

УДК 512.64+534.2+539.3

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ В РАСЧЁТАХ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Ю. Н. Беляев

Представлен новый метод вычисления матричной экспоненты, основанный на использовании симметрических многочленов n -го порядка. Найдены аналитические выражения матриц переноса упругих деформаций в однородном слое.

Ключевые слова: слоистые среды, матрица переноса, экспонента, симметрические многочлены, упругие деформации.

1. Введение

Многие задачи математической физики, в частности, теории распространения волн в слоистых средах [1]-[4], имеют составной своей частью задачу Коши относительно n неизвестных функций $\psi_i = \psi_i(z)$ переменной z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dz} &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 + \dots + a_{1n}\psi_n, \\ \frac{d\psi_2}{dz} &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + \dots + a_{2n}\psi_n, \\ &\vdots \\ \frac{d\psi_n}{dz} &= a_{n1}\psi_1 + a_{n2}\psi_2 + \dots + a_{nn}\psi_n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\psi_i(0) = \psi_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Если коэффициенты a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, являются постоянными, то матричное представление решения задачи (1) – (2) имеет вид (см., например [5]):

$$\Psi(z) = \exp(Az)\Psi_0. \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\Psi(z) = \begin{vmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \vdots \\ \psi_n(z) \end{vmatrix}, \quad \Psi_0 = \begin{vmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \\ \vdots \\ \psi_{n0} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\exp(Az) \equiv I + Az + \frac{(Az)^2}{2!} + \frac{(Az)^3}{3!} + \dots \quad (5)$$

и I — единичная матрица.

Если коэффициенты a_{ij} дифференциальных уравнений (1) являются функциями z , то один из способов решения задачи (1)–(2) состоит в разбиении отрезка $[0, z]$ точками деления z_j на достаточно большое число N подобластей таким образом, чтобы на каждом из отрезков $[z_j, z_{j+1}]$ матрицу $A_j = A(z_j)$ можно было считать с достаточной точностью постоянной и аппроксимировать фундаментальную матрицу произведением $\prod_{j=N}^1 \exp(A_j(z_{j+1} - z_j))$.

Расчёты $\exp(Az)$ с помощью формул Лагранжа-Сильвестра [5], Бэкера [6, стр. 196] или Ньютона [7] требуют предварительного нахождения решений $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$, характеристического уравнения матрицы A

$$\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots - (-1)^n \sigma_n = 0, \quad (6)$$

коэффициенты которого $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$, равны суммам главных миноров i -го порядка определителя матрицы A , т.е.

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \quad \sigma_2 = \sum_{j>i} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \sigma_n = \det A. \quad (7)$$

Другой подход [8] к вычислению матричной экспоненты основан на использовании величин σ_i , являющихся элементарными симметрическими многочленами относительно λ_j , и не нуждается для своей реализации нахождения самих собственных значений λ_j матрицы A . Для матрицы общего вида σ_i вычисляются значительно надёжнее и точнее λ_j . Поэтому при численном решении задачи (1)–(2), как показано в работе [9], последний метод имеет существенные преимущества, в сравнении с выше перечисленными.

В данной работе метод [8,9] применяется для получения решений задачи (1)–(2), аналитически выражающих экспоненту матрицы через элементарные симметрические многочлены последней. Полученные

формулы используются для нахождения матрицы переноса упругих деформаций [10].

2. Представление матричной экспоненты с помощью симметрических многочленов

Теорема [11]. Целая функция $f(M)$ любой квадратной матрицы M порядка n выражается с помощью своих симметрических многочленов σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, формулой:

$$f(M) = \sum_{l=0}^{n-1} M^l \sum_{g=0}^l (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \mathcal{B}_{j-1-g}(n), \quad (8)$$

где

$$\mathcal{B}_j(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 1, & \text{если } j = n-1, \\ \sigma_1 \mathcal{B}_{j-1}(n) - \sigma_2 \mathcal{B}_{j-2}(n) + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_n \mathcal{B}_{j-n}(n), & \text{если } j \geq n, \end{cases} \quad (9)$$

и α_k — коэффициенты разложения целой функции $f(\zeta)$ комплексной переменной ζ в степенной ряд в окрестности нуля.

