*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1. Вып.14.2011*

**УДК 539.2**

# ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАР

***В. Л. Никитенков, А. А. Холопов***

Решена задача о нахождении точных значений оптимальных параметров так называемого метода аддитивного расщепления для решения операторного уравнения $x = b - Ax$ в банаховом пространстве. Оптимальные параметры максимально расширяют спектральную область сходимости метода вдоль вещественной оси.
*Ключевые слова:* область сходимости, полином Чебышева, двойственная задача, оптимальные параметры.

## $1^0$. Постановка задачи.

В работах авторов [1,2] рассмотрена рекуррентная процедура

$$x_{p+n} = b - \alpha_1 A\, x_p - \alpha_2 A\, x_{p+1} - \cdots - \alpha_n A\, x_{p+n-1}, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

$$\alpha_1 + \cdots\ + \alpha_n = 1, \tag{2}$$

находящая при $p \to \infty$ и при сходимости (1) решение уравнения

$$x = b - Ax. \tag{3}$$

В (1)–(3) $n$ - натуральное число, $b, x, x_0, x_1, \ldots$ - векторы банахова пространства $X$, $A$ - непрерывный линейный оператор в нем, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ - произвольный набор начальных векторов и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вещественные параметры.

Известно, что сходимость линейных рекуррентных процедур зависит от значений $\mu$ точек спектра $\sigma(A)$ оператора $A$. Например, при

$n = 1$ (метод простых итераций) точка спектра $\mu$ должна находиться в единичном открытом круге $B_1 = \{\mu : |\mu| < 1\}$ комплексной плоскости. В этом случае $B_1$ является областью *гарантированной* сходимости, или *спектральной* областью сходимости. При $n > 1$ спектральная область сходимости (1) зависит от параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1/n$ спектральная область сходимости (1) содержит интервал $(-1,\ n)$ вещественной оси. Естественно возникает задача о нахождении таких параметров $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$, при которых спектральная область сходимости (1) включала бы себя интервал $(-1,\ M)$ максимальной длины: $M \to \sup\limits_{(\alpha)}$. Правда, при оптимальных значениях $\alpha^*$ интервал $(-1,\ M^*)$ будет содержаться лишь в замыкании спектральной области сходимости, так что оптимальность следует понимать лишь в предельном смысле.

В работе [2], на основе предполагаемой (но не доказанной) формы спектральной области сходимости при оптимальных значениях $\alpha^*$, а также на основе нескольких недоказанных свойств матриц определенного вида (лемма-гипотеза в [2]), была получена система линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) для нахождения $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$.

В настоящей работе мы доказываем все предположения [2], кроме того, указанная СЛАУ точно решена, то есть получены точные формулы для $\alpha_j^*$. Весь анализ основан на использовании свойств некоторых ортонормированных базисов, составленных из точек делений круга, а также, как и в [2], на идее использования свойств двойственных задач линейного программирования.

Расчеты, дословно повторяющие из [2], будут опущены. Все вспомогательные утверждения приведены и доказаны в конце работы.

## $2^0$. Основной результат.

**Теорема.** Оптимальные значения $\alpha^*,\ M^*$ даются формулами

$$\alpha_p^* = \frac{2p}{n+1} \sin \frac{p\,\pi}{n+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\,(n+1)}, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$M^* = \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(n+1)}\right]^2 = \frac{4n^2}{\pi^2}\,(1 + o(1)). \tag{5}$$

**Доказательство.** В работах [1, 2] задача нахождения $\alpha^*$ сведена к задаче параметрического программирования

$$\begin{gathered} h = M^{-1} = \alpha_n - \alpha_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_1 \to \min \\ Q(\alpha,\, t) = \alpha_1 U_{n-1}(t) + \cdots + \alpha_n U_0(t) \geqslant 0\ , \quad t \in [-1, 1]\, , \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1\, . \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $U_p(t) = \dfrac{\sin{(p+1)\,\omega}}{\sin\omega}$, $t = \cos\omega$– полином Чебышева второго рода порядка $p$. Ниже будут использованы также полиномы Чебышева первого рода, заданные равенствами $T_p(t) = \cos p\,\omega$, $t = \cos\omega$.

В отличие от [1, 2] никаких предположений о количестве корней $Q(\alpha, t)$ в отрезке $[-1, 1]$ мы делать не будем. Но будет доказано, что *внутренних* корней, то есть в интервале $(-1, 1)$, должно быть ровно $k = [\frac{n-1}{2}]$ и еще есть один корень $t = -1$ при четном $n$.

Будет доказано также, что $h^* > 0$ и переход от $M \to \max$ к $h \to \min$ является корректным.

Заменим несчетную совокупность ограничений (6) на *конечную* совокупность вида $Q(\alpha,\, r_i) \geqslant 0$, $i = 1, \dots, N$, при произвольных ( и различных) значениях $r_i \in [-1, 1]$, среди множества которых *обязательно* должны быть корни полинома $Q(\alpha^*, t)$.

Ниже будет показано, что полученные задачи линейного программирования (ЗЛП)

$$\begin{array}{l} h = (-1)^{n-1}\alpha_1 + \ldots - \alpha_{n-1} + \alpha_n \to \min \\ \alpha_1 \cdot U_{n-1}(r_1) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(r_1) \geqslant 0 \\ \alpha_1 \cdot U_{n-1}(r_2) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(r_2) \geqslant 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \alpha_1 \cdot U_{n-1}(r_N) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(r_N) \geqslant 0 \\ \alpha_1 \quad + \qquad \cdots \qquad + \alpha_n = 1 \end{array} \tag{7}$$

имеют общее, независимое от выбора множеств $\{r_i\}$, оптимальное решение $\alpha^*$, при котором полином $Q(\alpha^*,\, t)$ имеет корни $t_1, \dots, t_m$. Тогда $\alpha^*$ и будет решением (6).

Итак, необходимо решить ЗЛП (7). Эта ЗЛП допускает двойственную ЗЛП с переменными $z_1,\, \dots\, , z_N$, $y$, причем $z_1$ соответствует первому условию-неравенству в (7), $z_2$ – второму неравенству и так далее, $y$ соответствует последнему условию-равенству.

В свою очередь, переменная $\alpha_1$ соответствует первому условию двойственной ЗЛП, $\alpha_2$– второму условию и так далее.

Двойственная ЗЛП имеет вид

$$\begin{array}{l}
y \to \max \\
U_{n-1}(r_1)z_1 + \cdots + U_{n-1}(r_N)z_N + y = (-1)^{n-1} \\
U_{n-2}(r_1)z_1 + \cdots + U_{n-2}(r_N)z_N + y = (-1)^{n-2} \\
\qquad \cdots \\
U_0(r_1)\,z_1 + \cdots + U_0(r_N)\,z_N + y = 1 \\
z_1 \geqslant 0, \;\; z_2 \geqslant 0, \;\; \ldots, \;\; z_N \geqslant 0\,.
\end{array} \tag{8}$$

Согласно теории двойственных ЗЛП, оптимальные решения задач (7) и (8) существуют или не существуют одновременно. В условиях (8) двойственной ЗЛП нулевые значения $z_j$ могут быть опущены. Покажем, что условиям (8) для каждого $n$ удовлетворяет лишь один комплект неизвестных ( с точностью до нулевых значений $z_j$). Очевидно, этот комплект и является оптимальным решением (8).

Из теории двойственных ЗЛП также следует, что:

$h^* = y^*$ (совпадение значений целевых функций),
$z_j^*\, Q(\alpha^*, r_j) = 0,\; j = 1, \ldots, N$ (условия дополняющей нежесткости).

Из условий дополняющей нежесткости следует, что при $z_j^* > 0$ выполнено $Q(\alpha^*, r_j) = 0$ и $r_j$ совпадает с каким-либо корнем полинома $Q(\alpha^*, t)$ в отрезке $[-1, 1]$. Обозначим эти корни через $\tau_1, \ldots, \tau_m$, а соответствующие ненулевые значения $z_j^*$ через $b_1, \ldots, b_m$. Нулевым значениям $z_j^*$ также могут соответствовать какие-то корни $Q(\alpha^*, t)$, поэтому $m$ не более числа всех различных корней, хотя ниже будет показано, что возможно только равенство.

