

УДК 539.3

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ
ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ**

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Аналитически решена задача устойчивости продольно сжатого стержня при односторонних ограничениях на перемещения в упругой среде при различных граничных условиях. Результаты, полученные аналитическим путем, проверены численным методом и полностью согласуются.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, критические силы, граничные условия, односторонние ограничения, собственные числа.

1. Постановка задачи

Пусть стержень длины ℓ , находящегося в упругой среде с жесткостью c , нагружен продольной силой P . Обозначим через D - жесткость стержня при изгибе. Расчет на устойчивость стержня сводится к нахождению минимальной силы P , при которой вариационная задача [1]

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (Dw''^2 - Pw'^2 + Cw^2) dx \rightarrow \min_{w \in H} \quad (1)$$

имеет нетривиальное решение. В данной работе предполагается, что прогиб стержня $w(x)$, $x \in [0, \ell]$, с одного края может быть ограничен жестким препятствием так, что

$$w(x) \geq 0, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2)$$

Ясно, что нетривиальное решение функционала (1) при ограничениях (2) можно нормировать, потребовав выполнения ограничения

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell w'^2 dx = 1. \quad (3)$$

Тогда задача (1) – (2) может быть записана в виде минимизации функционала

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (Dw''^2 + Cw^2) dx \rightarrow \min. \quad (4)$$

при выполнении условий (2) и (3).

Экстремальная задача рассматривается в пространстве $H = W_2^2[0, \ell]$ – пространство функций Л.С. Соболева, имеющих обобщенные суммируемые с квадратом первую и вторую производные (первая производная абсолютно непрерывна) и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

Решение задачи минимизации функционала (4) при ограничениях (2) и (3) существует [2], ибо множество функций $w \in H$, удовлетворяющих условию (2) и (3) является слабым компактом, а функционал $\tilde{J}(w)$ является выпуклым.

Если $w(x) > 0$, для всех $x \in [\ell_1, \ell_2]$, где $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq \ell$ и $w(\ell_1) = w(\ell_2) = 0$, то $w(x)$ является решением уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (1)

$$w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0, \quad (5)$$

где $\omega = C/D$, $\rho^2 = \lambda/D$, λ – множитель Лагранжа для ограничений изопериметрического типа (2).

В этом случае уравнение (5) будет совпадать с уравнением равновесия сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде. Заметим, что уравнение (5) совпадает с уравнением равновесия цилиндрической оболочки сжимаемой продольной силой в осесимметричном случае.

В данной работе рассмотрено три вида граничных условий:

- граничные условия жесткой заделки:

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0. \quad (6)$$

- граничные условия шарнирного опирания:

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w''(0) = w''(\ell) = 0. \quad (7)$$

- граничные условия жесткой заделки при $x = 0$ и граничными условиями свободного края при $x = \ell$.

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad w'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0. \quad (8)$$

Предположим вначале, выполнены граничные условия типа (6) или (7). Допустим, что $w(x) = 0$ на некотором множестве точек интервала $[0, \ell]$. Тогда, очевидно, что в этих точках $w'(x) = 0$. Предположим, что $w(x) > 0$, для всех $x \in (\ell_1, \ell_2)$; $w'(\ell_1) = w'(\ell_2) = 0$ и $w(x) \neq 0$ вне этого интервала.

Определим функции

$$w_1(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если } x \in [\ell_1, \ell_2], \\ 0, & \text{если } x \notin [\ell_1, \ell_2]. \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если } x \notin [\ell_1, \ell_2], \\ 0, & \text{если } x \in [\ell_1, \ell_2]. \end{cases}$$

Ясно, что $w_1(x), w_2(x) \in H$.

