

УДК 539.3

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС “ТВЕРДОФАЗНАЯ ЭКСТРУЗИЯ”<sup>1</sup>**

*Н. А. Беляева, Д. М. Камбуров*

Вычислительный комплекс объединяет алгоритмы и программные модули расчета параметров течения вязкоупругого структурированного сжимаемого композитного материала в процессе твердофазной плунжерной экструзии, разработанные на кафедре математического моделирования и кибернетики Сыктывкарского университета.

*Ключевые слова:* вычислительный комплекс, плунжерная экструзия, вязкоупругий структурированный композитный сжимаемый материал.

### **Введение**

Целью настоящей работы является создание единого комплекса программ по численному моделированию процессов формирования изделий из пористого вязкоупругого структурированного сжимаемого композитного материала методом выдавливания материала из цилиндрической камеры в направляющий калибр под действием плунжера пресса. Предполагается внедрение указанного вычислительного комплекса в научно-образовательный процесс: использование при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ, магистерских и кандидатских диссертаций, проведение дальнейших научных исследований по моделированию процессов получения длинномерных композитных изделий методом твердофазой и СВС-экструзии.

---

<sup>1</sup>Работа выполняется при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. ГК № 02.740.11.0618

## 1. Структура комплекса

Программный комплекс "Твердофазная экструзия" разработан [1] при использовании среды Delphi 7.0.

Структура рассматриваемого вычислительного комплекса приведена на рис. 1.

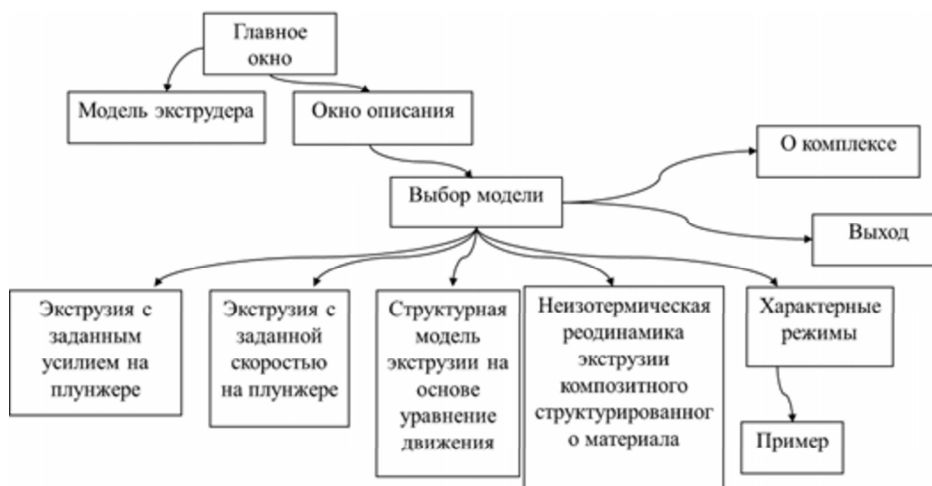


Рис. 1: Схема комплекса

Программный комплекс (ПК) построен по модульному типу, в его состав входят пять программ-модулей:

1. экструзия с заданным усилием на плунжере;
2. экструзия с условием постоянства скорости плунжера прессы на основе обобщенной модели Ньютона;
3. экструзия с условием постоянства скорости плунжера прессы на основе обобщенной модели Максвелла;
4. неизотермическая экструзия;
5. характерные режимы экструзии.

Каждый модуль, входящий в ПК, загружается отдельно как исполняемый файл, что позволяет существенно уменьшить объем используемой оперативной памяти.

Рассмотрим интерфейс пользователя вычислительного комплекса "Твердофазная экструзия". На рис. 2 представлено главное окно, которое появляется на экране при запуске программы. В этом окне пользователю предоставляется возможность посмотреть модель экструдера или начать работу непосредственно с самим ПК.