Функции $\mathcal{B}_j(n)$, определяемые рекуррентными формулами (9), выражаются через элементарные симметрические многочлены σ_i и называются симметрическими многочленами n -го порядка.

Для доказательства представления (8) используем: 1) теорему о целочисленных степенях матрицы [12, стр. 275], согласно которой целочисленная степень $j > 0$ любой матрицы M n -го порядка равна

$$M^j = \sum_{l=0}^{n-1} M^l \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \mathcal{B}_{j-1-g}(n); \quad (10)$$

2) теорему (см., например [5, Гл. V, § 4]) о сохранении разложения функции $f(\zeta)$ в степенной ряд в круге $|\zeta - \zeta_0| < r$

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\zeta - \zeta_0)^j$$

при замене скалярного аргумента ζ любой квадратной матрицей M :

$$f(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (M - I\zeta_0)^j. \quad (11)$$

Подставляя выражение (10) в правую часть разложения (11) в окрестности $\zeta_0 = 0$ получаем соотношение (8).

Следствие 1.

$$f(Az) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l \sum_{g=0}^l (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \mathcal{B}_{j-1-g}(n), \quad (12)$$

где z — скаляр, а σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и $\mathcal{B}_j(n)$ соответственно элементарные симметрические многочлены и многочлены n -го порядка матрицы A .

Следствие 2.

$$\exp(Az) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l \sum_{g=0}^l (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_{j-1-g}(n). \quad (13)$$

Если выразить симметрические многочлены n -го порядка $\mathcal{B}_l(n)$ явным образом через собственные значения λ_j матрицы A , то суммирование по j в формулах (12) и (13) может быть выполнено аналитически без особого труда. Но результат суммирования в этом случае выражается через собственные значения матрицы, и его конвертация к функциональной зависимости от σ_i гарантированно выполняется лишь для матриц второго, третьего и четвёртого порядков.

Пример 1. Экспонента матрицы второго порядка

Симметрические многочлены второго порядка $\mathcal{B}_j(2)$ определяются соотношениями

$$\mathcal{B}_0(2) = 0; \quad \mathcal{B}_1(2) = 1; \quad \mathcal{B}_j(2) = \sigma_1 \mathcal{B}_{j-1}(2) - \sigma_2 \mathcal{B}_{j-2}(2), \quad j \geq 2, \quad (14)$$

где σ_1 и σ_2 — соответственно след и определитель матрицы. Решением уравнений (14) являются функции

$$\mathcal{B}_j(2) = \frac{\lambda_2^j - \lambda_1^j}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \text{где } \lambda_{1,2} = \frac{\sigma_1}{2} \pm is, \quad s = \sqrt{\sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{4}}.$$

Подстановка этих функций в формулу (13) даёт:

$$\begin{aligned} \exp(Az) &= -I\sigma_2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_{j-1}(2) + A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_j(2) = \\ &= \exp\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) \left[\left(A - I\frac{\sigma_1}{2}\right) \frac{\sin(sz)}{s} + I \cos(sz) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Пример 2. Экспонента матрицы четвёртого порядка. Получим здесь выражение экспоненты матрицы четвёртого порядка A , в важном для практических приложений случае, когда элементарные симметрические многочлены σ_i матрицы A удовлетворяют условиям:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_4 \neq 0.$$

В этом случае все многочлены $\mathcal{B}_j(4)$ с чётными индексами равны нулю, а многочлены с нечётными индексами определяются равенствами

$$\mathcal{B}_1(4) = 0, \quad \mathcal{B}_3(4) = 1, \quad \mathcal{B}_{2j+1}(4) = -\sigma_2 \mathcal{B}_{2j-1}(4) - \sigma_4 \mathcal{B}_{2j-3}(4).$$

Решение этих уравнений можно представить в виде [13]:

$$\mathcal{B}_{2j+1}(4) = \sigma_4^{\frac{j-1}{2}} \left(\frac{\sin[j \arccos b]}{\sqrt{1-b^2}} \right), \quad (16)$$

