Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.14.2011

УДК 513.88

ЗАМЕЧАНИЯ О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ПРОСТРАНСТВ МАРЦИНКЕВИЧА И ОРЛИЧА, II

А. А. Меклер

На языке натуральных последовательностей даётся единая интерпретация некоторых топологических инвариантов функциональных пространств Орлича и Марцинкевича, в частности, их совпадения по запасу элементов.
Ключевые слова: пространство Орлича, пространство Марцинкевича, инвариант, функция, модуляра.

Мы приступаем к интерпретации $M-$ и $N-$инвариантов работы [9] – первой части настоящей статьи.

1. Натуральные базы

Определение 1. 1. Подмножество $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ будем называть *тривиальным*, если, найдётся $k_0 \in \mathbb{N}$, такое что $\{i \in \mathbb{N} : \ i \geq k_0\} \subset \mathbb{K}$, и *нетривиальным* в противном случае.
2. Будем называть *базой* любую строго возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел вида $b = \{b_k\}_{0 \leq k < \infty}$, где $b_0 = 0$, а $\{b_k\}_{k \geq 1}$ - нетривиальное подмножество натурального ряда. Нетривиальное множество $\mathbb{N} \setminus \{b_k\}_{k \geq 1} := \{b_{*k}\}_{k \geq 1}$, занумерованное в строго возрастающую последовательность и дополненное нулём, мы обозначаем $b_* := \{b_{*k}\}_{0 \leq k < \infty}$; база b_* называется *двойственной с* b. Понятно, что двойственность есть инволюция в классе $\mathfrak{b}$ всех баз.
3. По заданной базе b определим её *количественную последовательность*: функцию натурального аргумента: $q_b : b \to \mathbb{N}$:

$$q_b(n) = b_n - b_{n-1}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

а также *сюръективную последовательность базы* $p_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$p_b(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_b(i),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Отметим для последней следующие характеристические свойства:

$$p_b(1) = 1,\ p_b(n) \leq p_b(n+1) \leq p_b(n) + 1,\ n \geq 1. \tag{1.3}$$

Каждый из трёх объектов - база, её количественная и её сюръективная последовательность, - очевидным образом определён любым из них, в том смысле, что, исходя из него, формулами (1.1) - (1.3) однозначно восстанавливаются остальные два.

Определение 2. 1. Обозначим Q всех бесконечных натуральных последовательностей. Элементы $q^{(1)} = \{q_n^{(1)}\}_{n\geq 1}$ и $q^{(2)} = \{q_n^{(2)}\}_{n\geq 1}$ из Q будем называть *(аддитивно) эквивалентными* (обозначение: $q^{(1)} \overset{a}{\sim} q^{(2)}$), если найдётся такое натуральное d, что $\sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)} \leq \sum_{i=1}^{n+d} q_i^{(2)} \leq \sum_{i=1}^{n+2d} q_i^{(1)},\ n \geq 1$.

2. Базу $b^{(1)}$ будем называть *(аддитивно) эквивалентной* базе $b^{(2)}$ (пишем $b^1 \overset{a}{\sim} b^2$), если найдётся натуральное d, такое что $b_k^{(1)} \leq b_{k+d}^{(2)} \leq b_{k+2d}^{(1)},\ k \geq 1$.

3. Пусть каждая из двух натуральных последовательностей $p^{(1)} = \{p_n^{(1)}\}_{n\geq 1}$ и $p^{(2)} = \{p_n^{(2)}\}_{n\geq 1}$ удовлетворяют условиям (1.3). Последовательности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ называются *(аддитивно) эквивалентными*, (обозначение: $p^{(1)} \overset{a}{\sim} p^{(2)}$,) если найдётся натуральное d, такое что $p_n^{(1)} \leq p_n^{(2)} + d \leq p_n^{(1)} + 2d,\ n \geq 1$.

Для базы b_*, двойственной с b, обозначим через $\{q_{b_*}\}$ и $\{p_{b_*}\}$ - соответственно количественную и сюръективную последовательности для b_*. Легко проверить справедливость формулы

$$p_{b*}(n) = n - p_b(n) + 1,\ n \geq 1. \tag{1.4}$$

Перечислим некоторые элементарные соотношения между $\overset{a}{\sim}$эквивалентными последовательностями.

