 c_7 = -4 \cdot 5 \cdot (2\lambda) c_5 - b$
$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 c_8 = -k^2$
$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 c_9 = -6 \cdot 7 \cdot (2\lambda) c_7 - b c_5$
$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 c_{10} = -7 \cdot 8 \cdot (2\lambda) c_8 - k^2 c_5$
$8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 c_{11} = -8 \cdot 9 \cdot (2\lambda) c_9 - b c_7$
$9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 c_{12} = -9 \cdot 10 \cdot (2\lambda) c_{10} - b c_8 - k^2 c_7$
....
$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\, c_{n+4} = -(n+1)(n+2)(2\lambda) c_{n+2} -$
$- b c_n - k^2 c_{n-1} \, (n \geqslant 8)$

Получаем ФСР:

$\varphi_0(\lambda, x) = 1 + c_4^0 x^4 + \ldots + c_n^0 x^n + \ldots$
$\varphi_1(\lambda, x) = x + c_5^1 x^5 + \ldots + c_n^1 x^n + \ldots$
$\varphi_2(\lambda, x) = x^2 + c_4^2 x^4 + \ldots + c_n^2 x^n + \ldots$
$\varphi_3(\lambda, x) = x^3 + c_5^3 x^5 + \ldots + c_n^3 x^n + \ldots$

Выпишем общее решение:

$$w(x) = C_0 \varphi_0(x) + C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + C_3 \varphi_3(x)$$

Рассмотрим теперь формы упругой линии стержня при различных условиях закрепления его концов.

а) *Граничные условия шарнирного опирания*

Из условий шарнирного опирания при $x = 0$ следует, что $C_0 = 0, \quad C_2 = 0$. Условия $w(\pi) = 0, \quad w''(\pi) = 0$ приводят к системе:

$$\begin{cases} C_1 \varphi_1(\pi) + C_3 \varphi_3(\pi) = 0 \\ C_1 \varphi_1''(\pi) + C_3 \varphi_3''(\pi) = 0 \end{cases}, \qquad (3)$$

которая имеет нетривиальное решение при равенстве нулю определителя

$$\varphi_1(\pi) \cdot \varphi_3''(\pi) - \varphi_1''(\pi) \cdot \varphi_3(\pi) = 0. \qquad (4)$$

Решая уравнение (4) при заданном k^2, находим его минимальный корень λ_0.

Из первого уравнения (3) получим

$$C_3 = -\frac{\varphi_1(\pi)}{\varphi_3(\pi)} C_1.$$

Окончательно , имеем форму упругой линии

$$w(x) = C_1 \left[\varphi_1(x) - \frac{\varphi_1(\pi)}{\varphi_3(\pi)} \varphi_3(x) \right].$$

На Рис. 2 показаны сравнительные результаты вида упругих линий для среды с постоянной жесткостью и линейно изменяющейся по длине стержня.

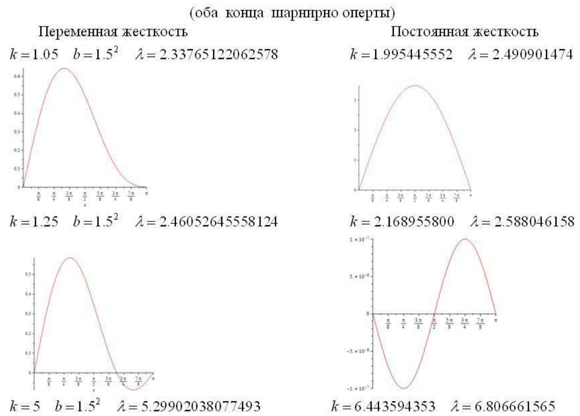

Рис. 2

Симметричность форм упругой линии для постоянной жесткости нарушается при ее линейной изменяемости вдоль стержня (прогиб уменьшается при увеличении жесткости среды).

б) *Жесткая заделка.*

Другой вариант симметричных граничных условий - жесткая заделка обоих концов стержня. Упругая линия в этом случае выражается через фундаментальные функции $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ ($C_0 = C_1 = 0$). Граничные условия при $x = \pi$ приводят к уравнению для определения λ_0:

$$\varphi_2(\pi) \cdot \varphi_3'(\pi) - \varphi_2'(\pi) \cdot \varphi_3(\pi) = 0$$

Уравнение упругой линии записывается в виде:

$$w(x) = C_2 \left[\varphi_2(x) - \frac{\varphi_2(\pi)}{\varphi_3(\pi)} \varphi_3(x) \right].$$

Формы упругой линии представлены на Рис. 3.