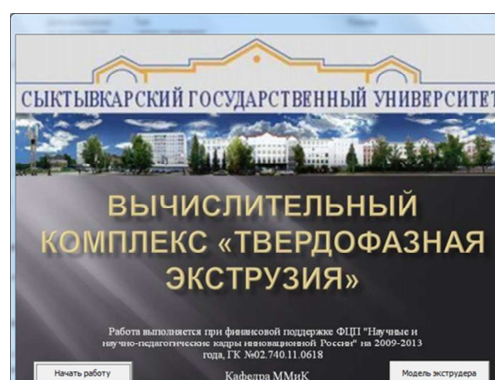


Рис. 2: Главное окно

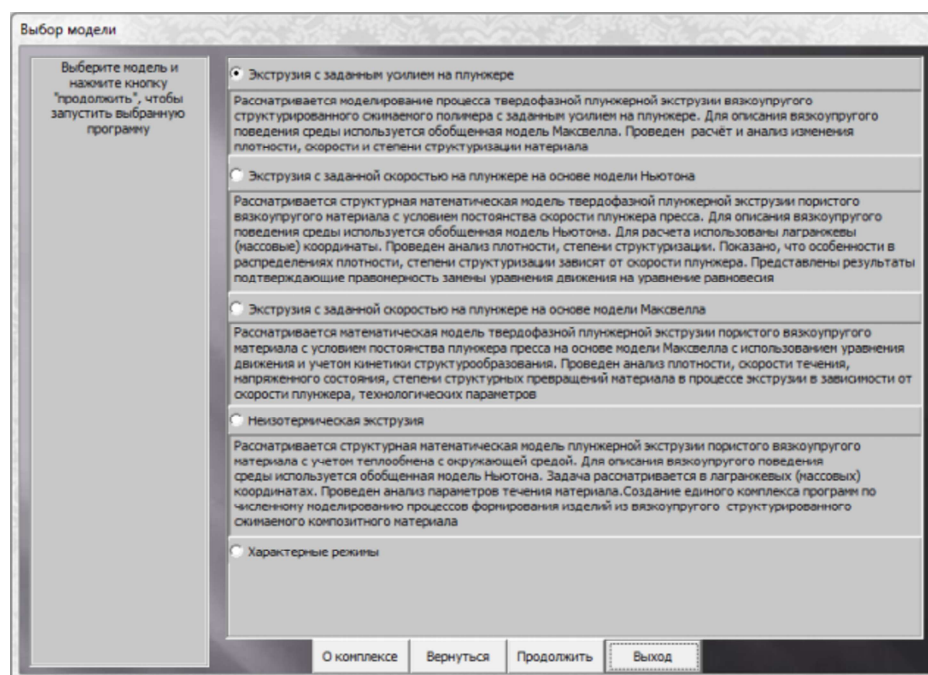


Рис. 3: Окно выбора

Работа с комплексом начинается с его краткого описания. Далее

пользователь выбирает интересующую его модель – рис. 3, знакомится с ее особенностями и приступает к работе с программой расчета выбранной модели. Для примера на рис. 4 приведено окно работы с моделью неізотермической экструзии. Интерфейс каждой программы позволяет пользователю изменять рабочие параметры и самому оценивать влияние тех или иных параметров на процесс выдавливания посредством сравнения расчетных графиков кривых параметров течения: плотность, скорость движущейся среды в камере и калибре, напряжение в камере, степень структурирования среды, температура в камере и калибре.

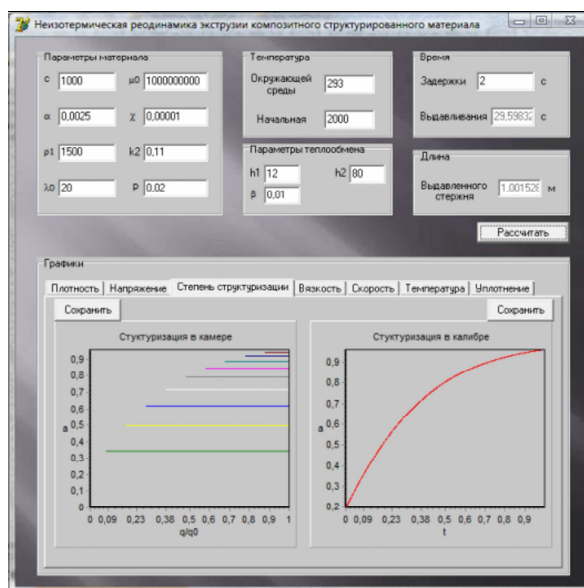


Рис. 4: Неізотермическая экструзия

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим [2] процесс выдавливания вязкоупругого композитного сжимаемого материала из цилиндрической камеры в направляющий калибр под действием плунжера прессы. Ось симметрии заготовки примем в качестве оси  $z$ , положительное направление которой противоположно направлению движения поршня (рис. 5).