Теперь условия ЗЛП (8) можно записать в виде

$$\begin{array}{l}
U_{n-1}(\tau_1)b_1 + \cdots + U_{n-1}(\tau_m)b_m + y = (-1)^{n-1} \\
U_{n-2}(\tau_1)b_1 + \cdots + U_{n-2}(\tau_m)b_m + y = (-1)^{n-2} \\
\qquad \cdots \\
U_0(\tau_1)\,b_1 + \cdots + U_0(\tau_m)\,b_m + y = 1 \\
b_1 > 0, \; \ldots, \; b_m > 0\,.
\end{array}$$

Избавимся от $y$, для этого вычтем третье (сверху) равенство из первого, четвертое из второго и так далее. При очередном вычитании используем старые равенства. Дополнительно вычтем последнее равенство из предпоследнего и получим условия в виде

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} [U_{n-1}(\tau_j) - U_{n-3}(\tau_j)]\ b_j &= 0 \\
&\dots \\
\sum_{j=1}^{m} [\,U_2(\tau_j) - U_0(\tau_j)]\ b_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} [U_1(\tau_j) - U_0(\tau_j)]\ b_j &= -2 \\
b_1 > 0,\ \dots,\ b_m > 0\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для решения (9) рассмотрим различные случаи соотношения целых неотрицательных чисел $m$, $l$, $k$ и четности $n$, где

$m$ – число положительных переменных $b_j$ в (9), не большее числа всех различных корней $Q(\alpha^*, t)$,

$n = 2k+1$ при нечетном $n$ и $n = 2k+2$ при четном $n$,

$l$ – число различных внутренних корней среди $\tau_j$, $\quad j = 1, \dots, m$ (обозначим их, не умаляя общности, через $\tau_1, \dots, \tau_l$).

Так как $Q(\alpha^*, t) \geqslant 0$ в окрестности любого внутреннего корня, то $\tau_1, \dots, \tau_l$ являются корнями четной (не менее 2) кратности. Всего корней с учетом кратности должно быть не более, чем $(n-1)$ – порядок $Q(\alpha^*, t)$ при $\alpha_1^* \neq 0$. Тогда для $m$, $l$, $k$ справедливы неравенства

1) $m \leqslant l + 2$ (возможно, есть еще корни $t = \pm 1$),

2) $l \leqslant k$ (внутренние корни имеют кратность не менее двух),

3) $l \leqslant m$.

Из 1) – 3) следует, что возможны следующие 9 случаев:

I. $m < k$, $\ n = 2k+1$;
II. $m < k+1$, $\ n = 2k+2$;
III. $m = k$, $\ n = 2k+1$, $\ l = k-1$, $\ \tau_m = 1$ кратности 2;
IV. $m = k$, $\ n = 2k+1$, $\ l = k-1$, $\ \tau_m = -1$ кратности 2;
V. $m = k$, $\ n = 2k+1$, $\ l = k$ ;
VI. $m = k+1$, $\ n = 2k+1$, $\ l = k-1 = m-2$, $\ \tau_{m-1} = -1$, $\ \tau_m = 1$;
VII. $m = k+1$, $\ n = 2k+2$, $\ l = k-1$, $\ \tau_{m-1} = -1$, $\ \tau_m = 1$;
VIII. $m = k+1$, $\ n = 2k+2$, $\ l = k$, $\ \tau_m = 1$;
IX. $m = k+1$, $\ n = 2k+2$, $\ l = k$, $\ \tau_m = -1$.

Система (9) имеет $n-1$ линейное уравнение и $m$ неизвестных, поэтому она *переопределена* при $k \geqslant 1$. Именно переопределенность системы (9) дает возможность найти корни $\tau_1, \ldots, \tau_m$.

Если $k = 0$, то решения ЗЛП (7) – (8) несложно находятся:
при $n = 1,\ m = l = 0$ верно $M^* = y^* = \alpha_1^* = 1$,
при $n = 2,\ \ m = 1,\ \ l = 0$ получаем

$$\tau_1 = -1,\ b_1 = 2/3,\ h^* = y^* = 1/3,\ \ M^* = 3,\ \alpha_1^* = 1/3,\ \alpha_2^* = 2/3\,.$$

Во всех случаях будем предполагать $m > 0$, так как в ЗЛП (8) $m = 0$ возможно лишь при $n = 1$.

Покажем, что (9) разрешима лишь в случаях V и IX.

### **Случай I.** $m < k,\ n = 2k + 1.$

При нечетном $n$ система однородных уравнений (9) имеет среднее по счету ($k$-е по порядку сверху) уравнение $\sum\limits_{j=1}^{m} v_j = 0$, где обозначено

$$v_j = \left[U_{k+1}(\tau_j) - U_{k-1}(\tau_j)\right]\ b_j\,. \tag{10}$$

Сложим два соседних со средним уравнения (9) и получим

$$\sum_{j=1}^{m} \left[U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j) + U_k(\tau_j) - U_{k-2}(\tau_j)\right] b_j = 0.$$

Для полиномов Чебышева справедливы рекуррентные соотношения для всех $p$

$$\begin{aligned} T_{p+1}(t) &= 2t\ \cdot T_p(t) - T_{p-1}(t) \\ U_{p+1}(t) &= 2t\ \cdot U_p(t) - U_{p-1}(t)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом (11) при $p = k + 1$ и при $p = k - 1$, слагаемое в квадратной скобке принимает вид

$$2\tau_j\left(U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)\right).$$

Умножение на $b_j$ и сложение по $j$ дает равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j\, v_j = 0\,.$$

Аналогично, складывая попарно следующие, равноотстоящие от среднего, уравнения (9), и учитывая уже полученные равенства для $v_j$, приходим к однородной СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = \sum_{j=1}^{m} \tau_j \cdot v_j = \ldots = \sum_{j=1}^{m} {\tau_j}^{k-1} \cdot v_j = 0.$$

Так как $m-1 < k-1$, то ограничимся первыми $m$ равенствами и получим квадратную однородную СЛАУ относительно неизвестных $v_1, \ldots, v_m$ с определителем Вандермонда для матрицы этой системы. Известно, что определитель Вандермонда равен

$$\prod_{i<j} (\tau_j - \tau_i).$$

Так как все корни $\tau_1, \ldots, \tau_m$ различны, то этот определитель не равен нулю и однородная система имеет лишь нулевое решение

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0. \tag{12}$$

Сократив на $b_j > 0$, приходим к равенствам

$$U_{k+1}(\tau_j) - U_{k-1}(\tau_j) = 0, \;\; j = 1, \ldots, m.$$

Полином $U_{k+1}(t) - U_{k-1}(t) = 2\,T_{k+1}(t)$ имеет $k+1$ внутренний корень вида

$$t_j = \cos\omega_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}, \;\; j = 0, \ldots, k. \tag{13}$$

Таким образом, $\tau_1, \ldots, \tau_m$ совпадают (скажем: занимают) с какими-то $m$ корнями (13), оставляя свободными $k+1-m \geqslant 2$ корней (13). Обозначим через $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_k$ какие-либо $k-m \geqslant 1$ корней (13) из числа оставшихся свободными. Последний оставшийся свободным корень (13) обозначим через $\tau_0$.

Расширим число неизвестных в (9) до $k$, введя формально переменные $b_{m+1} = 0, \ldots, b_k = 0$ и, соответственно, $v_{m+1}, \ldots, v_k$ по тем же формулам, что и в (10).

Равенства (12) показывают, что среднее уравнение в (9) является тождеством. Аналогичные тождества

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j \, v_j = \ldots = \sum_{j=1}^{m} {\tau_j}^{k-1} \, v_j = 0\,,$$

полученные сложением равноотстоящих от среднего уравнений (9), показывают линейную зависимость первых $k-1$ от остальных и также могут быть опущены. Оставшаяся система равенств является квадратной неоднородной СЛАУ относительно неизвестных $b_1, \dots, b_k$ с правой частью $(0, 0, \dots, -2)^\top$ и матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} T_k(\tau_1) & \cdots & T_k(\tau_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_k) \\ 2T_1(\tau_1) - 1 & \cdots & 2T_1(\tau_k) - 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В последнем уравнении использовано равенство $u_1(t) - u_0(t) = 2t - 1 = 2T_1(t) - 1$.