Пусть $a = J(w_1)$, $b = J(w_2)$, $\gamma^2 = J_1(w_1)$, $\beta^2 = J_1(w_2)$. Из определения функций w_1 и w_2 следует равенство

$$\gamma^2 + \beta^2 = 1.$$

Введем обозначения

$$\tilde{w}_1 = \gamma^{-1}w_1, \quad \tilde{w}_2 = \beta^{-1}w_2.$$

Если $\gamma^{-2}a \leq \beta^{-2}b$, то $a(1 - \gamma^2) \leq \gamma^2b$, откуда следует неравенство

$$\gamma^{-2}a = J(\tilde{w}_1) \leq a + b = J(w),$$

если же $\gamma^{-2}a \geq \beta^{-2}b$, то

$$J(\tilde{w}_2) \leq J(w).$$

Таким образом, решение задачи (2) – (1) можно искать среди функций, строго положительных на некотором интервале (ℓ_1, ℓ_2) , $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq \ell$ и тождественно равных нулю вне этого интервала.

Если $w(x) > 0$ для любого $x \in (0, \ell_2)$, то ℓ_2 либо совпадает с ℓ , либо находится из решения задачи

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} (w''^2 + \omega w^2) dx \rightarrow \min_{w, \ell_2} \quad (9)$$

при ограничении

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} w'^2 dx = 1. \quad (10)$$

Далее нам потребуется общая формула для вариации функционала. Пусть

$$J(w) = \int_{x_0}^{x_1} F(w'', w', w, x) dx, \quad (11)$$

δw -вариация траектории. Считаем, что может варьироваться не только функция, но и интервал интегрирования.

$$\delta J(w) = \int_{x_0}^{x_1} (F_{w''} \delta w'' + F_{w'} \delta w' + F_w \delta w) dx + F|_{x_0}^{x_1}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \delta J(w) = & \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{w''} - \frac{d}{dx} F_{w'} + F_w \right) \delta w dx + F \delta x|_{x_0}^{x_1} + \\ & + F_{w''} (\delta w')|_{x_0}^{x_1} + \left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) (\delta w)|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\delta w'|_{x_0}^{x_1} = (\delta w')|_{x_0}^{x_1} + w'' \delta x|_{x_0}^{x_1}, \quad \delta w|_{x_0}^{x_1} = (\delta w)|_{x_0}^{x_1} + w' \delta x|_{x_0}^{x_1},$$

то окончательно получаем

$$\begin{aligned} \delta J(w) = & \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{w''} - \frac{d}{dx} F_{w'} + F_w \right) \delta w dx + \\ & + \left(F - w'' F_{w''} + w' \frac{d}{dx} F_{w''} - w' F_{w'} \right) \delta x|_{x_0}^{x_1} + F_{w''} \delta w'|_{x_0}^{x_1} + \left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) \delta w|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия минимума по ℓ_2 в задаче (9) – (10) и с учетом того, что $w(\ell_2) = 0$, $w'(\ell_2) = 0$, т.е. $\delta w = \delta w' = 0$ при $x = \ell_2$ из (9) получаем еще одно граничное условие:

$$F - w'' F_{w''} = 0,$$

т.е. $w''(\ell_2) = 0$ при $x = \ell_2$.

Таким образом, функция $w(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = w(\ell_2) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell_2) = 0, \quad w''(\ell_2) = 0. \quad (13)$$

Если $w(x) > 0$ для $\forall x \in (\ell_1, \ell_2)$ при $0 < \ell_1 < \ell_2 < l$, а вне этого интервала $w(x) \equiv 0$, то она должна удовлетворять граничным условиям

$$w(\ell_1) = w(\ell_2) = 0, \quad w'(\ell_1) = w'(\ell_2) = 0, \quad w''(\ell_1) = w''(\ell_2) = 0.$$

Таким образом, показано, что во всех случаях решение задачи (1) – (2) имеет непрерывную вторую производную.

Нетрудно увидеть, что для существования нетривиального решения уравнения (5) при граничных условиях (6) или (7) необходимо выполнение неравенства

$$\rho^2 \geq 2\sqrt{\omega}.$$

В самом деле, пусть $\rho^2 < 2\sqrt{\omega}$ и функция $w(x) \not\equiv 0$ удовлетворяет уравнению (5). Тогда

$$J_0 = \int_0^\ell (w''^2 - \rho^2 w'^2 + \omega w^2) dx = 0. \quad (14)$$

С другой стороны, представляя функцию $w(x)$ рядом Фурье ($w(0) = w(\ell) = 0$),

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

и подставляя в (14), получим

$$\begin{aligned} J_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 - \rho^2 \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \omega \right] > \\ &> \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 - 2\sqrt{\omega} \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \omega \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \sqrt{\omega} \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$w(x) = c_1 \sin(m_1 x) + c_2 \sin(m_2 x) + c_3 \cos(m_1 x) + c_4 \cos(m_2 x), \quad (15)$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} + \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}}. \quad (16)$$

2. Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями жесткой заделки

Подставляя (15) в граничные условия (6), получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и ℓ_2

$$\begin{cases} c_3 + c_4 = 0, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \\ c_1 \sin y + c_2 \sin z + c_3 \cos y + c_4 \cos z = 0, \\ c_1 m_1 \cos y + c_2 m_2 \cos z - c_3 m_1 \sin y - c_4 m_2 \sin z = 0, \\ c_1 m_1^2 \sin y + c_2 m_2^2 \sin z + c_3 m_1^2 \cos y + c_4 m_2^2 \cos z = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $y = m_1 \ell_2$, $z = m_2 \ell_2$.

Рассматривая первые четыре уравнения относительно c_1, c_2, c_3, c_4 и приравнявая определитель матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ \sin y & \sin z & \cos y & \cos z \\ m_1 \cos y & m_2 \cos z & -m_1 \sin y & -m_2 \sin z \end{pmatrix}$$

к нулю, получаем уравнение

$$2zy(1 - \cos z \cdot \cos y) - (z^2 + y^2) \sin z \cdot \sin y = 0. \quad (18)$$

Если же рассмотреть первое, второе, третье и пятое уравнение системы (17) и приравнять определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ \sin y & \sin z & \cos y & \cos z \\ m_1^2 \cos y & m_2^2 \cos z & m_1^2 \sin y & m_2^2 \sin z \end{pmatrix}$$

к нулю, то уравнение будет иметь вид

$$z \cos z \cdot \sin y - y \sin z \cdot \cos y = 0. \quad (19)$$

Решения уравнений (18), (19) должны удовлетворять условию $y > z > 0$. Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} 2(1 - \cos z \cdot \cos y) - (zy^{-1} + z^{-1}y) \sin z \cdot \sin y = 0, \\ zy^{-1} = \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{tg} z. \end{cases} \quad (20)$$

Подставляя второе уравнение последней системы в первое, приходим к уравнению

$$2 \cos z \cdot \cos y - 2 \cos^2 z \cdot \cos^2 y - \sin^2 z \cdot \cos^2 y - \cos^2 z \cdot \sin^2 y = 0,$$

откуда после очевидных преобразований получаем $\cos z = \cos y$.

Из последнего равенства следует, что $z = y + 2\pi k$ или $z = -y + 2\pi k$, поэтому, либо $\sin z = \sin y$ либо $\sin z = -\sin y$.

Таким образом, все решения системы (18) – (19) будут иметь вид

$$\begin{cases} y = 0, \\ z \in R. \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ y \in R. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -z, \\ y, z \in R. \end{cases} \quad \begin{cases} y = z, \\ y, z \in R. \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y = 2\pi i, \\ z = 2\pi j, \\ i, j \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pi + 2\pi i, \\ z = \pi + 2\pi j, \\ i, j \in Z. \end{cases} \quad (22)$$

Всем условиям задачи могут удовлетворять решения вида

$$\begin{cases} y = m_1 \ell_2 = \pi(1 + 2i), \\ z = m_2 \ell_2 = \pi(1 + 2j), \\ i > j. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = m_1 \ell_2 = 2\pi i, \\ z = m_2 \ell_2 = 2\pi j, \\ i > j. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя y и z в систему (17), получаем

$$c_3 = c_4 = 0, \quad c_2 = -m_1 m_2^{-1}.$$

Положим $\alpha = m_1 m_2^{-1}$, тогда из (23) следует, что

$$\alpha = \frac{1 + 2i}{1 + 2j}, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{i}{j}. \quad (24)$$