Начало координат  $z = 0$  свяжем с центром щели – вся область течения разделится на два отдельных участка: движение внутри камеры между перемещающимся поршнем  $z = H(t)$  и выходным отверстием  $z = 0_+$  и течение внутри калибра между  $z = 0_-$  (входное отверстие в калибре) и свободной поверхностью  $z = -L(t)$ ,  $t$  – время. Движение смеси в каждой из областей считаем одномерным с одной ненулевой компонентой скорости  $V_z = V \neq 0$ . Радиус поперечного сечения камеры

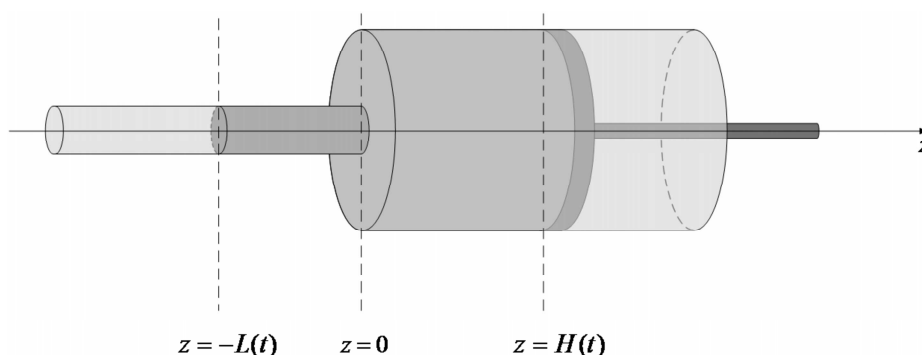


Рис. 5: Модель экструдера

$r_0$ , на дне камеры имеется круглое отверстие радиуса  $r_1$ , через которое происходит выдавливание материала в направляющий калибр того же радиуса.

В рамках рассматриваемого одномерного подхода процесс полностью описывается системой уравнений: неразрывности, движения (или равновесия), дифференциального уравнения состояния, диффузионно-кинетического уравнения, уравнения теплопроводности, соответствующими начальными и граничными условиями. Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V) = 0, \quad (1)$$

где  $V = V(z, t)$  — скорость течения материала,  $\rho = \rho(z, t)$  — плотность. Уравнение движения

$$\rho_1 \rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \quad (2)$$

здесь  $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(z, t)$  — осевая компонента напряжения.

В уравнении (2) зачастую пренебрегают инерционными и нестационарными членами в силу малости числа Рейнольдса и заменяют уравнение движения на более простое — уравнение равновесия. В этом случае компонента напряжения  $\sigma_{zz}$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

из которого следует, что продольное усилие не меняется вдоль оси камеры и является функцией лишь временной координаты.

Дифференциальное уравнение состояния среды запишем на основе обобщенной модели Максвелла (в этом случае тензор напряжения имеет лишь одну ненулевую компоненту  $\sigma_{zz} = \sigma(z, t)$ ):

$$\dot{\sigma} + \frac{G}{\mu}\sigma = G\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4)$$

или модели Ньютона

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\sigma_{ij}div(\vec{V})\right) + \lambda\sigma_{ij}div(\vec{V}), \quad (5)$$

где  $\mu = \mu(a(z, t))$ ,  $\lambda = \lambda(a(z, t))$ ,  $G = \mu_0/t_r$  — сдвиговая, объемная вязкость и модуль сдвига, соответственно, зависящие от степени структурных превращений  $a$  (концентрации межмолекулярных сшивок),  $t_r$  — время релаксации. Для определения степени структурных превращений воспользуемся диффузионно-кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V\frac{\partial a}{\partial z} = D\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \Phi(a, \sigma), \quad (6)$$

где

$$\Phi(a, \sigma) = -k_0\exp(p\sigma)a + k_2(1 - a) = k_2[1 - a - a\chi\exp(p\sigma_{zz})].$$

Здесь  $\chi = k_0/k_2$  — отношение констант скоростей разрушения и образования сшивок,  $k_0\exp(p\sigma)a$  — коэффициент скорости разрушения.

