Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.14.2011

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ПЛАСТИН ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ[1]

А. В. Ермоленко

Используя уравнения типа Ка́рмана–Тимошенко–Нагди, приведенные к произвольной базовой поверхности, получено при помощи метода обобщенной реакции решение контактной задачи для круглой осесимметричной пластины с абсолютно жестким основанием.

Ключевые слова: теория пластин, контактная задача, метод обобщенной реакции.

1. Уравнения типа Ка́рмана–Тимошенко–Нагди, приведенные к нижней лицевой поверхности

В работе [1] построена теория плоских пластин на основе подхода, используемого при выводе уравнений типа Кармана–Тимошенко–Нагди [2]. Особенностью построенной теории является то, что все неизвестные функции полевых уравнений приведены к произвольной базовой поверхности, а не к срединной поверхности, как это обычно делается.

Если в качестве базовой поверхности взять нижнюю лицевую поверхность, то уравнения изгиба плоских пластин принимают вид [1]

$$D\Delta^2 w = q_n - h_*^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta) L(\Psi, w), \qquad (1.1)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 \Psi = \frac{\nu}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2} L(w, w), \qquad (1.1)_2$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, ГК № 02.740.11.0618.

$$\psi_{\alpha,\alpha} = -\frac{1}{\mu h}(q_n + L(\Psi, w)). \qquad (1.1)_3$$

Здесь h — толщина пластины, $q_n = q_n^+ - q_n^-$ — нормальная нагрузка; $m_n = hq_n^+$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; по повторяющемуся в одночлене греческому индексу α следует суммировать от 1-го до 2-х;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, h_\psi^2 = h_*^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \qquad (1.2)_1$$

$$L(\Psi, w) = \Psi_{,11}w_{,22} - 2\Psi_{,12}w_{,12} + \Psi_{,22}w_{,11}; \qquad (1.2)_2$$

$$\Delta w = w_{,11} + w_{,22}, w_{,i} \stackrel{\Delta}{\equiv} \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Заметим, что система (1.1) по внешнему виду совпадает с уравнениями типа Кармана–Тимошенко–Нагди. Однако следует помнить, что неизвестные функции w (прогиб), Ψ (функция напряжения), ψ_i, $i = 1, 2$ (поперечные сдвиги) являются функциями нижней лицевой плоскости. Кроме этого изменяются выражения для фиктивного момента m_n и константы h_*^2.

В данной статье показывается, что использование системы (1.1) упрощает решение контактных задач со свободной границей.

2. Осесимметричное контактное взаимодействие круглой пластины с абсолютно жестким основанием

Рассмотрим круглую пластину радиуса R и толщины h, которая расположена параллельно абсолютно жесткому идеально гладкому основанию с зазором Δ. Считаем, что пластина, испытывающая действие равномерной нормальной нагрузки $q_n^+ \equiv q_0 = \text{const}$, жестко закреплена по контуру таким образом, что реализуется осесимметричный изгиб. Также предполагаем, что пластина выстилается по основанию без зазоров.

Переходим к безразмерным полярным координатам (ρ, φ) по формулам

$$x_1 = R\rho\cos\varphi, x_2 = R\rho\sin\varphi;$$

$$R\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin\varphi, R\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi, \qquad (2.1)$$

где $\rho \in [0, 1]$.

Учитывая осесимметричность задачи, уравнения (1.1) с учетом (2.1) принимают вид

$$D\Delta^2 w = R^4 q_n - h_*^2 R^2 \Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Psi, w), \qquad (2.2)_1$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Psi = \frac{\nu R^2}{Eh}\Delta m_n - \frac{1}{2}L(w,w), \qquad (2.2)_2$$

$$\psi_{\alpha,\alpha} = -\frac{R}{\mu h}(q_n + L(\Psi, w)). \qquad (2.2)_3$$

Здесь

$$L(\Psi,w) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\frac{d\Psi}{d\rho}\frac{dw}{d\rho}\Big), L(w,w) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\frac{dw}{d\rho}\Big)^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\frac{d}{d\rho}\Big),\ \psi_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\psi_\rho)}{d\rho}. \qquad (2.2')$$

Граничные условия жестко защемленного тангенциально свободного края выражаются равенствами

$$w(1) = 0, -\frac{1}{R}w_{,\rho}(1) + \psi_\rho(1) = 0, \Psi(1) = 0, \Psi_{,\rho}(1) = 0. \qquad (2.3)$$

Для того чтобы условия (2.3) стали однородными, сделаем замену

$$w = \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho, \qquad (2.4)$$

где $\bar{\psi}_\rho = \psi_\rho(1)$.