где

$$b = -\frac{\sigma_2}{2\sqrt{\sigma_4}}. \quad (17)$$

Формула (13) для данного случая преобразуется к виду:

$$\exp(Az) = IS_0 + AS_1 + A^2S_2 + A^3S_3, \quad (18)$$

где величины S_0, S_1, S_2, S_3 определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= -\sigma_4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!} \mathcal{B}_{2j-1}(4), & S_1 &= -\sigma_4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathcal{B}_{2j-1}(4), \\ S_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!} \mathcal{B}_{2j+1}(4), & S_3 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathcal{B}_{2j+1}(4). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для вычисления выражений (19) воспользуемся известными суммами [14, стр. 738]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{Bmatrix} \sin jx \\ \cos jx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \sin \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \\ \operatorname{sh} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \cos \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \end{Bmatrix} \cos \left(\frac{x}{2} \right) \mp \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \cos \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \\ \operatorname{ch} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \sin \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \end{Bmatrix} \sin \left(\frac{x}{2} \right), \quad (20)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!} \begin{Bmatrix} \sin jx \\ \cos jx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \sin \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \\ \operatorname{ch} \left[r \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] \cos \left[r \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Подставляя выражения (16) в формулы (19) и применяя соотношения (20) и (21) находим:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\sqrt[4]{\sigma_4})^{2j}}{(2j)!} \left[\cos(j \arccos b) - \frac{b \sin(j \arccos b)}{\sqrt{1-b^2}} \right] = \\ &= \operatorname{ch}(z\vartheta^{(-)}) \cos(z\vartheta^{(+)}) - \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{sh}(z\vartheta^{(-)}) \sin(z\vartheta^{(+)}) , \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_4^{-\frac{1}{4}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[z\sqrt[4]{\sigma_4}]^{2j+1}}{(2j+1)!} \left(\cos(j \arccos b) - \frac{b \sin(j \arccos b)}{\sqrt{1-b^2}} \right) \right] = \\ &= \frac{1+2b}{2\vartheta^{(-)}} \operatorname{sh}(z\vartheta^{(-)}) \cos(z\vartheta^{(+)}) + \frac{1-2b}{2\vartheta^{(+)}} \operatorname{ch}(z\vartheta^{(-)}) \sin(z\vartheta^{(+)}) , \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_4}\sqrt{1-b^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\sqrt[4]{\sigma_4})^{2j}}{(2j)!} \sin(j \arccos b) = \\ &= \frac{1}{2\vartheta^{(+)}\vartheta^{(-)}} \operatorname{sh}(z\vartheta^{(-)}) \sin(z\vartheta^{(+)}) , \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\sigma_4^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-b^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\sqrt[4]{\sigma_4})^{2j+1}}{(2j+1)!} \sin(j \arccos b) = \\ &= \frac{\sigma_4^{-\frac{1}{2}}}{2} \left[\frac{1}{\vartheta^{(+)}} \operatorname{ch}(z\vartheta^{(-)}) \sin(z\vartheta^{(+)}) - \frac{1}{\vartheta^{(-)}} \operatorname{sh}(z\vartheta^{(-)}) \cos(z\vartheta^{(+)}) \right] , \end{aligned} \quad (25)$$

где использованы обозначения

$$\vartheta^{(\pm)} = \frac{\sqrt{2\sqrt{\sigma_4} \pm \sigma_2}}{2}. \quad (26)$$

3. Матрицы переноса упругих деформаций

В декартовой системе координат $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ компоненты тензора деформации u_{gj} определяются через компоненты u_l вектора смещения \vec{u} формулами:

$$u_{gj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_g} \right), \quad g, j = 1, 2, 3. \quad (27)$$

В изотропной среде компоненты тензора напряжений p_{gj} соотносятся с компонентами тензора деформаций u_{gj} с помощью упругих постоянных Ламе λ и μ

$$p_{gj} = 2\mu u_{gj} + \lambda \sum_l u_{ll} \delta_{gj}, \quad g, j = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Движение в сплошной среде описывается линейными дифференциальными уравнениями:

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{g1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{g2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{g3}}{\partial x_3}, \quad g = 1, 2, 3, \quad (29)$$

где ρ — плотность вещества, t — время.