Обычно выдавливание материала происходит в матрицу, имеющую коническую форму, которая в данной работе не учитывается. Это допущение справедливо при относительно короткой конической части. С учетом сохранения массы материала закон сопротивления отверстия запишется в виде:

$$V(0_+, t) = -\frac{S_1 k_1 |\sigma(t)|^m}{S_0 \rho_1 \rho(0, t)}, \quad (7)$$

$$V(0_-, t) = -\frac{k_1 |\sigma(t)|^m}{\rho_1 \rho(0, t)} \quad (8)$$

— скорость на отверстии в камере и калибре, соответственно. В соотношении (7)  $S_0$  — площадь сечения камеры,  $S_1$  — площадь сечения калибра.

Задача определения параметров течения в процессе экструдирования среды решается в лагранжевых (массовых) координатах:  $(q; t_l)$ ,  $t_l$  —

лагранжево время, совпадающее с реальным временем  $t$ ; массовая координата  $q$  имеет смысл относительной массы материала, находящейся между переменным сечением  $z$  и свободной поверхностью  $z = -L(t)$ . Таким образом,

$$q = \frac{M}{S_0 \rho_1} = \int_0^z \rho(s, t) ds + \frac{S_1}{S_0} \int_{-L(t)}^0 \rho(s, t) ds, \quad (9)$$

где  $M$  — масса материала, находящегося в указанном сечении. При  $z = H(t)$  относительная масса равна полной массе, то есть  $q = q_0$ . В начальный момент времени

$$t = 0 : q = q_0, H(t) = H_0.$$

Введем обозначение  $q^*$  — элементарная масса, находящаяся на отверстии в рассматриваемый момент времени. Тогда в камере  $q \in [q^*, q_0]$ ,  $q^* = \bar{P}t$  где  $\bar{P}$  — средняя скорость перемещения нижней границы. Нижняя граница камеры в массовых координатах становится подвижной: в каждый момент времени разные элементарные массы находятся на отверстии. Таким образом, интервал изменения массовой координаты  $q$  для элементарных объемов, находящихся в камере, имеет постоянную верхнюю границу  $q_0$  и изменяющуюся во времени нижнюю границу  $q^*$ . В калибре  $q \in [0, q^*]$ , и со временем длина этого интервала увеличивается.

### 2.1. Экструзия с заданным усилием на плунжере

Предполагается [2-5], что на плунжере пресса задано давление  $\sigma = \sigma(t)$ , зависящее от времени, тогда в лагранжевых координатах получим следующую систему уравнений, описывающих процесс экструзии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (10)$$

$$\rho(q; 0) = \rho_0(q) \quad (11)$$

— уравнение неразрывности, соответствующее (1), с начальными условиями для плотности.

Уравнение движения заменяется на уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q} = 0, \quad (12)$$

и в силу заданного усилия на плунжере выполняется условие:

$$\sigma|_{q=q_0} = \sigma(t), \quad (13)$$

которое и определяет напряжение в камере. Закон сопротивления отверстия (7), (8) примет вид:

$$V(\bar{P}t; t) = -\frac{S_1 k_1 |\sigma(t)|^n}{S_0 \rho_1 \rho(\bar{P}t; t)} \quad (14)$$

Вязкоупругое поведение материала описывается уравнением:

$$\dot{\sigma} + \frac{G}{\mu} \sigma = G \frac{\partial V}{\partial q} \rho, \quad (15)$$

Диффузионно-кинетическое уравнение (6) с начальными и граничными условиями преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V \rho \frac{\partial a}{\partial q} = D \rho^2 \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + k_2 [1 - a - a \chi \exp(p\sigma)], \quad (16)$$

$$a|_{t=0} = a(q; 0) = a^0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial a}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial a}{\partial q} \Big|_{q=\bar{P}t} = 0. \quad (18)$$

Система уравнений (10) - (18) является замкнутой системой относительно плотности материала, скорости течения, степени структурных превращений.

На рис. 6 приведен один из результатов численного эксперимента на основе предложенной модели.