Согласно утверждению 2 (все утверждения приведены в конце статьи, после доказательства теоремы) матрица (14) является невырожденной, поэтому полученная СЛАУ имеет единственное решение (40)

$$b_j = 2\,\frac{\tau_0 - \tau_j}{(k+1)(1+\tau_0)}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Но это противоречит равенству $b_k = 0$, так как все $\tau_j$ различны. Таким образом, решения (8) в случае I нет.

**Случай II.** $m < k+1, \ n = 2k+2.$

При четном $n$ в системе (9) есть $2k$ однородных уравнений и средним уравнением будем считать также $k$–е по порядку сверху уравнение $\sum\limits_{j=1}^{m} v_j = 0$, где обозначено $v_j = [U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j)]\; b_j$.

Далее все рассуждения случая I повторяются и снова получаем равенства (12), или

$$[U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j)]\; b_j = 0\,.$$

Полином $U_{k+2}(t) - U_k(t) = 2\,T_{k+2}(t)$ имеет $k+2$ внутренних корней вида

$$t'_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+2}, \quad j = 0, \dots, k+1\,,$$

которые совпадают с (13), если $k$ заменить на $k+1$: $n+1 = 2k+2$ в случае I, $n+2 = 2k+4 = 2(k+1)+2$ в случае II.

Добавим снова $b_{m+1} = \ldots = b_{k+1} = 0$ и получим квадратную СЛАУ относительно неизвестных $b_1, \dots, b_{k+1}$ с матрицей (14) и правой частью $(0, 0, \dots, -2)^\top$. Эта СЛАУ по формуле (40) имеет ненулевые решения, что противоречит условию $b_{k+1} = 0$. Таким образом, решения (8) в случае II также нет.

**Случай III.** $m = k,\ n = 2k+1,\ \tau_k = 1.$

Повторяем те же преобразования, что и в случае I. Только теперь нет лишних равенств в (9) и мы не можем добавлять дополнительную нулевую переменную $b_k = 0$. Но противоречивость (9) видна раньше, так как $\tau_k = 1$ не может быть корнем (13). Действительно, $U_{k+2}(1) - U_k(1) = 2$, так как $U_p(t) = p$, что следует, например, из (11) и определения $U_p$.

Таким образом, решения (8) в случае III также нет.

**Случай IV.** $m = k,\ n = 2k+1,\ \tau_k = -1.$

Повторяем те же преобразования, что и в случае III. Так как теперь $\tau_k = -1$, то он не может быть корнем (13). Действительно, из (11) и определения $U_p$ следует, что $U_{k+2}(-1) - U_k(-1) = (-1)^k 2 \neq 0$.

Таким образом, решения (8) в случае IV также нет.

**Случай V.** $m = k,\ n = 2k+1.$

Все корни внутренние, кратности 2. Повторив рассуждения случая I (только теперь дополнительных переменных нет), приходим к аналогичной СЛАУ с решением (40)

$$b_j = 2\frac{\tau_0 - \tau_j}{(k+1)(1+\tau_0)}\,, \quad j = 1, \dots, k.$$

Чтобы неравенства $b_j > 0$ в (9) выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы $\tau_0$ был старшим корнем (13) $\tau_0 = t_0 = \cos\dfrac{\pi}{n+1}$. Но $\tau_0$ единственный свободный корень из (13), поэтому можно считать, что $\tau_j = t_j$ при всех $j = 0, \dots, k$ являются искомыми корнями.

Показано таким образом, что оптимальное решение ЗЛП (8) при нечетном $n = 2k+1$ (в последнем возможном для нечетного $n$ случае VI, исследованном ниже, решения также нет), дается формулой

$$b_j = 2\,\frac{t_0 - t_j}{(k+1)(1+t_0)} \;=\; 2\,\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_j}{(k+1)(1+\cos\omega_0)}, \quad j = 1, \dots, k\,, \qquad (15)$$

где $t_j$, $\omega_j$ определены в (13).

Из симметричности $\omega_j$ относительно угла $\omega = \pi/2$ видно, что $\sum\limits_{j=0}^{k} t_j = 0$ или $\sum\limits_{j=1}^{k} t_j = -t_0$. Используя это равенство при сложении в (15), получаем

$$y^* = 1 - \sum_{j=1}^{k} b_j = \frac{1-t_0}{1+t_0} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

По теореме двойственности целевые функции двойственных ЗЛП (7) и (8) совпадают в оптимальных решениях: $h^* = (M^*)^{-1} = y^*$, откуда получается $M^* = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

Формула (5) при нечетном $n$ доказана.

**Случай VI.** $m = k+1,\ n = 2k+1,\ \tau_k = -1,\ \tau_{k+1} = 1.$

В этом случае число неизвестных $k+1$ больше числа однородных уравнений для получения равенств(12), и нельзя действовать так, как в случае I. Выполним другие преобразования в (9). Выделим из сумм в (9) слагаемые с $\tau_k$, $\tau_{k+1}$. С учетом равенств $U_{p+2}(1) - U_p(1) = 2$ и $U_{p+2}(-1) - U_p(-1) = (-1)^p\, 2$ получаем СЛАУ

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1} \left[U_{2k}(\tau_j) - U_{2k-2}(\tau_j)\right]\ b_j + 2b_k + 2b_{k+1} = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\sum_{j=1}^{k-1} \left[U_{3}(\tau_j) - U_{1}(\tau_j)\right]\ b_j - 2b_k + 2b_{k+1} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{k-1} \left[U_{2}(\tau_j) - U_{0}(\tau_j)\right]\ b_j + 2b_k + 2b_{k+1} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{k-1} \left[U_{1}(\tau_j) - U_{0}(\tau_j)\right]\ b_j - 3b_k + b_{k+1} = -2 \\
&\ b_1 > 0,\ \ldots,\ b_{k+1} > 0\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Покажем, что первые $k-1$ однородных уравнений (16) могут быть опущены, так как являются линейно зависимыми от остальных.

Вычтем $(k+1)$-е равенство из $(k-1)$-го, $(k+2)$-е из $(k-2)$-го и так далее. Наконец, последнее однородное уравнение вычтем из первого. Всего будет $k-1$ новых уравнений, в которых отсутствуют неизвестные $b_k$, $b_{k+1}$. Первое новое уравнение запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j = 0\,,$$

где обозначено

$$v_j = [U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j) - U_k(\tau_j) + U_{k-2}(\tau_j)]\ b_j\ .$$

Выражение в квадратной скобке можно упростить, используя соотношения (11):

$$\begin{aligned}&U_{k+2}(\tau_j) - 2U_k(\tau_j) + U_{k-2}(\tau_j) =\\&2\tau_j\,[U_{k+1}(\tau_j) + U_{k-1}(\tau_j)]\ - 4U_k(\tau_j) =\\&4({\tau_j}^2 - 1)U_k(\tau_j)\,.\end{aligned}$$

Далее, в следующем новом уравнении

$$\begin{aligned}&U_{k+3}(\tau_j) - U_{k+1}(\tau_j) - U_{k-1}(\tau_j) + U_{k-3}(\tau_j) =\\&2\,\tau_j\,[U_{k+2}(\tau_j) + U_{k-2}(\tau_j)]\ - 2\ [2\,\tau_j U_k(\tau_j)]\ =\\&2\,\tau_j\,[U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j) - U_k(\tau_j) + U_{k-2}(\tau_j)]\ =\\&8\,\tau_j({\tau_j}^2 - 1)U_k(\tau_j)\,,\end{aligned}$$

что позволяет это новое уравнение записать в виде $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \tau_j\, v_j = 0\,.$

Аналогично, вычитая попарно следующие, равноотстоящие от среднего уравнения (16), и учитывая уже полученные равенства для $v_j$, приходим к квадратной однородной СЛАУ для $v_j$ с определителем Вандермонда и получаем $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Так как $\tau_j$ являются внутренними корнями, то после сокращения на $b_j$ и ${\tau_j}^2 - 1$ равенство $v_j = 0$ даст формулу $U_k(\tau_j) = 0$.