Выражение для прогиба примет вид

$$w(x) = c_1 (\sin(\alpha m_2 x) - \alpha \sin(m_2 x)). \quad (25)$$

Так как $m_1^2 + m_2^2 = \rho^2$, то $m_2^2(1 + \alpha^2) = \rho^2$. Из (16) будем иметь

$$\left(\frac{\rho^2}{2} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega} \right) (1 + \alpha^2) = \rho^2,$$

или

$$(1 + \alpha^2) \left(\sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega} \right) = (\alpha^2 - 1) \frac{\rho^2}{2},$$

откуда находим

$$\rho^2 = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sqrt{\omega}. \quad (26)$$

Необходимо подобрать целые положительные числа i, j ($i > j$) в формулах (23) таким образом, чтобы ρ^2 , определяемое формулой (26), было как можно меньше, а с другой стороны функция $w(x)$, определяемая выражением (25), была положительной на интервале $0 \leq x \leq \pi(1+2j)m_2^{-1}$, если $m_1\ell_2$ и $m_2\ell_2$ вычисляются по формулам (23), или на интервале $0 \leq x \leq 2\pi jm_2^{-1}$, если $m_1\ell_2$ и $m_2\ell_2$ определяются формулами (23).

Строя графики функций $w(x)$ для различных чисел i, j , находим, что для минимального ρ величины $m_1\ell_2$, $m_2\ell_2$ определяются формулами (23) и $i = 1$, $j = 0$, $\alpha = 3$, т.е.

$$m_1\ell_2 = 3\pi, \quad m_2\ell_2 = \pi, \quad \frac{10}{3}\sqrt{\omega}\ell_2^2 = 10\pi^2,$$

$$\rho^2 = \frac{10}{3}\sqrt{\omega}, \quad \ell_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt[4]{\omega}}. \quad (27)$$

Если $\ell < \sqrt{3}\pi/\sqrt[4]{\omega} = \ell_2$, то критическая сила находится из уравнения (18), где следует положить $y = m_1\ell$, $z = m_2\ell$. Так как

$$\sin(3m_2x) = 3\sin(m_2x) - 4\sin^3(m_2x),$$

то в (25) $c_1 < 0$.

Если $\ell_2 < \ell$, то выражение для прогиба принимает вид

$$w(x) = c \cdot \sin^3(m_2x)H(\ell_2 - x), \quad x \in [0, \ell], \quad (28)$$

где $c = -4c_1$, $m_2 = \sqrt[4]{\omega}/\sqrt{3}$, $H(t)$ – функция Хевисайда.

2. Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями шарнирного опирания

Подставим (15) в граничные условия (7). В этом случае в системе уравнений (17) необходимо заменить второе уравнение на $m_1^2c_3 + m_2^2c_4 = 0$, откуда, с учетом первого уравнения получаем, что $c_3 = c_4 = 0$ и система (17) заменяется на следующую:

$$\begin{cases} c_1 \sin y + c_2 \sin z = 0, \\ c_1 m_1 \cos y + c_2 m_2 \cos z = 0, \\ c_1 m_1^2 \sin y + c_2 m_2^2 \sin z = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Для существования нетривиального решения последней системы необходимо, чтобы

$$\det \begin{pmatrix} \sin y & \sin z \\ m_1 \cos y & m_2 \cos z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \det \begin{pmatrix} \sin y & \sin z \\ m_1^2 \sin y & m_2^2 \sin z \end{pmatrix} = 0. \quad (30)$$

Откуда получаем два уравнения

$$\begin{cases} m_2 \cos z \sin y = m_1 \cos y \sin z, \\ m_2^2 \sin y \sin z = m_1^2 \sin y \sin z. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $\sin y = 0$ или $\sin z = 0$. Если $\sin y = 0$, то из первого уравнения получаем $\sin z = 0$ (ибо в противном случае $\cos y = 0$, что невозможно); поэтому

$$y = m_1 \ell_2 = \pi i, \quad z = m_2 \ell_2 = \pi j, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (31)$$

Из (31) и второго уравнения системы (29) получаем, что

$$c_2 = -c_1 \beta \frac{m_1}{m_2}, \quad \text{где } \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - j) \text{ - четное число,} \\ -1, & \text{если } (i - j) \text{ - нечетное число.} \end{cases}$$