Учитывая, что $\rho^2\ln\rho$ является фундаментальным решением бигармонического уравнения, систему (2.2) можно представить в виде

$$\Delta^2\widetilde{w} = \frac{1}{D}[R^4 q_n - h_*^2R^2\Delta q_n + (I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Psi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho)],$$

$$\Delta^2\Psi = \nu R^2\Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(\widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\psi_\rho)}{d\rho} = -\frac{R}{\mu h}[q_n + \frac{1}{R^4}L(\Psi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho\rho^2\ln\rho)]. \qquad (2.5)$$

Граничные условия с учетом замены (2.4) принимают вид

$$\widetilde{w}(1) = 0,\ \widetilde{w}_{,\rho}(1) = 0,\ \Psi(1) = 0,\ \Psi_{,\rho}(1) = 0. \qquad (2.6)$$

Функции Грина для вычисления $\widetilde{w}$ и Ψ совпадают и имеют вид

$$G(\rho,\xi) = G_\Psi(\rho,\xi) = G_w(\rho,\xi) = \frac{1}{4}\xi[(\xi^2+\rho^2)\ln\frac{\rho}{\xi} + (\xi^2-\rho^2)]H(\rho-\xi) +$$

$$+\frac{1}{8}\xi[2(\rho^2+\xi^2)\ln\xi + (1+\rho^2)(1-\xi^2)]. \qquad (2.7)$$

Здесь H — функция Хевисайда.

Учитывая, что в данной задаче имеется два вида нагрузки (активная постоянная нормальная нагрузка q_0 и реакция основания $r(\rho) \equiv q_n^-(\rho)$), и используя функцию Грина (2.7), решение краевой задачи (2.5), (2.6) записывается в виде следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\widetilde{w}(\rho) = \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4(q_0 - r(\xi)) + R^2 h_*^2 \Delta r(\xi) +$$

$$+(I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Psi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln\xi)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\Psi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(\widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln\xi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \xi^2 \ln\xi)]G(\rho,\xi)d\xi,$$

$$\bar{\psi}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Psi, \widetilde{w} + R\bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln\rho))d\rho. \qquad (2.8)$$

Заметим, что в последнем выражении вычисляется значение только в одной точке.

Теперь в системе (2.8) делаем обратную замену и окончательно получаем

$$w(\rho) = R\bar{\psi}_\rho \rho^2 \ln\rho + \frac{1}{D}\int_0^1 [R^4(q_0 - r(\rho)) + R^2 h_*^2 \Delta r(\rho) +$$

$$+(I - \frac{h_\psi^2}{R^2}\Delta)L(\Psi, w)]G(\rho,\xi) \triangleq F_1(\rho, r(\rho), w(\rho), \Psi(\rho), \bar{\psi}_\rho),$$

$$\Psi(\rho) = \int_0^1 [\nu R^2 \Delta m_n - \frac{1}{2}EhL(w,w)]G(\rho,\xi)d\xi \triangleq F_2(\rho, r(\rho), w(\rho)), \qquad (2.9)$$

где

$$\bar{\psi}_\rho = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_n + \frac{1}{R^4}L(\Psi, w))d\rho. \qquad (2.9')$$

Для решения поставленной контактной задачи используем метод обобщенной реакции [3], для применения которого учтем, что функция $r(\rho)$ должна удовлетворять следующим естественным условиям:

$$r(\rho) \geq 0,\ w < \Delta,\ r(\rho)(w - \Delta) = 0. \qquad (2.10)$$

Неравенство $(2.10)_1$ указывает на односторонность связи. Условие $(2.10)_2$ выражает условие непроникновения пластины через основание. Равенство $(2.10)_3$ называется условием дополняющей нежесткости и связывает неравенства $(2.10)_1$ и $(2.10)_2$: если $r > 0$ (имеется сила контактного взаимодействия), то $w = \Delta$ (элементы соприкасаются), если $w < 0$ (элементы не соприкасаются), то $r = 0$.