Полином $U_k(t)$ имеет $k$ внутренних корней вида

$$s_j = \cos\frac{j\pi}{k+1} = \cos\frac{2j\pi}{n+1}\,,\ \ j = 1, \ldots, k\,. \qquad (17)$$

Следовательно, $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ занимают какие-то $k-1$ корень из (17), оставляя свободным один корень, который обозначим через $\tau_0$.

Тождества $\sum\limits_{j=1}^{k-1} {\tau_j}^q v_j = 0, \quad q = 0, \ldots, k-2,$ полученные вычитанием равноотстоящих от среднего уравнений (16), показывают линейную зависимость первых $k-1$ от остальных и также могут быть опущены. Оставшаяся система равенств является квадратной неоднородной СЛАУ относительно $b_1, \ldots, b_{k+1}$ с матрицей

$$A_2 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_{k-1}) & (-1)^{k+1} & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_{k-1}) & 1 & 1 \\ 2T_1(\tau_1) - 1 & \cdots & 2T_1(\tau_{k-1}) - 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

и правой частью $(0, 0, \ldots, -2)^\top$.

Согласно утверждению 3 матрица (18) является невырожденной, поэтому полученная СЛАУ имеет единственное решение (42), в частности,

$$b_k = \frac{1}{(k+1)} > 0, \quad b_{k+1} = \frac{\tau_0 - 1}{(k+1)(1+\tau_0)} < 0\,.$$

Последнее неравенство противоречит условию $b_{k+1} > 0$. Таким образом, решения (8) в случае VI нет.

**Случай VII.** $m = k+1,\ n = 2k+2,\ \tau_k = -1,\ \tau_{k+1} = 1.$

Поступим так же, как в случае VI, и после отделения $b_k$ и $b_{k+1}$ получаем СЛАУ

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{k-1} \left[U_{2k+1}(\tau_j) - U_{2k-1}(\tau_j)\right] b_j - 2b_k + 2b_{k+1} = 0 \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{k-1} \left[U_3(\tau_j) - U_1(\tau_j)\right] b_j - 2b_k + 2b_{k+1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{k-1} \left[U_2(\tau_j) - U_0(\tau_j)\right] b_j + 2b_k + 2b_{k+1} = 0\,. \end{gathered} \tag{19}$$

Теперь в (19) четное ($2k$) число уравнений. Вычтем из первого уравнения (19) не последнее, а предпоследнее, и так далее. Индексы в полиномах Чебышева увеличены на единицу. Выполним те же преобразования и получим

$$v_j' = ({\tau_j}^2 - 1)\, U_{k+1}(\tau_j) b_j \ = 0,\ j = 1,\ \ldots\ , k-1.$$

Таким образом, $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ должны быть корнями вида

$$s_j' = \cos\frac{j\pi}{k+2}\,, \quad j = 1,\ \ldots\ , k+1\ . \tag{20}$$

Выполним вычитания в (19) еще раз, но по-другому. Вычтем из второго уравнения последнее, из третьего – предпоследнее и так далее. Как и в случае VI, приходим к выводу, что $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ должны быть корнями вида (17)

$$s_j = \cos\frac{j\pi}{k+1}\ \ j = 1, \ldots, k+1\ .$$

Но корни (17) и (20) не могут совпадать, так полиномы Чебышева являются классическими ортогональными полиномами, для которых выполнено свойство перемежаемости корней для двух последовательных полиномов. Впрочем, это видно и непосредственно из формул (17) и (20). Это противоречие показывает, что случай VII невозможен.

**Случай VIII.** $m = k+1,\ n = 2k+2,\ l = k,\ \tau_{k+1} = 1.$

Выделим в (9) слагаемое с $b_{k+1}$ и получим СЛАУ

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{2k+1}(\tau_j) - U_{2k-1}(\tau_j)\right]\, b_j\ +\ 2\, b_{k+1} = 0\\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_2(\tau_j) - U_0(\tau_j)\right]\, b_j\ +\ 2\, b_{k+1}\ =\ 0\\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_1(\tau_j) - U_0(\tau_j)\right]\, b_j\ +\ b_{k+1}\ =\ -2\ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Вычтем из первого уравнения (21) последнее, из второго предпоследнее и так далее. Последнюю, $k$ - ю разность запишем в виде $\sum\limits_{j=1}^{k} v_j = 0$, где $v_j = \left[U_{k+2}(\tau_j) - U_k(\tau_j) - U_{k+1}(\tau_j) + U_{k-1}(\tau_j)\right]\, b_j$ .

Упростив выражение в квадратных скобках, как и в случае VI, для $v_j$ получим более простое выражение

$$v_j = 2(\tau_j - 1)\,[U_{k+1}(\tau_j) + U_{k-1}(\tau_j)]\; b_j \;.$$

Предпоследняя разность приведет к уравнению $\sum_{j=1}^{k} (2\tau_j - 1)v_j = 0$, откуда $\sum_{j=1}^{k} \tau_j v_j = 0$, и так далее.

Делаем заключение, что $\tau_1, \ldots, \tau_k$ должны совпадать с корнями полинома $U_{k+1}(t) + U_{k-1}(t)$ вида

$$s_j = \cos\frac{2j\pi}{2k+3} = \cos\frac{2j\pi}{n+2}, \quad j = 1, \ldots, k+1 \;. \tag{22}$$

Пусть $\tau_0$ единственный оставшийся свободным корень (22). Отбросив первые $k$ уравнений (21), для $b_j$ получаем СЛАУ с матрицей

$$A_3 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_k) & 1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_{k-1}) & 1 \\ 2T_1(\tau_1) - 1 & \cdots & 2T_1(\tau_{k-1}) - 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

и правой частью $(0, 0, \ldots, -2)^{\top}$.

Согласно утверждению 4 матрица (23) является невырожденной, поэтому полученная СЛАУ имеет единственное решение (43) и, в частности,

$$b_{k+1} = -\frac{2}{(2k+3)(1+\tau_0)} < 0 \;.$$

Это неравенство противоречит условию $b_{k+1} > 0$. Таким образом, решения (8) в случае VIII нет.

**Случай IX.** $m = k+1,\; n = 2k+2,\; l = k,\; \tau_{k+1} = -1.$

Выделим в (9) слагаемое с $b_{k+1}$ и получим СЛАУ

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{2k+1}(\tau_j) - U_{2k-1}(\tau_j)\right] b_j - 2\, b_{k+1} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{2k}(\tau_j) - U_{2k-2}(\tau_j)\right] b_j + 2\, b_{k+1} = 0 \\
&\qquad\qquad \cdots \\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{3}(\tau_j) - U_{1}(\tau_j)\right] b_j - 2\, b_{k+1} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{2}(\tau_j) - U_{0}(\tau_j)\right] b_j + 2\, b_{k+1} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{k} \left[U_{1}(\tau_j) - U_{0}(\tau_j)\right] b_j - 3\, b_{k+1} = -2\ .
\end{aligned} \tag{24}$$

Сложим первое уравнение (24) с последним однородным, второе с предпоследним и так далее.

Как и в других случаях, получим $v_1 = \ldots = v_k = 0$, где

$$v_j = (\tau_j + 1)\left[U_{k+1}(\tau_j) - U_k(\tau_j)\right]\, b_j\ .$$

Следовательно $\tau_1, \ldots, \tau_k$ должны быть среди корней полинома $U_{k+1}(t) - U_k(t)$ вида

$$t_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2k+3} = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}\,, \quad j = 0, \ldots, k\ .$$

Это та же формула (13). Пусть снова $\tau_0$ единственный свободный корень (13), не совпадающий $\tau_j$ при $j = 1, \ldots, k$.

Отбросив первые $k$ уравнений (24), для неизвестных $b_j$ получаем СЛАУ с матрицей

$$A_4 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_k) & (-1)^{k+1} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_k) & 1 \\ 2T_1(\tau_1) - 1 & \cdots & 2T_1(\tau_k) - 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

и правой частью $(0, 0, \ldots, -2)^\top$.