Лемма 1.1. Любое из следующих условий равносильны $\overset{a}{\sim}$эквивалентности баз $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$:

1. $\overset{a}{\sim}$эквивалентность баз $b_*^{(1)}$ и $b_*^{(2)}$;
2. $\overset{a}{\sim}$эквивалентность количественных последовательностей $q_{b^{(1)}}$ и $q_{b^{(2)}}$;
3. $\overset{a}{\sim}$эквивалентность сюръективных последовательностей $p_{b^{(1)}}$ и $p_{b^{(2)}}$.

Определение 3. Пусть $\mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$ обозначает подкласс Q, состоящий из *ограниченных* последовательностей: $q = (q_n) \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$ означает, что найдётся натуральное d, такое что $q_n \le d,\ n \ge 1$.

Лемма 1.2. Последовательности $q^{(1)},\ q^{(2)} \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$ являются $\overset{a}{\sim}$эквивалентными, тогда и только тогда, когда

$$\sup_{m \ge 1} \mid \sum_{k=1}^{m} q^{(1)}(k) - \sum_{k=1}^{m} q^{(2)}(k) \mid < \infty. \tag{1.5}$$

Замечание 1.3. Очевидно, что (1.5) является достаточным условием $\overset{a}{\sim}$эквивалентности даже и в случае неограниченных последовательностей q. Необходимым условием в этом случае (1.5) не является, что видно на примере: $q^{(1)}(n) = 2^n$; $q^{(2)}(2n-1) = 2^{2n}$, $q^{(2)}(2n) = 2^{2n-1}$, $n \ge 1$.

Лемма 1.4. $q_b \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$, тогда и только тогда, когда $b \overset{a}{\sim} b^{(s)}$, где $b^{(s)}$ обозначает базу, являющуюся *сдвигом* базы $b = \{b_k\}_{k \ge 0}$: $b^{(s)} = \{b_k^{(s)}\}_{k \ge 0}$, где $b_0^{(s)} := 0$; $b_k^{(s)} := b_{k+1},\ k \ge 1$.

Определение 4. Зафиксируем $q \in \mathsf{Q}$ и пусть k и R - натуральные числа.
1. Отрезок натурального ряда вида $n+1, n+2, ..., n+k$ мы называем *R-точечным блоком для q длины k, $k \ge 1$*, если $q_n \ne R, q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots = q_{n+k} = R, q_{n+k+1} \ne R$; при этом число n мы называем *начальным* для этого блока. Мы различаем *одноточечные* ($R = 1$) и *многоточечные* блоки ($R > 1$).
2. Натуральную последовательность, члены которой суть либо числа R, либо числа 1, мы называем *R-приведённой.*

Следующее утверждение доказывается стандартным методом срезок.

Лемма 1.5. Для любой $q,\ q \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$, найдётся $\overset{a}{\sim}$эквивалентная ей R-приведённая последовательность.

Прокомментаруем введенные понятия. Если при переходе от базы b к её двойственной b_* в количественной последовательности q_b какое-то

$q_b(n) = m > 1$, то в силу формулы (3.4) у q_{b_*} в некотором месте "нарастёт"одноточечный блок длины m, и наоборот, одноточечный блок длины $m > 1$ последовательности q_b на соответствующем месте "отзовётся"в последовательности q_{b_*} числом $q_{b_*}(n) = m$. Лемма 1.5 имеет тот смысл, что с точностью до $\overset{a}{\sim}$эквивалентности можно всегда считать ограниченную количественную последовательность q_b базы b состоящей из чередующихся R-блоков и одноточечных блоков.

Определение 5. *Нижним индексом* базы $b = \{b_k\}_{k\geq 0}$ будем называть число

$$\gamma_b := \lim_{m\to\infty} \inf_{0\leq n<\infty} \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}$$

а *верхним индеком* этой базы - число $\delta_b := 1 - \gamma_{b_*}$. Здесь χ_b обозначает индикаторную функцию базы b как подмножества натурального ряда. Легко видеть, что $0 \leq \gamma_b \leq \delta_b \leq 1$. Ясно, что для двух $\overset{a}{\sim}$эквивалентных баз их нижний и верхний индексы попарно совпадают.