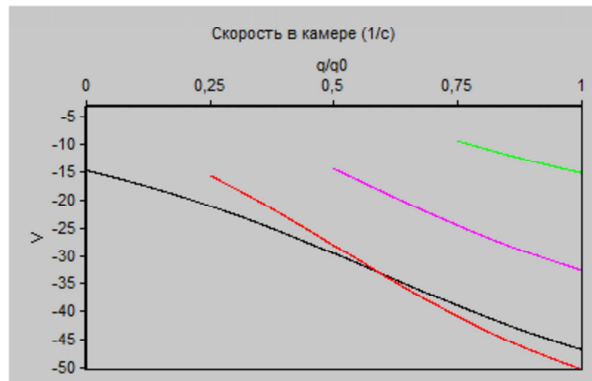


Рис. 6: Изменение скорости в камере



## 2.2. Экструзия с заданной скоростью

Процесс экструзии с заданной скоростью [2, 4-9] описывается следующей системой соотношений: уравнение неразрывности (10) с начальными условиями для плотности (11);

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\rho \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \sigma}{\partial q} \quad (19)$$

— уравнение движения, соответствующее (2);

$$V|_{q=q_0} = V_0, \quad (20)$$

— условие постоянства скорости плунжера пресса;

$$V_+(q^*; t) = -\frac{S_1 k_r |\sigma(q^*; t)|^m}{S_0 \rho_1 \rho(q^*; t)}, \quad (21)$$

$$V_-(q^*; t) = -\frac{k_r |\sigma(q^*; t)|^m}{\rho_1 \rho(q^*; t)} \quad (22)$$

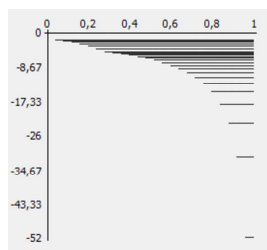
— закон сопротивления отверстия, соответствующий (7), (8);

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V\rho \frac{\partial a}{\partial q} = D \left[ \rho^2 \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \rho \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial q} \right] + k_2 [1 - a - a \chi \exp(p\sigma)], \quad (23)$$

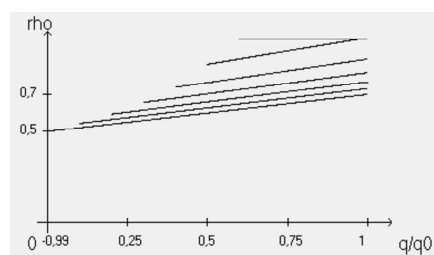
$$a|_{t=0} = a^0(q) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial a}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial a}{\partial q} \Big|_{q=\bar{P}t} = 0 \quad (25)$$

— диффузионно-кинетическое уравнение (6) с начальными и граничными условиями.



а)



б)

Рис. 7: а) изменение степени структуризации, б) изменение плотности в камере

В случае использования модели Максвелла компонента тензора напряжения удовлетворяет уравнению (15), а в случае модели Ньютона компоненты тензора подчиняются уравнению (5), из которого следует:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\rho \frac{\partial V}{\partial q}, \quad (26)$$

$$\sigma_q = \left(\lambda + \frac{4}{3}\mu\right)\rho \frac{\partial V}{\partial q}. \quad (27)$$

Системы уравнений (10)-(11), (19) - (25) и (15), или (26)-(27) являются замкнутыми системами относительно плотности материала, скорости течения, степени структурных превращений. Некоторые результаты численного эксперимента на основе предложенных моделей показаны на рис. 7.

### 2.3. Характерные режимы экструзии

Рассматривается структурная модель твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого материала из цилиндрической камеры в направляющий калибр меньшего радиуса с условием постоянства усилия на плунжере прессы: (13)-(16),(18).

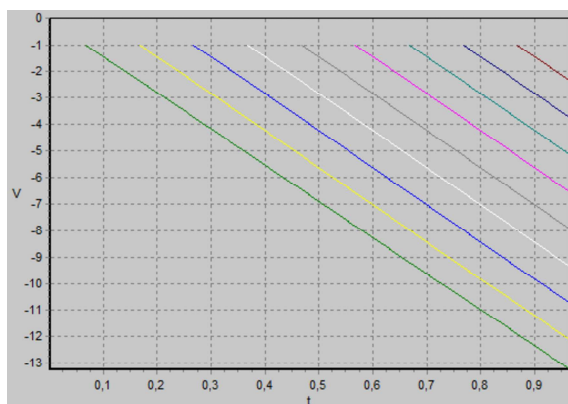


Рис. 8: Изменение степени структуризации в камере

Задача определения характерных режимов экструзии решается [2, 10-12] посредством введения безразмерных параметров:

$$\bar{q} = \frac{q}{q_0}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \bar{q}, \bar{\mu} \in [0, 1]; \tau = \frac{t}{t^x}, \tau \in [0, 1]; \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = -1, \bar{p} = p\sigma_0; \quad (28)$$

$$V = \frac{V}{V^*}, V^* = \left| -\frac{S_1}{S_0} \frac{k_r \sigma_0^m}{\rho_1} \right|; \beta = t^x D/q_0^2, \bar{\chi} = k_2/k_1. \quad (29)$$