Согласно утверждению 5, матрица (25) является невырожденной, поэтому полученная СЛАУ имеет единственное решение (44)

$$b_j = 4\,\frac{\tau_0 - \tau_j}{(2k+3)(1+\tau_0)}\,, \quad j = 1, \dots, k,$$
$$b_{k+1} = \frac{2}{(2k+3)}\,.$$

Чтобы неравенства $b_j > 0$ выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы $\tau_0$ был старшим корнем (13) $\tau_0 = t_0 = \cos\frac{\pi}{n+1}$. Но $\tau_0$ единственный свободный корень из (13), поэтому можно считать, что $\tau_j = t_j$ при всех $j = 0, \dots, k$.

Показано таким образом, что оптимальное решение ЗЛП (8) при четном $n = 2k+2$ также существует, единственно и дается формулами: при $j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} b_j &= 4\,\frac{t_0 - t_j}{(2k+3)(1+t_0)} = 4\,\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_j}{(2k+3)(1+\cos\omega_0)}\,, \\ b_{k+1} &= \frac{2}{2k+3}\,, \end{aligned} \tag{26}$$

где $t_j$, $\omega_j$ определены в (13).

Теперь симметричности $\omega_j$ относительно угла $\omega = \pi/2$ нет, но $2\sum\limits_{j=0}^{k} t_j - 1 = 0$, или $\sum\limits_{j=1}^{k} t_j = 1/2 - t_0$.

Используя это равенство при сложении в (26), получаем

$$y^* = 1 - \sum_{j=1}^{k+1} b_j = 1 - \sum_{j=1}^{k} 4\frac{t_0 - t_j}{(2k+3)(1+t_0)} - \frac{2}{2k+3} =$$
$$\frac{1-t_0}{1+t_0} = \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{2(2k+3)},$$

то есть ту же формулу, что и в случае нечетного $n$.

По теореме двойственности $M^* = \mathrm{ctg}^2\,\frac{\pi}{2(n+1)}$ и формула (5) при четном $n$ также доказана.

Установив значения корней $t_1, \dots, t_{k+1}$, теперь можно найти значения оптимальных параметров $\alpha_j^*$.

Из доказанного теперь представления

$$\begin{aligned} Q(\alpha, t) &= 2^{n-1}\alpha_1(t-t_1)^2(t-t_2)^2 \cdot \ldots \cdot (t-t_k)^2 \quad \text{при } n = 2k+1\,, \\ Q(\alpha, t) &= 2^{n-1}\alpha_1(t-t_1)^2(t-t_2)^2 \cdot \ldots \cdot (t-t_k)^2(t+1) \quad \text{при } n = 2k+2 \end{aligned}$$

для каждого внутреннего корня получаем два равенства:

$$Q(\alpha^*, t_j) = 0; \quad \frac{dQ(\alpha^*, t_j)}{dt} = 0\,. \tag{27}$$

Вычисляя производные в (27), исходя из определения $Q(\alpha^*, t)$ через полиномы Чебышева, можно найти следующие соотношения между значениями $\alpha_j^*$

$$\begin{array}{ll} \alpha_n^* = n \cdot \alpha_1^* & \\ 2 \cdot \alpha_n^* = (n-1) \cdot \alpha_2^* & \\ \quad \cdots & \\ k \cdot \alpha_{k+2}^* = (k+2) \cdot \alpha_k^* & n = 2k+1\,, \\ (k+1) \cdot \alpha_{k+2}^* = (k+2) \cdot \alpha_{k+1}^* & n = 2k+2\ . \end{array} \tag{28}$$

Соотношения (28) подробно выведены в [2] в предположении невырожденности матрицы $A_5$ из утверждения 6. Поэтому здесь их вывод не приводится, но невырожденность $A_5$ доказывается в утверждении 6.

## Получение точных формул для $\alpha_j^*$.

Условие (2) с учетом (28) дает равенство

$$\alpha_1^* \ + \ \frac{\alpha_2^*}{2} + \cdots + \frac{\alpha_k^*}{k} + \delta\frac{\alpha_{k+1}^*}{2(k+1)} = \frac{1}{n+1}\,, \tag{29}$$

где $\delta = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 2k+1, \\ 2, & \text{при } n = 2k+2\,. \end{cases}$

При нечетном $n = 2k+1$ корни $t_j$ удовлетворяют равенству $U_{k+1}(t_j) = U_{k-1}(t_j)$ , откуда по формулам (11) находим

$$U_{k+2}(t_j) = 2t_jU_{k+1}(t_j) - U_k(t_j) = 2t_jU_{k-1}(t_j) - U_k(t_j) = U_{k-2}(t_j)\,,$$

и так далее, $U_{2k}(t_j) = U_0(t_j)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} &Q(\alpha^*, t_j) = \\ &(\alpha_n^* + \alpha_1^*)U_{2k}(t_j) + \cdots + (\alpha_{k+2}^* + \alpha_k^*)U_{k-1}(t_j) + \alpha_{k+1}^*U_k(t_j) = \\ &(n+1)\,[\alpha_1^*U_0(t_j) + \cdots + \frac{\alpha_k^*}{k}\,U_{k-1}(t_j) + \frac{\alpha_{k+1}^*}{2(k+1)}\,U_k(t_j)\,] = 0\,. \end{aligned}$$

При четном $n=2k+2$ получаем из равенств

$$U_{k+1}(t_j)=U_k(t_j)\ ,\ \ U_{k+2}(t_j)=U_{k-1}(t_j)\ ,\ \dots\ ,\ \ U_{2k+1}(t_j)=U_0(t_j)$$

аналогичное представление, только в последнем коэффициенте не будет $2$ в знаменателе при $\alpha^*_{k+1}$.

Обозначим через $x_p$ переменные

$$x_p=\frac{\gamma\alpha^*_p}{2p)}\ ,\quad p=0,\dots,k\ , \tag{30}$$

где $\gamma=1$ только если одновременно $n=2k+1$ и $p=k+1$, $\gamma=2$ в остальных случаях.

Равенство $Q(\alpha^*,t_j)=0$ после разделения на $n{+}1$ даст условия $\sum\limits_{p=1}^{k+1}U_{p-1}(t_j)\,x_p\ =\ 0,\ \ j=1,\ \dots,k.$ Умножим их на $\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{n+1}=\sin\omega_j$ и из определения полиномов Чебышева получим однородные уравнения

$$\sum_{p=1}^{k+1}\sin p\frac{(2j+1)\pi}{n+1}\cdot x_p=0,\ \ j=1,\ \dots,k\,. \tag{31}$$

Для неизвестных $x_1,\ \dots,x_{k+1}$ из (30) условия (29) и (31) образуют СЛАУ с матрицей

$$A_6\ =\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \sin\dfrac{3\pi}{n+1} & \cdots & \sin\,(k+1)\dfrac{3\pi}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n+1} & \cdots & \sin\,(k+1)\dfrac{(2k+1)\pi}{n+1}\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Согласно утверждению 7, матрица (32) является невырожденной и полученная СЛАУ имеет единственное решение (46)

$$x_p=\frac{\gamma}{n+1}\sin\frac{p\pi}{n+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2\,(n+1)},\quad p=1,\ \dots,k+1\,.$$

Тогда из определения (30) для всех $n$, $p=1,\dots,k+1$ получаем

$$\alpha^*_p=\frac{px_p}{\gamma}=\frac{2p}{n+1}\sin\frac{p\pi}{n+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(n+1)},\ \ p=1,\dots,k+1\ ,$$

то есть формулу (4) при всех $n$ и всех $p=1,\dots,k+1$.

Из соотношений (28) следует справедливость (4) также и для $p = k+1 \ldots, n$. Теорема доказана.