Определение 6. 1. Базу $b = \{b_k\}_{k\geq 0}$, будем называть *субаддитивной (супераддитивной)*, если для подходящего натурального d при всех натуральных n, m выполняются неравенства

$$b_{n+m-d} \leq b_n + b_m,\ \ n + m > d \ (\text{соответственно}, b_{n+m+d} \geq b_n + b_m). \quad (1.6)$$

Для субаддитивной базы неравества (1.6) равносильны выполнению при всех $m, n,\ m + n > d$, неравенств

$$\sum_{i=m+1}^{m+n-d} q_b(i) \leq \sum_{i=1}^{n} q_b(i). \quad (1.7)$$

2. Базу $b = \{b_k\}_{k\geq 0}$, являющуюся одновременно суб- и супераддитивной будем называть *эквиаддитивной.*

Замечание 1. 6. 1. База b является суб(супер)аддитивной, тогда и только тогда, когда двойствнная ей база b_* является супер(суб)аддитивной. Поэтому двойственные базы могут лишь одновременно быть эквиаддитивными.
2. Нетрудно показать, что субаддитивная база b $\overset{a}{\sim}$эквивалентна своему сдвигу.
3. Очевидно, что увеличение d в неравенствах (1.6) может эти неравенства только усилить. Поэтому можно считать , что в определении

эквиаддитивной базы одно и то же число d "обслуживает"и суб- и супераддитивность. Иными словами для того, чтобы база b была эквиаддитивной, необходимо и достаточно, чтобы нашлось натуральное d, такое что $b_{n+m-d} \leq b_n + b_m \leq b_{n+m+d}$; $n + m \geq d$; $m, n \geq 1$. С учётом п.2 последнее условие равносильно существованию натурального N, для которого при всех натуральных n; m', m справедливы неравенства

$$|(b_{m'+n} - b_{m'}) - (b_{m+n} - b_m)| \leq N. \tag{1.8}$$

Замечание 1.7. Очевидно, что, как субаддитивность, так и двойственная ей супераддитивность суть $\overset{a}{\sim}$инвариантные свойства базы. Это же относится и к эквиаддитивности.

В точности также как Теорема 1.2. стр. 74, [1], доказывается

Лемма 1.9. Если $b = (b_n)$ - субаддитивная база, то

$$\beta := \inf_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Лемма 1.10. Если база $b = (b_n)$ субаддитивна и $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \beta$, то для повторного предела справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{b_{n+m} - b_n}{m} = \beta. \tag{1.9}$$

Доказательство. После переобозначения переменных мы можем записать (1.6) как

$$b_{n+m} \leq b_n + b_{m-d}, \text{ где } m > d, \ n \geq 1.$$

Зафиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$. По предыдущей лемме и в силу (1.6) при любом n для больших $m: \ m > d$, таких что $\frac{b_{m-d}}{m} = \frac{b_{m-d}}{m-d} \cdot \frac{m-d}{m} \leq \beta + \varepsilon$, имеем :

$$\frac{b_{n+m} - b_n}{m} \leq \frac{b_{m-d}}{m} \leq \beta + \varepsilon.$$

С другой стороны при достаточно больших n, таких что для $n' \geq n$ справедливы неравества $|\frac{b_{n'}}{n'} - \beta| < \varepsilon$, при всех натуральных m выполняются неравенства $\frac{b_{n+m}}{n+m} > \beta - \varepsilon$. Поэтому для таких n и любых m имеем:

$$\frac{b_{n+m} - b_n}{m} = \frac{b_{n+m}}{n+m}(1+\frac{n}{m}) - \frac{b_n}{n}\frac{n}{m} > (\beta-\varepsilon)(1+\frac{n}{m}) - (\beta+\varepsilon)\frac{n}{m} > \beta - (2+\frac{n}{m})\varepsilon,$$

откуда $|\frac{b_{n+m}-b_n}{m}-\beta|\leq(2+\frac{n}{m})\varepsilon$. Так как повторный предел $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$ равен нулю, из произвольной малости ε следует (1.9). $\square$

2. Базы $M-$ и $N-$функций

В дальнейшем к аксиомам M-функции ψ (N-функции φ) мы добавляем ещё нормировочное требование $\psi(1)=\varphi(1)=1$ вместе с предположением,что ψ не $\overset{m}{\sim}$эквивалентна в нуле (а φ, соответственно, на бесконечности) линейной функции.