А из (15)

$$w(x) = c_1 \left(\sin m_1 x - \beta \frac{m_1}{m_2} \sin m_2 x \right), \quad (32)$$

$$0 \leq m_2 x \leq \pi j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Пусть $\alpha = m_1 m_2^{-1} = i \cdot j^{-1}$, тогда формула (26) дает значение критической силы. Подбирая i, j таким образом, чтобы ρ^2 , определяемое формулой (26), было минимальным, а функция $w(x)$ (32) была неотрицательной, находим, что

$$i = 2, \quad j = 1, \quad \alpha = 2, \quad \rho^2 = \frac{5}{2} \sqrt{\omega},$$

$$m_2 = \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{2}}, \quad \ell_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt[4]{\omega}}. \quad (33)$$

Если $\ell_2 < \ell$, то прогиб задается формулой

$$w(x) = c \left(2 \sin \frac{\pi x}{\ell_2} + \sin \frac{2\pi x}{\ell_2} \right) H(\ell_2 - x), \quad c > 0. \quad (34)$$

Формулы (33) – (34) другим способом были получены в [4].

3. Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края

Пусть продольная сила P приложена к свободному краю стержня и сохраняет свое направление после потери устойчивости, а при $x = 0$ выполнены граничные условия жесткой заделки. В этом случае

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \\ w''(\ell) = 0, \quad w'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Покажем, что граничные условия (35) являются естественными для задачи (35)–(36). Применяя правило множителей Лагранжа, получаем задачу

$$L(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (w''^2 + \omega w^2 - \lambda w'^2) dx \rightarrow \min_{w \in H}, \quad (36)$$

Применяя формулу для вариации функционала, с учетом того, что $x_0 = 0$, $x_1 = \ell$, $F = \frac{1}{2}(w''^2 + \omega w^2 - \lambda w'^2)$, $\delta x = 0$ при $x = 0$, $x = \ell$, $\delta w = 0$, $\delta w' = 0$ при $x = 0$ находим вариацию функционала $L(w)$:

$$\delta L(w) = \int_0^\ell (w^{IV} + \omega w + \lambda w'') \delta w dx + w'' \delta w'|_{x=\ell} - (\lambda w' + w''') \delta w|_{x=\ell}. \quad (37)$$

Так, как $\delta L(w) = 0$, то выполнено уравнение Эйлера – Лагранжа (5) ($\lambda = \rho^2 = P$), и полагая в (37) $\delta w' = 0$, $\delta w = 1$, или $\delta w' = 1$, $\delta w = 0$ получим (35).

В случае граничных условий свободного края в отличие от граничных условий жесткой заделки и граничных условий шарнирного опирания

$$\rho^2 < 2\sqrt{\omega},$$

и общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$w(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_3 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) + c_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x), \quad (38)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}, \quad (39)$$

Будем считать, что существует участок полного прилегания к стенке, т.е.

$$w(x) = 0, \quad x \in [0, \ell_1], \quad w(x) > 0, \quad x \in [\ell_1, \ell]. \quad (40)$$

Как и выше

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad w'' = 0 \quad \text{при } x = \ell_1.$$

Таким образом имеем две системы уравнений:

$$w(\ell_1) = 0, \quad w'(\ell_1) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad w'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0, \quad (41)$$

$$w(\ell_1) = 0, \quad w''(\ell_1) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad w'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0. \quad (42)$$

В системах уравнений (41) – (42) неизвестными являются переменные $c_1 - c_4$ и ℓ_1 . Сила P будет критической, если системы (41) – (42) будут иметь нетривиальное решение $c_1 - c_4$, для этого необходимо, чтобы определители матрицы коэффициентов при $c_1 - c_4$ были равны 0. Ясно, что в системах (41) – (42) можно положить $\ell_1 = 0$, (для этого достаточно заменить x на $x - \ell_1$) тогда ℓ будет неизвестной величиной, подлежащей определению. Заменим ℓ на $\tilde{\ell}$. Определитель системы (41) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = & \cos^2(\beta\tilde{\ell})(\omega\rho^2 - \sqrt{\omega}\rho^4 + 2\sqrt{\omega^3}) + \\ & + \frac{1}{2}e^{\alpha\tilde{\ell}}(\sqrt{\omega^3} - \frac{1}{2}\omega\rho^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\rho^4) + \frac{1}{2}e^{-\alpha\tilde{\ell}}(\sqrt{\omega^3} - \frac{1}{2}\omega\rho^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\rho^4) + \\ & + \sqrt{\omega^3} - \frac{1}{2}\omega\rho^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\rho^4, \end{aligned}$$