### $3^0$. Ортонормированные базисы точек деления круга.

Обозначим через $c_p$ константы

$$c_0 = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,, \quad c_p = \sqrt{\frac{4}{n+1}} \quad , p \neq 0\,. \tag{33}$$

**Утверждение 1.**

1) Пусть при $n = 2k+1$ и $p = 0, \ldots, k$ через $a_p$ обозначены векторы

$$\begin{gathered} a_p = c_p \,(\cos\frac{p\pi}{n+1},\, \cos\frac{3p\pi}{n+1}, \ldots, \cos\frac{(2k+1)p\pi}{n+1}) = \\ = c_p \,(\,T_p(t_0),\, T_p(t_1), \,\ldots\,, T_p(t_k)\,)\,. \end{gathered} \tag{34}$$

Тогда $a_p$, $p = 0, \ldots, k$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+1}$.

2) Пусть при $n = 2k+1$ и $p = 1, \ldots, k$ через $b_p$ обозначены векторы

$$\begin{aligned} & b_p = c_p \left(\sin\frac{p\pi}{n+1},\, \sin\frac{3p\pi}{n+1}, \ldots, \sin\frac{(2k+1)p\pi}{n+1}\right)\,, \\ & b_{k+1} = c_0 \,\left(1,\, -1,\, \ldots\,,\, (-1)^k\right)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Тогда $b_p$, $p = 1, \ldots, k+1$, образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+1}$.

3) Пусть при $n = 2k+1$ и $p = 0, \ldots, k+1$ через $a_p$ обозначены векторы

$$a_p = c_p \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \cos\frac{2p\pi}{n+1},\, \cos\frac{4p\pi}{n+1}, \ldots, \cos\frac{2kp\pi}{n+1},\, (-1)^p\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,. \tag{36}$$

Тогда $a_p$, $p = 0, \ldots, k+1$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+2}$.

4) Пусть при $n = 2k+2$ и $p = 0, \ldots, k+1$ через $a_p$ обозначены

векторы

$$a_p = c_p \left( \cos\frac{2p\pi}{n+1},\ \cos\frac{4p\pi}{n+1}, \dots, \cos\frac{(2k+2)p\pi}{n+1},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) . \qquad (37)$$

Тогда $a_p, \quad p = 0, \dots, k{+}1$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+2}$.

5) Пусть при $n = 2k + 2$ и $p = 0, \dots, k + 1$ через $a_p$ обозначены векторы

$$a_p = c_p \left( \cos\frac{p\pi}{n+1},\ \cos\frac{3p\pi}{n+1}, \dots, \cos\frac{(2k+1)p\pi}{n+1},\ (-1)^p \frac{1}{\sqrt{2}} \right) . \qquad (38)$$

Тогда $a_p, \ p = 0, \dots, k{+}1$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+2}$.

6) Пусть при $n = 2k + 2$ и $p = 1, \dots, k + 1$ через $b_p$ обозначены векторы

$$b_p = c_p \left( \sin\frac{p\pi}{n+1},\ \sin\frac{3p\pi}{n+1}, \dots, \sin\frac{(2k+1)p\pi}{n+1} \right) . \qquad (39)$$

Тогда $b_p, \ p = 1, \dots, k$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}^{k+1}$.

**Доказательство.** Ортонормированность для всех наборов (34)–(39) доказывается подобно и стандартно использует свойства первообразных корней из единицы. Докажем, например, ортонормированность (38).

Обозначим через $\varepsilon = \exp{(\pi\, i/(n+1))} = \exp{(2\,\pi\, i/(4k+6))}$ первообразный корень из 1 порядка $2n{+}2 = 4k{+}6$. Тогда верны равенства $\varepsilon^{2k+3} = -1$; $\varepsilon^{2k+4} = \bar{\varepsilon}^{2k+2}$, и подобные.

Введем при $p = 0, \dots, k + 1$ векторы

$$b_p = c_p \left( \sin\frac{p\pi}{n+1},\ \sin\frac{3p\pi}{n+1}, \dots,\ \sin\frac{(2k+1)p\pi}{n+1},\ 0 \right)$$

и комплекснозначные векторы

$$\xi_p = {c_p}^{-1} (a_p + i b_p) = \left( \varepsilon^p,\ \varepsilon^{3p}, \dots, \varepsilon^{(2k+1)p},\ (-1)^p \frac{1}{\sqrt{2}} \right) .$$

Пусть $u \cdot v$ обозначает сумму произведений координат векторов $u, v$, как для вещественнозначных векторов (тогда $u \cdot v$ скалярное произведение, так и для комплекснозначных векторов (тогда $u \cdot \bar{v}$ скалярное произведение).

Тогда при $p, q = 0, \ldots, k+1$, $p \neq q$ справедливо

$$\xi_p \cdot \xi_q = \varepsilon^{p+q} + \varepsilon^{3(p+q)} + \cdots + \varepsilon^{(2k+1)(p+q)} + (-1)^{p+q}\,\frac{1}{2} =$$
$$\varepsilon^{p+q}\,\frac{1-\varepsilon^{2(k+1)(p+q)}}{1-\varepsilon^{2(p+q)}} + (-1)^{p+q}\,\frac{1}{2}\,.$$

Аналогично,

$$\bar{\xi}_p \cdot \bar{\xi}_q = \overline{\xi_p \cdot \xi_q} = \bar{\varepsilon}^{p+q}\,\frac{1-\bar{\varepsilon}^{2(k+1)(p+q)}}{1-\bar{\varepsilon}^{2(p+q)}} + (-1)^{p+q}\,\frac{1}{2}\,,$$

откуда

$$\xi_p \cdot \xi_q + \bar{\xi}_p \cdot \bar{\xi}_q = -\varepsilon^{2(k+1)(p+q)} + (-1)^{p+q} = 0\,.$$

Также, учитывая равенство $\xi_p \cdot \bar{\xi}_q = \xi_p \cdot \xi_{-q}$, получаем при $p \neq q$ $\xi_p \cdot \bar{\xi}_q + \bar{\xi}_p \cdot \xi_q = 0$.

Тогда при $p \neq q$

$$a_p \cdot a_q = \frac{c_p c_q}{4}\,(\xi_p \cdot \xi_q + \bar{\xi}_p \cdot \bar{\xi}_q + \xi_p \cdot \bar{\xi}_q + \bar{\xi}_p \cdot \xi_q) = 0\,,$$

что означает ортогональность векторов при $p \neq q$.

При $p = q \neq 0$ также верно $\xi_p \cdot \xi_p + \bar{\xi}_p \cdot \bar{\xi}_p = 0$, но

$$\xi_p \cdot \bar{\xi}_p \;=\; \bar{\xi}_p \cdot \xi_p \;=\; 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{2k+3}{2}\,,$$

поэтому, с учетом множителя (33),

$$a_p \cdot a_p = \frac{c_p^2}{4}\,(\xi_p \cdot \xi_p + \bar{\xi}_p \cdot \bar{\xi}_p + \xi_p \cdot \bar{\xi}_p + \bar{\xi}_p \cdot \xi_p) \;=\; c_p^2\left(\frac{2k+3}{4}\right) \;=\; 1\,.$$

$$a_0 \cdot a_0 = c_0^2\left(1,\ 1, \ldots, 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1,\ 1, \ldots, 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = c_0^2\left(\frac{2k+3}{2}\right) \;=\; 1\,.$$

Ортонормированность (38) доказана.

**Утверждение 2.** Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_k$ – различные корни вида (13). Последний оставшийся свободным корень (13) обозначим через $\tau_0$.

Тогда СЛАУ $A_1\,x = y$ с матрицей (14)

$$A_1 \;=\; \begin{pmatrix} T_k(\tau_1) & \cdots & T_k(\tau_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_k) \\ 2T_1(\tau_1) - 1 & \cdots & 2T_1(\tau_k) - 1 \end{pmatrix}$$

для произвольного $y = (y_1, \dots, y_k)^\top$ имеет единственное решение $x$, задаваемое при $p = 1, \dots, k$ формулой

$$
\begin{aligned}
x_p = {} & \frac{\tau_p - \tau_0}{(k+1)(1+\tau_0)}\, y_k + \\
& \frac{2}{(k+1)(1+\tau_0)} \sum_{j=2}^{k} \left[(1+\tau_0)T_j(\tau_p) - (1+\tau_p)T_j(\tau_0)\right] y_{k+1-j} \, .
\end{aligned} \tag{40}
$$

В частности, при $y = (0, 0, \dots, -2)^\top$ и $\tau_0 = t_0$, где $t_0$ –старший корень (13), получаем положительные решения $x_p > 0$.