Определение 7. 1. Для всех целых $j\neq 0$ точки вида $\psi(2^j)$ будем называть $\psi-$точками. Для натуральных n обозначим через D_n^-, диадический полусегмент $[2^{-n},2^{-n+1})$, через D_n^+ диадический полусегмент $[2^n,2^{n+1})$, и введём две функции p_ψ^0 и p_ψ^∞, называемые плейс-последовательностями M-функции ψ в нуле и на бесконечности, соответственно, сопоставляя каждой ψ-точке номер диадического полусегмента D, её содержащего:

$$p_\psi^0(j)=[-\log_2\psi(2^{-j})],\ p_\psi^\infty(j)=[\log_2\psi(2^j)],\ j\geq 1, \tag{2.1}$$

где $[r]$ обозначает целую часть вещественного числа r. Ясно, что в силу вогнутости ψ обе функции $p_\psi^0:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ и $p_\psi^\infty:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ суть сюръективные отображения, каждое из которых удовлетворяет соотношениям (1.3); тем самым они определяют базы b_ψ^0 и b_ψ^∞, называемые *M-базами функции ψ в нуле и на бесконечности*, соответственно. Количественные последовательности этих баз мы обозначаем $q_\psi^0(n)$ и $q_\psi^\infty(n)$
2. Под базами в нуле и на бесконечности эквивогнутой функции ζ мы понимаем базы, $\overset{a}{\sim}$эквивалентные соответственным базам M-функции ψ, такой что $\zeta\overset{m}{\sim}\psi$.

Лемма 2.1 Для любой M-функции ψ справедливо равенство $p_{I_4\psi}^0=p_{I_1\psi}^\infty+\epsilon$, где $\epsilon=0$ или $\epsilon=1$.

Следствие 2.2. Для любой M-функции ψ, выполняются равенства $p_\psi^0=p_{I_1I_4\psi}^\infty+\epsilon$, $p_\psi^\infty+\epsilon=p_{I_4I_1\psi}^0$, где $\epsilon=0$ или $\epsilon=1$. Из этих простых соображений следует, что определяемые плейс-последовательностями M-свойства на бесконечности могут быть выражены через M-свойства в нуле, что влечёт

Следствие 2.3. Для двух эквивогнутых функций равносильно:

1. Задаваемые ими пространства Марцинкевича совпадают;
2. Эти функции $\overset{m}{\sim}$эквивалентны (в нуле или на бесконечности);
3. Их соответственные плейс-последовательности $\overset{a}{\sim}$эквивалентны;
4. Соответственные M-базы этих функций $\overset{a}{\sim}$эквивалентны;
5. Количественные последовательности этих баз $\overset{a}{\sim}$эквивалентны.

Определение 8. Рассмотрим N-функцию φ и обозначим

$$b_n^{\varphi} = [\log_2 \varphi(2^n)],\ n \geq 0. \tag{2.2}$$

Тогда $0 = b_0^{\varphi} < b_1^{\varphi} < ...$, и, так как, благодаря выпуклости φ, $\{b_k^{\varphi}\}_{k\geq 1}$ - нетривиальное подмножество натурального ряда, то множество $b^{\varphi} = \{b_k^{\varphi}\}_{k\geq 0}$ - есть база, называемая *N-базой N-функции φ*. *N-базой эквивыпуклой функции ξ* называется база, $\overset{a}{\sim}$ эквивалентная базе N-функции φ, $\varphi \overset{m}{\sim} \xi$.

Лемма 2.4. Для N-функций φ_1 и φ_2 и для сопоставленных им M-функций $\varphi_1^{\frown}$ и $\varphi_2^{\frown}$ следующие условия равносильны.

1. $\varphi_1 \overset{m}{\sim} \varphi_2$; 2. $\varphi_1^{\frown} \overset{m}{\sim} \varphi_2^{\frown}$; 3. $(b_1)^{\varphi} \overset{a}{\sim} (b_2)^{\varphi}$; 4. $(b_1^0)_{\varphi^{\frown}} \overset{a}{\sim} (b_2^0)_{\varphi^{\frown}}$;
5. $(b_1^{\infty})_{\varphi^{\frown}} \overset{a}{\sim} (b_2^{\infty})_{\varphi^{\frown}}$.