а определитель системы (42) равен

$$\begin{aligned} \Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = & \frac{1}{2} \sin(\beta\tilde{\ell})\beta(\rho^2\omega - \rho^4\sqrt{\omega} + 2\sqrt{\omega^3}) + \\ & + \frac{1}{4}e^{\alpha\tilde{\ell}}\alpha(\rho^2\omega + \rho^4\sqrt{\omega} - 2\sqrt{\omega^3}) - \frac{1}{4}e^{-\alpha\tilde{\ell}}\alpha(\rho^2\omega + \rho^4\sqrt{\omega} - 2\sqrt{\omega^3}). \end{aligned}$$

Определители $\Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho)$ и $\Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho)$ были вычислены с помощью системы MAPLE. Таким образом, для нахождения $\tilde{\ell}$ и ρ^2 имеем систему двух нелинейных уравнений:

$$\Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = 0, \quad \Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = 0. \quad (43)$$

Система уравнений решалась методом Ньютона. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

N	1	2	3	4	5	6
ω	100	200	350	450	550	800
$\tilde{\ell}$	0.745	0.627	0.545	0.512	0.487	0.443
ρ^2	12.6	17.8	23.5	26.7	29.5	35.6
ρ_*^2	11.9	15.6	19.5	21.8	23.8	28.5

В таблице 1 в последней строке приведены значения критической силы $P = \rho_*^2$ для стержня, находящегося в упругой среде с жесткостью ω .

Приведем результаты численного исследования рассматриваемой задачи. Для аппроксимации прогиба использовались сплайны

$$w = \sum_{i=0}^{n+2} w_i S_i(x), \quad S_i(x) = B_i(x; h), \quad n = 10, \quad \ell = 1, \quad h = 0.1, \quad (44)$$

где $B_i(x; h)$, $i \in 0 : n + 2$, $n \geq 4$ —целое число,

$$x \in [0, l], \quad h = \frac{l}{n}, \quad x_i = ih, \quad B_i(x; h) = B(x - (i - 3)h), \quad i = 3..n - 1,$$

$$B(x; h) = \frac{1}{4h^4} \left(\frac{1}{6}x_+^3 - \frac{2}{3}(x - h)_+^3 + (x - 2h)_+^3 - \frac{2}{3}(x - 3h)_+^3 + \frac{1}{6}(x - 4h)_+^3 \right)$$

$$B_0(x; h) = 1 + \frac{1}{h^3} \left(-\frac{1}{6}x_+^3 + \frac{1}{2}(x - h)_+^3 - \frac{1}{2}(x - 2h)_+^3 + \frac{1}{6}(x - 3h)_+^3 \right),$$

$$B_1(x; h) = x + \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{3}x_+^3 + \frac{5}{6}(x - h)_+^3 - \frac{2}{3}(x - 2h)_+^3 + \frac{1}{6}(x - 3h)_+^3 \right), \quad (45)$$

$$B_2(x; h) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{36}x_+^3 + \frac{1}{2}(x - h)_+^3 - \frac{1}{4}(x - 2h)_+^3 + \frac{1}{18}(x - 3h)_+^3 \right),$$

$$B_n(x; h) = B_2(l - x), \quad B_{n+1}(x; h) = B_1(l - x),$$

$$B_{n+2}(x; h) = B_0(l - x), \quad x_+ = \max\{0, x\} = \frac{1}{2}(|x| + x).$$

Функции $B_i(x; h)$ на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ $i \in 0 : n$ — являются многочленами третьей степени, дважды непрерывно дифференцируемыми на всем отрезке $[0, l]$.