Рассмотрим рассеяние плоской упругой волны

$$\vec{u}_0 = \vec{e} \exp[i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)], \quad (30)$$

падающей из однородной области на изотропный слой, в общем случае неоднородный по толщине. В формуле (30) и далее буква i обозначает мнимую единицу, ω — циклическую частоту колебаний, \vec{k}_0 — волновой вектор падающей волны. Постоянный вектор \vec{e} определяет амплитуду и направление колебаний частиц среды в волне. Примем амплитуду падающей волны за единицу: $|\vec{e}| = 1$.

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ось z была перпендикулярна поверхности слоя, а оси x и y лежали в этой поверхности; луч падающей волны лежит в плоскости xz и направлен под углом θ_0 к оси z . Из геометрии задачи следует, что компоненты упругого поля от координаты y не зависят.

3.1. Горизонтальная волна сдвига. Пусть вектор смещения \vec{u} направлен вдоль оси y . В этом случае не нулевыми будут только одна компонента смещения u_y и две компоненты тензора напряжений p_{yz}, p_{yx} . Эти функции, как следует из (27) – (29), удовлетворяют уравнениям:

$$p_{yx} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad p_{yz} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \quad (31)$$

Несложно показать (см., например [15]), что компоненты упругих волн, распространяющиеся внутри слоя, отражённой от слоя и прошедшей через слой имеют ту же функциональную зависимость от координаты x и времени t , что и падающая волна (30). Это означает, что выполняются равенства

$$k_0 \sin \theta_0 = k_\rho \sin \theta_\rho = k \sin \theta = k_\tau \sin \theta_\tau,$$

где волновые числа падающей, отражённой, прошедшей и преломлённой волн выражаются соответственно формулами: $k_0 = \omega \sqrt{\rho_0/\mu_0}$, $k_\rho = \omega \sqrt{\rho_0/\mu_0}$, $k_\tau = \omega \sqrt{\rho_\tau/\mu_\tau}$ and $k = \omega \sqrt{\rho/\mu}$; индексом 0 отмечены параметры среды распространения падающей и отражённой волн, а индексом τ — параметры среды распространения прошедшей волны. Направления волновых векторов показаны на рис. 1.

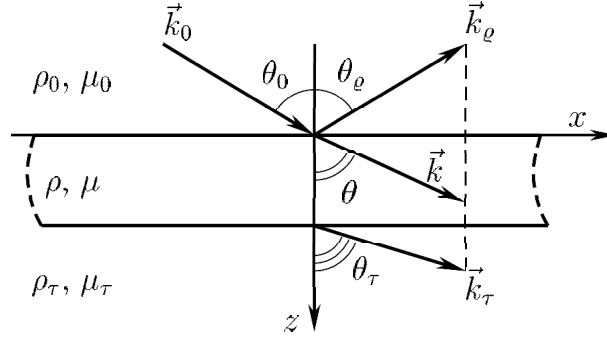


Рис. 1

Ищем решение уравнений (31) в виде

$$\begin{pmatrix} u_y \\ p_{yz} \\ p_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \end{pmatrix} \exp[i(k \sin \theta - \omega t)].$$

Неизвестные функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, связаны между собой равенствами

$$\begin{aligned} \psi_3(z) &= \mu i k \sin \theta \psi_1(z), \\ \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ -\mu k^2 \cos^2 \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv W \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элементарные симметрические многочлены матрицы W :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = k^2 \cos^2 \theta = k_z^2.$$

По формуле (15) находим матрицу

$$T \equiv \exp(Wz) = \begin{pmatrix} \cos(kz \cos \theta) & \frac{\sin(kz \cos \theta)}{\mu k \cos \theta} \\ -\mu k \cos \theta \sin(kz \cos \theta) & \cos(kz \cos \theta) \end{pmatrix},$$

которая является матрицей переноса упругих деформаций горизонтальной волной сдвига в однородном слое.