Пусть φ - произвольная N-функция, рассмотрим обратную к ней M-функцию $\psi = I_3\varphi$. Имеем:
$2^{n-1} \leq \psi(2^k) < 2^n \Leftrightarrow \varphi(2^{n-1}) \leq 2^k < \varphi(2^n) \Leftrightarrow b_{\varphi}(n-1) = [\log_2 \varphi(2^{n-1})] \leq k \leq [\log_2 \varphi(2^n)] = b_{\varphi}(n),\ n \geq 1.$
Таким образом количественные последовательности q_{ψ}^{∞} и $q_{b^{\varphi}}$ могут отличаться не более, чем на единицу. Из Следствий 2.2 и 2.3 вытекает

Следствие 2.5. Для любой N-функции φ её N-база b^{φ} совпадает с M-базой обратной функции $b_{I_3\varphi}$ и, значит, $\overset{a}{\sim}$эквивалентна M-базе $b_{\varphi^{\frown}}^0$ сопоставленной ей M-функции $\varphi^{\frown}$.

Наш "базовый"подход опирается на следующее утверждение, (см. [4]).

Теорема А. Для любой последовательности $q = \{q_n\}_{n\geq 1} \in \mathsf{Q}$ натуральных чисел найдётся эквивогнутая функция ψ_q, такая что q есть для ψ_q количественная последовательность её M-базы b_{ψ}^0 в нуле: $q = q_{\psi_q}^0$ и, следовательно, база b_q^0, порождённая последовательностью q, есть база

эквивогнутой функции ψ_q в нуле.
Это соответствие "инволюционно": если ψ - произвольная M-функция, b^0_ψ - её база в нуле, а q^0_ψ - количественная функция этой базы, то исходная M-функция ψ и M-функция $\psi_{q^0_\psi}$ мультипликативно эквивалентны в нуле.

Отметим, что, благодаря инволюционным формулам, также как и для M-модуляр любой базе b (а значит и любой натуральной последовательности) соответствует N-модуляра $\Psi^{\smile}_b$, и наоборот, причём, как и для M-модуляр это соответствие "инволюционно".

Таким образом топологические инварианты пространств Орлича и Марцинкевича взаимовыражаемы друг через друга и, как те, так и другие могут быть охарактеризованы $\overset{a}{\sim}$инвариантами натуральных баз, т.е. по сути дела - натуральных последовательностей. Обратно, в силу теоремы А задать любую натуральную последовательность q означает задать "взаимосопоставленную" пару пространств Орлича и Марцинкевича, а выбрать $\overset{a}{\sim}$инвариант для q означает выбрать топологический инвариант для пространств этой пары.

3. Интерпретация инвариантов $M-$ и $N-$модуляр в терминах баз

Отметим равенства, вытекающие из (1.5), [9], и следствия 2.2.

Предложение 3.1. Справедливы равенства:

$$\gamma_\psi = \gamma_{b_\psi};\ \delta_\psi = \delta_{b_\psi},$$

где всюду понимаются базы в нуле.

I. **Регулярность.** В [4] доказана

Теорема B. Количественая последовательность M-базы (в нуле) эквивогнутой функции ограничена, тогда и только тогда, когда эта функция регулярна.
С другой стороны Δ_2-условие для N-функции φ : $\varphi \overset{m}{\sim} \sigma_2\varphi$, [2], выполняется, очевидно, тогда и только тогда, когда N-база b^φ $\overset{a}{\sim}$эквивалентна своему сдвигу. Тем самым из леммы 1.4 вытекает

Теорема 3.2. Для M- и N-модуляр Ψ и Φ предположим, что $\Phi = \Psi^{\smile}$, и пусть $b = (b_n)$ их общая база. Для пространств M_{ψ_*} и L^*_φ