Здесь  $V^*$  - скорость выдавливания в калибр полностью уплотненного материала,  $t^x$  - характерное время процесса. Задача имеет три масштаба характерных времен:

$$t_\nu = q_0/V^*, t_c = \mu_0/|\sigma_0|, t_s = 1/(k_1 \exp(\bar{p})), \quad (30)$$

где  $t_\nu$  - характерное время выдавливания,  $t_c$  - уплотнения,  $t_s$  - структурирования экструдированного материала. В зависимости от соотношений между введенными характерными временами (30) возможны качественно различные режимы экструзии. Один из результатов численного эксперимента на основе предложенной модели показан на рис. 8.

#### 2.4. Неизотермическая экструзия

В рамках рассматриваемого одномерного подхода рассматриваются [2, 13, 14] следующие определяющие соотношения: (10), (21), (22), (23), (25), (26), (27);

$$\frac{\partial T^1}{\partial t} + V\rho \frac{\partial T^1}{\partial q} = \frac{1}{c\rho_1} \frac{\partial}{\partial q} \left( \rho\lambda(\rho) \frac{\partial T^1}{\partial q} \right) - \frac{2\alpha}{c\rho_1\rho r_1} (T^1 - T_0); \quad (31)$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial t} + V\rho \frac{\partial T^2}{\partial q} = \frac{1}{c\rho_1} \rho\lambda(\rho) \frac{\partial^2 T^2}{\partial^2 q} - \frac{2\alpha}{c\rho_1\rho r_2} (T^2 - T_0); \quad (32)$$

$$T^1(q, 0) = T^*; \quad (33)$$

$$\rho \Big|_{t=0} = \rho_0(q), \quad a \Big|_{t=0} = 0; \quad (34)$$

$$\rho\lambda(\rho) \frac{\partial T^1}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = -h_1 (T^1 - T_0) \Big|_{q=q_0}; \quad (35)$$

$$\rho\lambda(\rho) \frac{\partial T^2}{\partial q} \Big|_{q=0} = -h_2 (T^2 - T_0) \Big|_{q=0};$$

$$T^1 \Big|_{q=q^*} = T^2 \Big|_{q=q^*}, \quad -\rho\lambda(\rho) \frac{\partial T^2}{\partial q} \Big|_{q=q^*} = \frac{S_2}{S_1} \rho\lambda(\rho) \frac{\partial T^1}{\partial q} \Big|_{q=q^*}; \quad (36)$$

$$\sigma_{qq} \Big|_{q=q_0} = \sigma_0. \quad (37)$$

Здесь (10) — уравнение неразрывности,  $V = V(q, t)$  — скорость течения материала; начальные условия для распределения плотности — первое соотношение в (34); (31), (32) — уравнения теплопроводности в камере и калибре, соответственно, где  $T = T(q, t)$  — текущая температура, ( $T^1$  — температура в камере,  $T^2$  — в калибре,  $c$  — теплоемкость материала,  $\lambda = \lambda(\rho)$  — коэффициент теплопроводности вещества,  $\alpha$  — коэффициент теплообмена через боковые стенки. В начальный момент времени заготовка имеет температуру, заданную вторым соотношением в (34). При этом равенства (35) задают теплообмен с окружающей средой на плунжере и конце выдавленного в калибр стержня. Соотношение (36) означает непрерывность температурного поля (первое соотношение) и равенство тепловых потоков в камере и калибре на отверстии. Уравнение (23) — диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структуризации  $a = a(q, t)$ , с начальным и граничными условиями (34) и (25). При этом левая часть соотношения (25) означает непроникновение вещества через плунжер, а правая говорит об отсутствии структуризации на отверстии при переходе из камеры в калибр. Соотношения (26), (27) — дифференциальные уравнения состояния на основе обобщенной модели Ньютона; здесь  $\mu = \mu(a, \rho, T) = \mu_0 \exp(-\beta(T - T^*) - k_a(1 - a))\rho^l$  и  $\xi = \xi(a, \rho, T) = \frac{4}{3} \frac{\mu(a, \rho, T)}{1 - \rho}$  — сдвиговая и объемная вязкости. Граничные условия (21), (22) — следствие закона гидравлического сопротивления отверстия — определяют скорость материала на отверстии в камере и калибре, соответственно. Условие (36) задает напряжение на плунжере.