3.2. Волна $P - SV$ типа. Пусть колебания в волне происходят в плоскости xz , так что $u_y = 0$. Такая поляризация называется вертикальной. Ей соответствуют продольная волна (P) и вертикальная волна сдвига (SH). Не нулевыми компонентами тензора деформации (27) в рассматриваемом случае являются:

$$u_{11} \equiv u_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad u_{13} \equiv u_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad u_{33} \equiv u_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

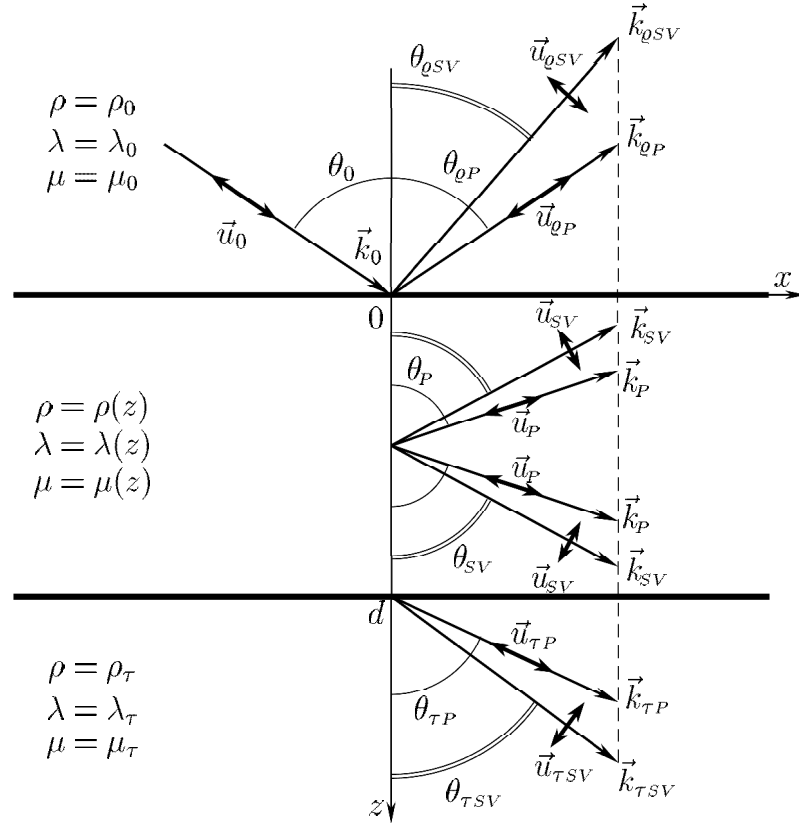


Рис. 2. Геометрия рассеяния продольной волны

Соответственно, не нулевыми будут следующие компоненты тензора напряжений (см. формулу (28)):

$$p_{xx} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (32)$$

$$p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad (33)$$

$$p_{zz} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (34)$$

а из трёх уравнения движения (29) нужно решать два

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \quad (35)$$

Будем искать решения дифференциальных уравнений (32-35), удовлетворяющие начальному условию (30), в виде:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} \\ p_{xz} \\ p_{zz} \\ u_x \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0(z) \\ \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \\ \psi_4(z) \end{pmatrix} \exp[i(k_{0x}x - \omega t)]. \quad (36)$$

В результате подстановки (36) в (32-35) и выполнения элементарных преобразований нетрудно получить уравнения, определяющие неизвестные функции $\psi_j(z)$:

$$\psi_0(z) = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \psi_2(z) + ik_{0x} \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \psi_3(z), \quad (37)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \\ \psi_4(z) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \\ \psi_4(z) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где матрица четвёртого порядка $W = \|w_{gj}\|$ имеет следующие не нулевые компоненты:

$$\left. \begin{aligned} w_{12} = w_{43} = -ik_{0x} \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \equiv \gamma_1, \quad w_{24} = -\omega^2 \rho \equiv \gamma_4, \\ w_{13} = -\omega^2 \rho + k_{0x}^2 \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \equiv \gamma_2, \quad w_{31} = \frac{1}{\mu} \equiv \gamma_5, \\ w_{21} = w_{34} = -ik_{0x} \equiv \gamma_3, \quad w_{42} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \equiv \gamma_6. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Для решения системы уравнений (38) методом симметрических многочленов требуются элементарные симметрические многочлены матрицы (39). Они равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} + \frac{\omega^2 \rho}{2\mu + \lambda} - 2k_{0x}^2, \\ \sigma_3 = 0, \quad \sigma_3 = \left(\frac{\omega^2 \rho}{2\mu + \lambda} - k_{0x}^2 \right) \left(\frac{\omega^2 \rho}{\mu} - k_{0x}^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Как известно, в упругой твёрдой среде могут распространяться поперечная и продольная волны, скорости которых v_{SV} и v_P определяются упругими коэффициентами Ламе λ , μ и плотностью среды ρ :

$$v_{SV} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad v_P = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}.$$

Этим волнам соответствуют волновые числа $k_{SV} = \omega\sqrt{\rho/\mu}$ и $k_P = \omega\sqrt{\rho/(2\mu + \lambda)}$. Направления распространения волн определяются из условий

$$\begin{aligned} k_0 \sin \theta_0 &= k_{SV} \sin \theta_{SV} = k_P \sin \theta_P \\ &= k_{\rho_{SV}} \sin \theta_{\rho_{SV}} = k_{\rho_P} \sin \theta_{\rho_P} \\ &= k_{\tau_{SV}} \sin \theta_{\tau_{SV}} = k_{\tau_P} \sin \theta_{\tau_P}. \end{aligned}$$

Минимальные углы, которые волновые векторы образуют с нормалью к слою, обозначены буквой θ с индексом SV для поперечных волн, и P — продольных. Дополнительными индексами ρ и τ отмечены величины, относящиеся соответственно к отражённым и прошедшим волнам.

Внутри твёрдого слоя распространяются две продольные волны, различающиеся знаками проекций своих волновых векторов на ось z , и две вертикальные волны сдвига с таким же различием проекций волновых векторов на ось z . На рис. 2 в качестве примера показана геометрия рассеяния продольной волны. Направления колебаний частиц среды показаны на лучах двухсторонними стрелками.

Обозначения

$$\beta_{SV} = k_{SV} \cos \theta_{SV}, \quad \beta_P = k_P \cos \theta_P \quad (41)$$

позволяют представить соотношения (40) в форме, более наглядно раскрывающей смысл не нулевых элементов симметрических многочленов матрицы W :

$$\sigma_2 = \beta_{SV}^2 + \beta_P^2, \quad \sigma_4 = \beta_{SV}^2 \beta_P^2,$$

А именно, σ_2 — сумма, а σ_4 — произведение квадратов нормальных составляющих волновых векторов продольной и поперечной волн.

Найдём матрицу переноса $T = \exp(Wz)$ упругих деформаций волной $P - SV$ типа в однородном слое. Для элементов t_{ij} матрицы переноса

T по формулам (18) и (22)–(26) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= t_{33} = S_0 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_5)S_2, \\
 t_{12} &= \gamma_1 S_1 + [(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_5)\gamma_1 + (\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3)\gamma_6]S_3, \\
 t_{13} &= \gamma_2 S_1 + [(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_5)\gamma_2 + (\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3)\gamma_1]S_3, \\
 t_{14} &= t_{23} = (\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3)S_2, \\
 t_{21} &= \gamma_3 S_1 + [(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_4\gamma_6)\gamma_3 + (\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3)\gamma_5]S_3, \\
 t_{22} &= t_{44} = S_0 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_4\gamma_6)S_2, \\
 t_{24} &= \gamma_4 S_1 + [(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_4\gamma_6)\gamma_4 + (\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3)\gamma_3]S_3, \\
 t_{31} &= \gamma_5 S_1 + [(\gamma_5\gamma_1 + \gamma_3\gamma_6)\gamma_3 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_5)\gamma_5]S_3, \\
 t_{32} &= t_{41} = (\gamma_5\gamma_1 + \gamma_3\gamma_6)S_2, \\
 t_{34} &= \gamma_3 S_1 + [(\gamma_5\gamma_1 + \gamma_3\gamma_6)\gamma_4 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_5)\gamma_3]S_3, \\
 t_{42} &= \gamma_6 S_1 + [(\gamma_5\gamma_1 + \gamma_3\gamma_6)\gamma_1 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_4\gamma_6)\gamma_6]S_3, \\
 t_{43} &= \gamma_1 S_1 + [(\gamma_5\gamma_1 + \gamma_3\gamma_6)\gamma_2 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_4\gamma_6)\gamma_1]S_3.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{\beta_{SV}^2 \cos(z\beta_P) - \beta_P^2 \cos(z\beta_{SV})}{\beta_{SV}^2 - \beta_P^2}, & S_1 &= \frac{\beta_{SV}^3 \sin(z\beta_P) - \beta_P^3 \sin(z\beta_{SV})}{\beta_{SV}\beta_P(\beta_{SV}^2 - \beta_P^2)}, \\
 S_2 &= \frac{\cos(z\beta_P) - \cos(z\beta_{SV})}{\beta_{SV}^2 - \beta_P^2}, & S_3 &= \frac{\beta_{SV} \sin(z\beta_P) - \beta_P \sin(z\beta_{SV})}{\beta_{SV}\beta_P(\beta_{SV}^2 - \beta_P^2)},
 \end{aligned}$$