следующие условия равносильны.
1. Для любой M-функции $\psi \in \Psi$ пространство Марцинкевича M_{ψ_*} обладает свойством Харди-Литтлвуда, [3]:

$$\frac{\psi_*(t)}{t} \in \ \mathsf{M}_{\psi_*}.$$

2. Всякая N-функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2-условию на бесконечности, [2]:

$$\sup_{t \geq 1} \frac{\varphi(2 \cdot t)}{\varphi(t)} < \infty.$$

3. Для любой N-функции $\varphi \in \Phi$ пространство Орлича L_φ сепарабельно.
4. Для любой M-функции $\psi \in \Psi$ количественная последовательность $q_{b_{\psi_*}}$ базы b_{ψ_*} ограничена.
5. $\gamma_{b_{\psi_*}} > 0$.

II. **Регулярность изменения.**

Теорема 3.3. (См. Лемму 1.7 и Теорему 5, [8]). Регулярность изменения эквивогнутой функции ψ с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$, (или эквивыпуклой функции φ с показателем $\frac{1}{\alpha}$) равносильна существованию повторного предела

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{b_{m+n} - b_n} = 1 - \alpha,$$

где через b обозначена база в нуле двойственной к ψ (соответственно, сопоставленной с φ) эквивогнутой функции ψ_*.
Отсюда сразу вытекает известное свойство композиции (см. [5], теорема 3):

Следствие 3.4. 1. Композиция $\psi_1 \circ \psi_2$ M-функций ψ_1 и ψ_2 является регулярной или быстро растущей в нуле M-функцией, тогда и только тогда, когда каждая из функций ψ_1 и ψ_2 является регулярной (соответственно, быстро растущей) в нуле M-функцией.

III. **Субмультипликативность.**

Лемма 3.5. Для произвольной базы b следующие условия равносильны.
1. b субаддитивна (b супераддитивна);

2. эквивогнутая функция ψ_b субмультипликативна (соответственно, супермультипликативна) в нуле.

Теорема 3.6. M-функция ψ эквивалентна субмультипликативной, тогда и только тогда, когда для её базы выполняется условие (1.7).

Теорема 3.7. 1). Всякая субмультипликативная в нуле эквивогнутая функция ψ, есть функция регулярного изменения в нуле с некоторым показателем α, $0 < \alpha \leq 1$.

2). Для быстро меняющихся в нуле эквивогнутой функции (т.е. при $\alpha = 1$) верно и обратное - она субмультипликатавна в нуле.

Доказательство. 1) прямо следует из леммы 1.10 и теоремы 5, [8]. 2). Допустим, что утверждение неверно, тогда по [10] (см. также [11]) найдётся M-функция ψ, такая, что $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} = s$ и при этом ψ не субмультипликативна в нуле. Последнее означает, что для подходящих последовательностей $a_n \uparrow \infty$ и $s_n \downarrow_{n\uparrow\infty} 0$, справедливо: $\limsup_{t\to 0}\frac{\psi(s_n\cdot t)}{\psi(s_n)\cdot\psi(t)} \geq a_n$, $n \geq 1$, или $a_n\cdot\psi(s_n) \leq \limsup_{t\to 0}\frac{\psi(s_n\cdot t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\psi(s_n\cdot t)}{\psi(t)} = s_n$, $n \geq 1$, откуда $\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{\psi(s_n)}{s_n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$, - противоречие. $\square$

IV. **Эквимультипликативность.**

Очевидно, что эквимультипликативность эквивогнутых функций равносильна эквиаддитивности их M-баз. Отсюда, а также из замечания 2.5, [9], непосредственно вытекает

Теорема 3.8 Для того чтобы эквивогнутая функция ψ была эквистепенной, т.е. $\overset{m}{\sim}$эквивалентна в нуле некоторой степенной функции t^α, $0 \leq t \leq 1, \alpha \in [0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы для базы в нуле b_ψ функции ψ выполнялось условие (1.8).