Приведем один из результатов численного эксперимента на основе предложенной модели — рис. 9.

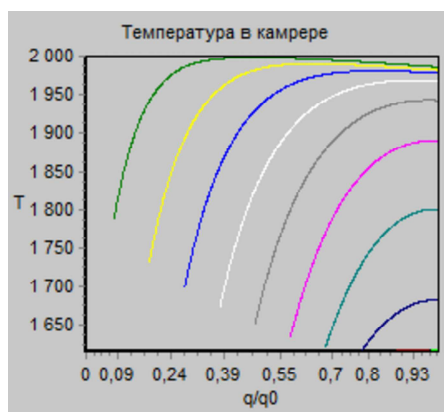


Рис. 9: Изменение температуры в камере

### 3. Заключение

Таким образом, в работе представлен программный комплекс, объединяющий программы по численному моделированию процессов плунжерной экструзии вязкоупругого сжимаемого композитного материала при различных технологических условиях процесса формирования длинномерных изделий. Комплекс имеет удобный пользовательский интерфейс, требует небольшого объема оперативной памяти.

## Литература

1. **Фаронов В.В.** Delphi 6. Учебный курс. М.: Издатель Молгачева С.В., 2001. 672 с.
2. **Беляева Н.А.** Деформирование вязкоупругих структурированных систем: монография. Lap Lambert Academic Publishing GmbH Co. KG, Germany. 2011. 200 с.
3. **Беляева Н.А., Смолев Л.В.** Экструзия с заданным усилием на плунжере пресса // Федеральное агентство по образованию. ОФАП. Свид. об отрасл. регистрации разработки № 7945. 30.03 2007.
4. **Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С.** Кинетика уплотнения и структуризации в твердофазной экструзии вязкоупругой среды // Инженерная физика. 2007. № 5. С. 34-41.
5. **Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С.** Динамика твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого структурированного материала // Теоретические основы химической технологии, 2008. № 5. С. 579-589.
6. **Беляева Н.А.** Твердофазная экструзия с условием постоянства скорости плунжера пресса // Федеральное агентство по образованию. ОФАП. Свид. об отрасл. регистрации разработки № 7946. 30.03 2007.
7. **Беляева Н.А., Столин А.М., Пугачев Д.В., Стельмах Л.С.** Неустойчивые режимы деформирования при твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // ДАН, 2008. Т. 420. № 6. С. 777-780.
8. **Беляева Н.А., Никонова Н.Н.** Структурная модель экструзии с использованием обобщенной модели Ньютона // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер.1: математ., мех., информ. Вып.10. 2009. С. 83-90.

9. **Беляева Н.А., Спиридонов А.В.** Уравнение движения в одномерной модели экструзии // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер.1: математ., мех., информ. Вып.10. 2009. С. 91-96.
10. **Беляева Н.А.** Характерные времена в структурной модели твердофазной экструзии // Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (Механика сплошных сред как основа современных технологий). Электронный ресурс: оптический диск CD. Тезисы докладов. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009. С. 60.
11. **Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С.** Режимы твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // Инженерная физика. 2009. № 1. С. 10-16.
12. **Беляева Н.А.** Влияние характерных времен на режимы твердофазной экструзии // Вестник Сыктывкарского университета. Сер 1. Вып. 9. 2009. С. 46-53.
13. **Беляева Н.А., Прянишникова Е.А.** Структурирование в неизо-термической модели экструзии композитного материала // Вестн. Сыктывкарского ун-та.- Сер.1: математ., мех., информ. Вып.12. 2010. С. 97-108.
14. **Беляева Н.А., Прянишникова Е.А.** Структурная неизо-термическая математическая модель экструзии сжимаемого композитного материала. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010616996, 19 октября 2010 г.

### Summary

**Belyaeva N. A., Kamburov D. M.** Computing system "Solid-phase extrusion"

Computing system combines algorithms and software modules for calculating the parameters of viscoelastic flow of a compressible structured composite material in the solid-phase extrusion, developed at the Department of Mathematical Modelling and Cybernetics of Syktyvkar State University.

*Keywords:* computing complex, plunger extrusion, structured composite viscoelastic compressible material.