Сплайны $B_i(x; h)$ и их производные удовлетворяют условиям:

$$B_0(0; h) = 1, \quad B_{n+2}(l; h) = 1, \quad B_i(0; h) = 0, \quad B_i(l; h) = 0, \quad i \neq 0, \quad i \neq n + 2,$$

$$B_1'(0; h) = 1, \quad B_{n+1}'(l; h) = 1, \quad B_i'(0; h) = 0, \quad B_i'(l; h) = 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq n + 1,$$

$$B_2''(0; h) = 1, \quad B_n''(l; h) = 1, \quad B_i''(0; h) = 0, \quad B_i''(l; h) = 0, \quad i \neq 2, \quad i \neq n.$$

Сплайны $B_i(x; h)$ удобно применять для аппроксимации функций при решении вариационных задач. Рассмотрим, например, задачу об устойчивости сжимаемого продольной силой стержня. Подставляя (44) в (1) и (3) получаем две квадратичные формы

$$f(u) = \frac{1}{2}(Qu, u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{n+2} w_i w_j \int_0^1 \left(S_i''(x) S_j''(x) + \omega S_i(x) S_j(x) \right) dx,$$

$$u = (w_0, w_1, \dots, w_{n+1}, w_{n+2}) \in R^{n+3},$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(Gu, u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{n+2} w_i w_j \int_0^1 S'_i(x) S'_j(x) dx.$$

Если положить $w_0 = 0$ и $w_1 = 0$, то будут выполнены граничные условия $w(0) = 0$ и $w'(0) = 0$, равенство $w_n = 0$ влечет выполнение условия $w''(\ell) = 0$. Граничное условие $w'''(\ell) + Pw'(\ell) = 0$ является естественным, и оно будет выполнено автоматически в результате решения задачи оптимизации. Потребуем выполнение неравенств (2) в конечном числе точек:

$$w = \sum_{i=0}^{n+2} w_i S_i(x_k) \geq 0, \quad x_k = \frac{kh}{n}, \quad k \in [1 : n]. \quad (46)$$

Приходим к задаче

$$f(u) \rightarrow \min \quad \text{при ограничении } g(u) = 1, \quad (47)$$

и с ограничениями (46).

Данная задача решалась локальным методом [2], [3]. В при всех значениях ω , приведенных в таблице, значения критических сил с точностью до трех знаков совпадали со значениями, полученными в результате решения системы (16), например при $\omega = 550$ полученное численным методом $\rho^2 = 29.506$. На рис. 2 приведены формы равновесия стержня после потери устойчивости (получены численным методом).

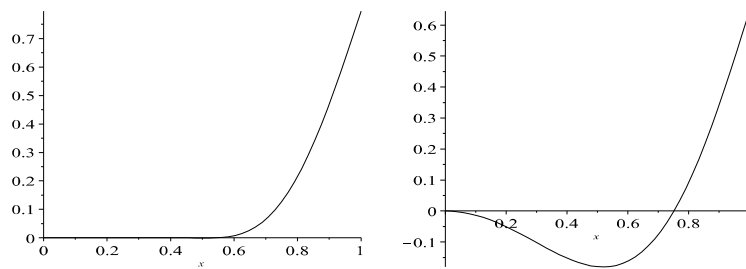


Рис. 1: Форма равновесия стержня после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения (слева) и без ограничений на перемещения (справа)

Литература

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Тарасов В. Н. Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. // *Труды института математики и механики. Российская академия наук. Уральское отделение. Том 11, № 1, 2005. С. 177-188.*
3. Тарасов В. Н., Холмогоров Д. В. Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета. 1992. 189 с.
4. Холопов А. А. Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой упругой сред // *Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 1995. - Вып. 1. - С. 217 - 233.*

Summary

Andryukova V. Yu., Tarasov V. N. On the stability of rod with one-sided restrictions on the moving

Analytically solved the problem of stability of longitudinally compressed rod with one-sided restrictions on the movement of an elastic medium under various boundary conditions. The results obtained analytically, numerically tested and are fully consistent.

Keywords: rod, stability, critical force, boundary conditions, unilateral restrictions, the eigenvalues.

Отдел математики КИЦ УрОРАН

Поступила 25.05.2013