параметры $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$ определяются формулами (39), а β_P и β_{SV} — равенствами (41).

4. Заключение

В тех случаях, когда суммирование в формуле (13) для матричной экспоненты может быть выполнено аналитически, аналогичное суммирование в (12) для функций $\sin(Az)$, $\cos(Az)$, $\text{sh}(Az)$ и $\text{ch}(Az)$ проводится с не меньшим успехом. Но результат легче получить, если использовать известные соотношения между указанными функциями и экспонентой, например $\sin(Az) = (\exp(iAz) - \exp(-iAz))/(2i)$.

Литература

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Из-во АН СССР, 1957. 503 с.

2. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики / Пер. с англ. под ред. Г.П. Мотулевич. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. **Шульга Н. А.** Основы механики слоистых сред периодической структуры. Киев : Наук. думка, 1981. 200 с.
4. **Молотков Л. А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
5. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
6. **Анго А.** Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с фр. под ред. К.С. Шифрина. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 780 с.
7. **Mac Duffee С. С.** The Theory of Matrices. New York: Chelsea, 1956. 128 p.
8. **Беляев Ю. Н.** Применение симметрических многочленов в решении задачи Коши // *Тезисы Международной конференции „Алгебра и линейная оптимизация“, Екатеринбург, 14-19 мая 2012. Екатеринбург: изд-во „УМЦ-УПИ“, 2012. С. 20–22.*
9. **Belyayev Yu. N.** Calculations of transfer matrix by means of symmetric polynomials // *Days on Diffraction 2012. Proceedings of the International Conference May 28 – June 1 2012, Saint Petersburg, Russia. P. 36-41.*
10. **Беляев Ю. Н.** Симметрические многочлены в расчётах матрицы переноса упругих деформаций // *Тезисы докладов Международной конференции Обратные и некорректные задачи математической физики, Новосибирск, 5-12 августа 2012. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. С. 298–299.*
11. **Belyayev Yu. N.** Representation of matrix functions by means of symmetric polynomials // *Book of abstracts of the International Conference on Algebra, august 20–26 2012 Kiev: Institut of mathematics NAS of Ukraine. p. 30.*
12. **Беляев Ю. Н.** Векторный и тензорный анализ. Сыктывкар: СыктГУ, 2010. 298 с.
13. **Беляев Ю. Н.** Матричный метод расчёта перерасеяния волн в периодической структуре // *Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2011. № 2(23). С. 142–148.*

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
15. Беляев Ю. Матричный подход теории волн к слоистым средам. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 148 с.

Summary

Belyayev Yu. N. Symmetric polynomials in the calculation of the matrix exponential

A new method for computing the matrix exponential based on symmetric polynomials of n -th order is presented. Transfer matrix analytic expressions in a homogeneous elastic layer are found.

Keywords: layered media, transfer matrix, exponential, symmetric polynomials, elastic deformation.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 18.12.2012