**Доказательство.** Строки матрицы $A_1$ являются неполными и видоизмененными векторами $a_p$, $p = 1, \dots, k$ из набора (34). Неполнота заключается в отсутствии в строках $A_1$ координат, соответствующих свободному корню $\tau_0$, видоизменение заключается в перестановке порядка координат: $\tau_0, \dots, \tau_k$ вместо $t_0, \dots, t_k$ и отсутствии нормирующих множителей $c_p$. Порядок координат не влияет на свойство ортонормированности. Кроме того, в последней строке $A_1$ вместо $a_1$ находится линейная комбинация $a_1$ и $a_0$. Однако ясно, что систему $A_1 x = y$ можно расширить до системы $\tilde{A}_1 \tilde{x} = \tilde{y}$ так, чтобы $\tilde{A}_1$ имела строками базисные векторы (34), а при соответствующем подборе $\tilde{y}$ давала решение $A_1\, x = y$. Опишем последовательность такого расширения.

1) Добавим к вектоу $x$ переменную $x_0$ и образуем новый вектор $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k)^\top$. Соответственно к матрице $A_1$ добавим нулевой столбец из $T_p(\tau_0)$, подобный другим столбцам (в последней строке будет $2T_1(\tau_0) - 1$).

2) Добавим к уравнениям новое уравнение $x_0 + x_1 + \dots + x_k = y_{k+1}$.

3) Сложим добавленное уравнение с последним уравнением для системы $A_1\, x = y$, то есть с уравнением с правой частью $y_k$, и разделим полученную сумму на 2.

4) Умножим первые $k$ уравнений на нормирующий множитель $c_1$, а дополнительное на $c_0$ и получим систему

$$
\tilde{A}_1 \tilde{x} = \tilde{y} = \Bigl(c_1 y_1, c_1 y_2, \dots, c_1 y_{k-1}, c_1 \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, c_0 y_{k+1}\Bigr)^\top .
$$

Матрица $\tilde{A}_1$, состоящая из векторов ортонормированного базиса, является ортогональной, поэтому ее столбцы также образуют ортонормированный базис $a'_p$, $p = 0, \dots, k$. Систему $\tilde{A}_1 \tilde{x} = \tilde{y}$ можно представить в виде

$$
a'_0 x_0 + a'_1 x_1 + \dots + a'_k x_k = \tilde{y} \, ,
$$

что после скалярного умножения на $a_p'$ дает формулу

$$x_p = a_p' \cdot \tilde{y}, \quad p = 0, \dots, k\,. \tag{41}$$

Из (34) видно, что

$$a_p' = (\, c_1\, T_k(\tau_p), c_1\, T_{k-1}(\tau_p),\, \dots\,, c_1\, T_1(\tau_p), c_0\,)\,.$$

Подберем теперь $y_{k+1}$ так, чтобы дополнительная переменная $x_0 = 0$. Тогда разрешимость расширенной системы дает разрешимость исходной системы. Из (41) находим

$$x_0 = a_0' \cdot \tilde{y} = \sum_{j=2}^{k} c_1^2 \;\, T_j(\tau_0) \;\, y_{k+1-j} + c_1^2 \;\, T_1(\tau_0)\, \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + c_0^2 \;\, y_{k+1}.$$

Для равенства $x_0 = 0$ необходимо взять

$$y_{k+1} = -\left(\tau_0 y_k + 2\sum_{j=2}^{k} T_j(\tau_0) y_{k+1-j}\right) \frac{1}{1+\tau_0}.$$

Здесь учтено, что $T_1(\tau_p) = \tau_p$ и что $c_1^2 = 2c_0^2$. Тогда при $p = 1, \dots, k$ из (41) получаем

$$\begin{aligned}
&x_p = a_p' \cdot \tilde{y} = \sum_{j=2}^{k} c_1^2\, T_j(\tau_p) y_{k+1-j} + c_1^2\, \tau_p\, \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + c_0^2\, y_{k+1} = \\
&\frac{2}{n+1} \left[\, 2\sum_{j=2}^{k} T_j(\tau_p) y_{k+1-j} + y_k \tau_p + (1+\tau_p) y_{k+1} \right] = \\
&\frac{2}{(n+1)(1+\tau_0)}\, (\tau_p - \tau_0)\, y_k\, + \\
&\frac{4}{(n+1)(1+\tau_0)} \sum_{j=2}^{k} \left[(1+\tau_0) T_j(\tau_p) - (1+\tau_p) T_j(\tau_0)\right] y_{k+1-j}\,.
\end{aligned}$$

Так как $n = 2k + 1$, то получаем (40). Утверждение доказано.

**Утверждение 3.** Пусть $n = 2k + 1$ и $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ – различные корни вида (17)

$$s_j = \cos\frac{2j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \dots, k\,.$$

Последний оставшийся свободным корень (17) обозначим через $\tau_0$.

Тогда СЛАУ $A_2\, x = y$ с матрицей (18)

$$A_2 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_{k-1}) & (-1)^{k+1} & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_{k-1}) & 1 & 1 \\ 2T_1(\tau_1)-1 & \cdots & 2T_1(\tau_{k-1})-1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

для произвольного $y = (y_1, \ldots, y_{k+1})^\top$ имеет единственное решение $x$, а при $y = (0, 0, \ldots, -2)^\top$ это решение равно

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{2\,(\tau_0 - \tau_p)}{(k+1)(1+\tau_0)}, \quad p = 1, \ldots, k-1\,, \\ x_k &= \frac{1}{k+1} > 0\,, \\ x_{k+1} &= -\frac{1-\tau_0}{(k+1)(1+\tau_0)} < 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

**Доказательство** аналогично доказательству утверждения 2. При этом используется ортонормированный базис (36). Кроме того, в расширенной системе используется вектор неизвестных

$$\tilde{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \sqrt{2}\, x_k, \sqrt{2}\, x_{k+1})^\top .$$

**Утверждение 4.** Пусть $n = 2k+2$ и $\tau_1, \ldots, \tau_k$ – различные корни вида (22)

$$s_j = \cos\frac{2j\pi}{2k+3} = \cos\frac{2j\pi}{n+2}, \quad j = 1, \ldots, k+1\,.$$

Оставшийся свободным корень (22) обозначим через $\tau_0$.

Тогда СЛАУ $A_3\, x = y$ с матрицей (23)

$$A_3 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_k) & 1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_{k-1}) & 1 \\ 2T_1(\tau_1)-1 & \cdots & 2T_1(\tau_{k-1})-1 & 1 \end{pmatrix}$$

для произвольного $y = (y_1, \ldots, y_{k+1})^\top$ имеет единственное решение $x$, а при $y = (0, 0, \ldots, -2)^\top$ это решение равно

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{4(\tau_0 - \tau_p)}{(n+1)(1+\tau_0)}, \quad p = 1, \ldots, k\,, \\ x_{k+1} &= -\frac{2}{(n+1)(1+\tau_0)} < 0\,. \end{aligned} \tag{43}$$

**Доказательство** вполне аналогично доказательству утверждений 2, 3. При этом используется ортонормированный базис (37).

**Утверждение 5.** Пусть $n = 2k+2$ и $\tau_1, \ldots, \tau_k$ – различные корни вида (13)

$$t_j = \cos\frac{2j\pi}{2k+3} = \cos\frac{2j\pi}{n+1}, \quad j = 0, \ldots, k+1 \, .$$

Оставшийся свободным корень (13) обозначим через $\tau_0$.