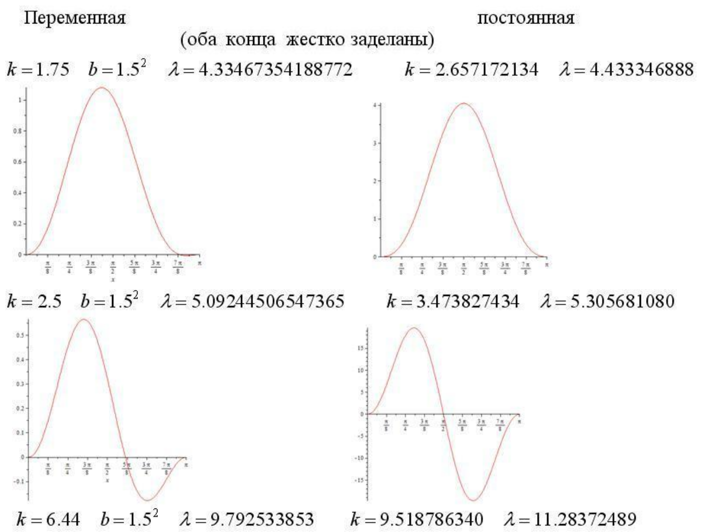

Рис. 3

в) Смешанные граничные условия (шарнир - жесткая заделка, жесткий и свободный край)

В случае граничных условий "шарнир - жесткая заделка"

$$\begin{cases} w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \\ w(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0; \end{cases}$$

параметр критической нагрузки λ_0 определяется из уравнения:

$$\varphi_1(\pi) \cdot \varphi_3'(\pi) - \varphi_1'(\pi) \cdot \varphi_3(\pi) = 0.$$

Форма упругой линии в этом случае определяется соотношением соответствующим условиям шарнирного опирания.

Результаты приведены на Рис. 4.

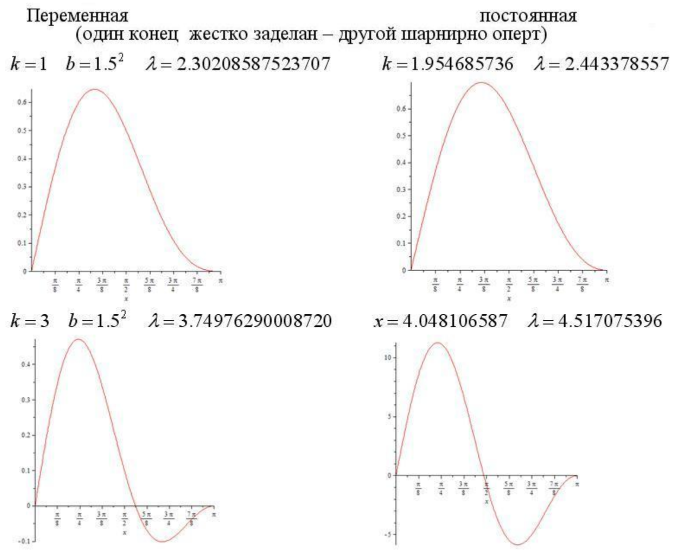

Рис. 4

Жесткая заделка при $x=0$ дает $C_0=C_1=0$. Граничные условия свободного края на другом конце стержня

$$\begin{cases} C_2\varphi_2''(\pi)+C_3\varphi_3''(\pi)=0, \\ C_2\left[\varphi_2'''+2\lambda\varphi_2'\right]+C_3\left[\varphi_3'''+2\lambda\varphi_3'\right]=0 \end{cases},$$

Приводят к соотношению

$$C_3=-C_2\frac{\varphi_2''(\pi)}{\varphi_3'',(\pi)}$$

к уравнению для определения критической нагрузки

$$\varphi_2''(\pi)\left[\varphi_3'''+2\lambda\varphi_3'\right]+\varphi_3''(\pi)\left[\varphi_2'''+2\lambda\varphi_2'\right]=0,$$

и к виду упругой линии

$$w(x) = C_2 \left[\varphi_2(x) - \frac{\varphi_2''(\pi)}{\varphi_3''(\pi)} \varphi_3(x) \right].$$

Результаты приведены на Рис. 5.

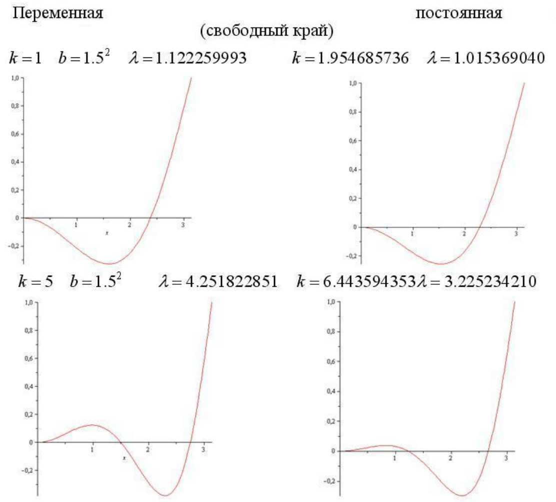

Рис. 5

Литература

1. **Никитенков В. Л., Жидкова О. А., Шехурдина Е. С.** Границы нахождения критической силы для разномодульной среды// *Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 2012. - Вып. 15. - С. 127 - 136.*

2. **Никитенков В. Л., Холопов А. А.** Устойчивость гибкого стержня в упругой среде// *Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 2012. - Вып. 16. - С. 60 - 79.*

3. **Михайловский Е. И.** Элементы конструктивно-нелинейной механики/ Е.И. Михайловский. - Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2011. - 212 с.

4. **Холопов А. А.** Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой упругой сред // *Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 1995. - Вып. 1. - С. 217 - 233.*