Замечание. Если использовать теорию пластин, в которой все величины приведены к срединной поверхности, то вместо условия $(2.10)_2$ следует использовать условие $w^{h/2} \leq 0$, в котором прогиб нижней лицевой поверхности $w^{h/2}$ выражается через функции срединной поверхности по формуле [2]

$$w^{-h/2} = w - \frac{h}{2}\Big[- \frac{\nu}{Eh}\frac{1}{R^2}\Delta\Psi + \frac{q_0 + r(\rho)}{2E}\Big] +$$
$$+ \frac{h^2}{8}\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{R^2}\Delta w + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{Eh}(q_0 - r(\rho) + 2\nu L(\Psi, w))\Big]. \blacksquare$$

Условия (2.10) эквивалентны одному нелинейному уравнению

$$r = [r + \beta(w - \Delta)]_+, \beta > 0, \tag{2.11}$$

где φ_+ – положительная срезка функции: $\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|)$.

Решение сформулированной контактной задачи получим на основе итерационной схемы. При этом для прогиба используется стационарная схема Ричардсона:

$$w_k = (1-\tau)w_{k-1} + \tau F_1(\rho, r_{k-1}, w_{k-1}, \Psi_k, \bar{\psi}_{\rho k}), \qquad (2.12)_1$$

где

$$\bar{\psi}_{\rho k} = -\frac{R}{\mu h}\int_0^1 \rho(q_0 - r_{k-1} + \frac{1}{R^4}L(\Psi_{k-1}, w_{k-1}))d\rho, \Psi_k = F_2(\rho, r_{k-1}, w_{k-1}),$$

а для реакций — метод простых итераций:

$$r_k = [r_{k-1} + \beta(w - \Delta)]_+. \qquad (2.12)_2$$

Начальное приближение определяем следующим образом:

$$r_0 = 0, w_0 = \frac{R^4}{D}\int_0^1 G(\rho, \xi) q_0 d\xi.$$

Если при этом прогиб нижней лицевой поверхности окажется меньше, чем зазор Δ, то контактная задача не состоялась и процесс (2.12) на этом прекращается.

На рисунке 1 приведен результат расчета для круглой пластины со следующими геометрическими и физическими параметрами:

$$q_0 = 10^5 \text{ Па}, \nu = 0,34, E = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$R = 0,4 \text{ м}, h = 0,01 \text{ м}, \Delta = 0,001 \text{ м}.$$

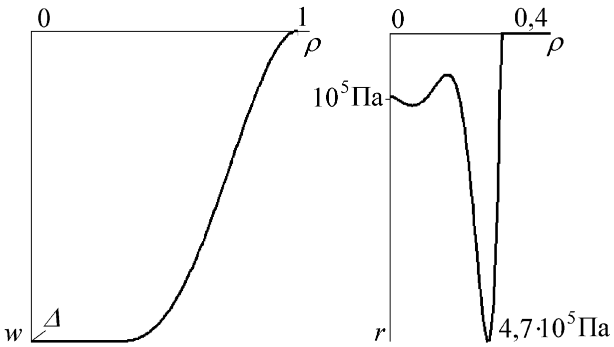

Рис. 1. Прогиб (w) и реакции (r)

Литература

1. **Ермоленко А.В.** Теория плоских пластин типа Кармана–Тимошенко–Нагди относительно произвольной базовой плоскости // *В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.*

2. **Михайловский Е.И., Бадокин К.В., Ермоленко А.В.** Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Мат. Мех. Инф. Вып. 3. 1999. С. 181–202.*

3. **Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.*

Summary

Yermolenko A. V. A variant of the refined theory of flat plates for the solution of contact problems

Using the method of generalized reaction it was obtained the solution of contact problem for an axisymmetric circular plate and an absolutely rigid base. In addition the solution was obtained with using the Karman–Timoshenko–Naghdi type equations, which were given to the lower surface of the plate.

Keywords: theory of plates, contact problem, method of generalized reaction.

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 01.10.2011*