Тогда СЛАУ $A_4\, x = y$ с матрицей (25)

$$A_4 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(\tau_1) & \cdots & T_{k+1}(\tau_k) & (-1)^{k+1} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ T_2(\tau_1) & \cdots & T_2(\tau_{k-1}) & 1 \\ 2T_1(\tau_1)-1 & \cdots & 2T_1(\tau_{k-1})-1 & -3 \end{pmatrix}$$

для произвольного $y = (y_1, \ldots, y_{k+1})^\top$ имеет единственное решение $x$, и при $y = (0, 0, \ldots, -2)^\top$ это решение равно

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{4\,(\tau_0 - \tau_p)}{(2k+3)(1+\tau_0)}, \quad p = 1, \ldots, k\,, \\ x_{k+1} &= \frac{2}{2k+3}\,. \end{aligned} \tag{44}$$

**Замечание.** Так как решения с правой частью $y = (0, \ldots, 0, 1)^\top$ пропорциональны по формуле Крамера алгебраическим дополнениям по последней строке, то утверждение доказывает справедливость пункта 2 леммы-гипотезы из работы [2].

**Доказательство** вполне аналогично доказательству утверждений 2 – 4. При этом используется ортонормированный базис (38).

**Утверждение 6.** При нечетном $n = 2k+1$ матрица $A_5$

$$A_5 = \begin{pmatrix} T_k(t_1) & T_k(t_2) & \cdots & T_k(t_k) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ T_2(t_1) & T_2(t_2) & \cdots & T_2(t_k) \\ T_1(t_1) & T_1(t_2) & \cdots & T_1(t_k) \end{pmatrix}$$

невырождена. Здесь $t_p, \quad p = 1, \ldots, k$ – корни (13).

Система $A_5\, x = y$ при $y = (0, \ldots, 0, 1)^\top$ имеет знакопостоянное (отрицательное) решение

$$x_p = \frac{2\,(t_p - t_0)}{n+1}\,, \quad p = 1, \ldots, k\,.$$

**Доказательство** аналогично доказательству утверждений 2 – 5. Используется ортонормированность базиса (34). Так как решения с правой частью $y = (0, \ldots, 0, 1)^\top$ пропорциональны по формуле Крамера алгебраическим дополнениям по последней строке, то утверждение доказывает пункт 1 леммы–гипотезы из [2].

**Утверждение 7.** Пусть при всех $n$ (четных и нечетных) значения $\omega_j$ заданы формулой (13): $\omega_j = \dfrac{(2j+1)\pi}{n+1}$, $j = 0, \ldots, k$.

Тогда СЛАУ $A_6\, x = y$ с матрицей (32)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \sin\omega_1 & \cdots & \sin(k+1)\omega_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\omega_k & \cdots & \sin(k+1)\omega_k \end{pmatrix}$$

для произвольного $y = (y_0, \ldots, y_k)^\top$ имеет единственное решение $x$, задаваемое при $p = 1, \ldots, k+1$ формулой

$$\begin{gathered} x_p = \gamma\, \sin p\omega_0\, \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2} y_0 + \\ \frac{2\gamma}{n+1}\, \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2} \sum_{j=1}^{k} \left[\sin p\omega_j \operatorname{ctg}\frac{\omega_0}{2} - \sin p\omega_0 \operatorname{ctg}\frac{\omega_j}{2}\right] y_j, \end{gathered} \tag{45}$$

где $\gamma = 1$ только если $n = 2k+1$, $p = k+1$, и $\gamma = 2$ в остальных случаях.

При $y = (1/(n+1),\, 0, \ldots, 0)^\top$ это решение равно

$$x_p = \frac{\gamma}{n+1}\, \sin\frac{p\pi}{n+1}\, \operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}, \quad p = 1, \ldots, k+1\,. \tag{46}$$

Утверждение доказывает пункт 3 леммы–гипотезы из [2].

**Доказательство.** Используем ортонормированность базисов (35) и (39) при нечетном и четном $n$ соответственно. В отличие от предыдущих случаев, неполными и видоизмененными базисными векторами являются столбцы матрицы $A_6$.

Заменим первое уравнение системы $x_1 + \cdots + x_{k+1} = y_0$ другим уравнением

$$\sin\omega_0\, x_1 + \cdots + \sin\omega_k\, x_{k+1} = y_0'\,,$$

где $y_0'$ требуется подобрать так, чтобы замененное уравнение выполнялось.

Для нормировки столбцов матрицы введем новые переменные $x'_p$ формулой

$$c_0\, x'_{k+1} = x_{k+1}, \quad \text{в случае} \quad n = 2k+1$$
$$c_1\, x' = x_p, \quad \text{в остальных случаях}\,.$$

Тогда систему с замененным уравнением относительно новых переменных можно записать в виде

$$b_1\, x'_1 + \,\cdots\, + b_{k+1}\, x'_{k+1} = z = (y'_0,\, y_1,\, \ldots\,, y_k)^\top$$

с базисными векторами $b_p$ из (35) или (39). Тогда

$$x'_p = b_p \cdot z = \sqrt{\frac{2\gamma}{n+1}}\, \left[\sin p\omega_0\;\; y'_0 + \sum_{j=1}^{k} \sin p\omega_j\;\; y_j\right]. \qquad (47)$$

Теперь найдем $y'_0$ из условия $x_1 + \cdots + x_{k+1} = y_0$:

$$y_0 = \sum_{p=1}^{k+1} \sqrt{\frac{2\gamma}{n+1}}\, x'_p = \frac{2}{n+1}\, y'_0 \sum_{p=1}^{k+1} \gamma \sin p\omega_0 + \sum_{p=1}^{k+1} \frac{2\gamma}{n+1} \sum_{j=1}^{k} \sin p\omega_j\, y_j\,.$$

Это выражение упрощается, так как

$$\sum_{p=1}^{k+1} \frac{2\gamma}{n+1} \sin p\omega_0 = \frac{4}{n+1} \sum_{p=1}^{k} \sin p\omega_0 + \frac{2}{n+1} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+1} =$$
$$\frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^{n} \sin \frac{q\pi}{n+1}$$

как для четных, так и для нечетных $n$.

Последняя сумма равна

$$Im\, [\exp\,(i\omega_0) + \,\cdots\, + \exp\,(in\omega_0)] =$$
$$Im\, \frac{1+\exp\,(i\omega_0)}{1-\exp\,(i\omega_0)} = \mathrm{ctg}\, \frac{\omega_0}{2} = \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{2(n+1)}\,.$$

Аналогично,

$$\sum_{p=1}^{k+1} \frac{2\gamma}{n+1} \sum_{j=1}^{k} \sin p\omega_j y_j = \sum_{j=1}^{k} y_j \sum_{p=1}^{k+1} \frac{2\gamma}{n+1} \sin p\omega_j =$$
$$\sum_{j=1}^{k} y_j \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^{n} \sin q\omega_j = \sum_{j=1}^{k} y_j \frac{2}{n+1}\, \mathrm{ctg}\, \frac{\omega_j}{2}\,.$$

Получаем

$$y_0 = \frac{2}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\omega_0}{2}\, y_0' + \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{ctg} \frac{\omega_j}{2}\, y_j\,,$$

или

$$y_0' = \frac{n+1}{2}\, y_0\ \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \sum_{j=1}^{k} y_j\ \operatorname{ctg} \frac{\omega_j}{2}\,.$$

Подставим это выражение в (47) и после упрощений получаем (45). Формула (46) получается из (45) очевидным образом. Утверждение доказано.

## Литература


1. **Никитенков В. Л., Холопов А. А.** Оптимальные области сходимости линейных многослойных итерационных процедур// *Вопросы функционального анализа (теория меры, упорядоченные пространства, операторные уравнения) : Межвуз. сб. науч. тр. /Сыктывкар: Сыкт. ун-т. 1991. С. 134 - 142.*

2. **Никитенков В. Л., Холопов А. А.** Оптимальные параметры метода аддитивного расщепления (МАР) // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 12. С. 53 - 70.*



**Summary**

**Nikitenkov V. L., Kholopov A. A.** The exact formulae for the optimal parameters of ASM

An additive-split method (ASM) is used for solving an equation $x = b - Ax$ in a Banach space with linear operator $A$. The exact formulae for the optimal parameters of ASM which extend mostly the real spectral interval of convergence are given.



*Keywords:* region of convergence, Chebyshev polynom, dual linear programming task, optimal parameters.


*Сыктывкарский университет* *Поступила 11.10.2011*