Замечание 3.9 База b_ψ задаёт степенную модуляру и вместе с ней состав элементов взаимосопоставленных степенных пространств Марцинкевича и Лебега, тогда и только тогда, когда все столбцы таблицы разностей $\{\{b_\psi(m+n) - b_\psi(m)\}_{m=1}^\infty\}_{n=1}^\infty$ аддитивно эквивалентны константе. Например, база, количественная последовательность которой является периодической, задаёт взаимосопоставленные степенные пространства Марцинкевича и Лебега для рационального показателя

степени.
V. **Экстремальность модуляр.**

Лемма 3.10. Если $\delta_\psi = 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\psi}(j)}{m} = 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. $\delta_\psi = 1$, тогда и только тогда, когда длины единичных для b_ψ блоков неограничены, [4]. Но в этом случае равенство (3.1) очевидно.□

Теорема 3.11. Если для эквивогнутой функции ψ справедливы равенства предложения 3.1, то экстремальность ψ равносильна тому, что

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\psi_*}}(j)}{m} = \delta_\psi. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть ψ экстремальна. По теореме 2.8, [9], она представима в виде

$$\psi(t) = \Big(\varphi(t)\Big)^\alpha, \ 0 < t \le 1,$$

где α - число из промежутка $(0,1)$, а $\varphi(t)$ - эквивогнутая функция, такая что $\delta_\varphi = 1$. Из теоремы 2.1 и из формул [1], стр. 79, получаем, что $\alpha = \delta_\psi = \lim_{m\to\infty} \sup_{0\le n<\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\psi_*}}(j)}{m}$.

Предположим, что α - рациональное число, т.е. для натуральных чисел p, r, c, d справедливо $\alpha = \frac{p}{r}, \ p, r \in \mathbb{N}, \ 1 \le p < r, \ r = c \cdot p + d, d < p$. Как известно, количественная последовательность q_{b_1} для базы $b_1 := b_\alpha$ эквивогнутой функции $t^\alpha, \ t \in [0,1]$, можно представить (с точностью до аддитивной эквивалентности) в виде последовательности блоков B_j длины p, состоящих из $p-1$ начальных единичек и последнего числа, равного $r-p$. Значит сама база b_1 есть последовательность (m_k) идущих подряд натуральных чисел со скачком через каждые $p-1$ шагов на число $r-p+1$.
С другой стороны, для базы $b_2 := b_\varphi = (n_k)$ длины единичных блоков её количественной последовательности неограничены. По следствию 10, [7], $b_1 \circ b_2 = (b_{n_{m_k}})$. Значит в подмножестве натурального ряда $b_\psi = b_1 \circ b_2$ найдётся неограниченное количество дизъюнктных блоков типа B_j, а именно там, где единичный блок для b_2 длины превосходящей кратное p "супепозирует"с количеством блоков B_j, равным этой кратности.

Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\psi}(j)}{m} \geq \alpha.$$

С другой стороны

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\psi_*}}(j)}{m} \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\psi_*}}(j)}{m} = \alpha.$$

Обратно, эквивогнутость в нуле функции $\psi^{\frac{1}{\delta_\psi^0}}$ несложно выводится из предложения 3.1, равенства (3.2), и следствия 1, стр.78, [1]. □

Следствие 3.12. Если пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ с M-базой b_ψ является $\frac{1}{\delta_\psi}$-выпуклым, то выполняется (3.2).

4. Задержка сюръективной последовательности

Зафиксируем базу b и пусть p её сюръективная последовательность; положим $p(0) = 0$ и для каждой пары чисел целых (m,n), $m,n \geq 0$, определим функцию $d = d_p$, полагая

$$d(m,n) = |p(m) - p(n)|.$$

Для квазиметрики d на $\mathbb{N} \cup \{0\}$ отметим, что

$$d(m+1,n) \leq d(m,n) \leq d(m-1,n);\ d(m,n-1) \leq d(m,n) \leq d(m,n+1),$$

если $1 \leq m \leq n$, и что $d(m,n) \leq |m-n|$ для всех натуральных m,n.

Ясно, что $p_1 \overset{a}{\sim} p_2$ равносильно $|d_{p_1}(m,n) - d_{p_2}(m,n)| \leq R,\ m,n \geq 0$, для подходящей натуральной константы R.

Пусть снова p - произвольная сюръективная последовательность. Для любых целых $n, r \geq 0$ определим

$$\Delta_r(n) = \{\nu \geq 0 :\ \nu - d(n, n+\nu) \leq r\};\ \ \mathfrak{d}_r(n) = \sup \Delta_r(n).$$

Определение 9. Параметризованную натуральную функцию $\mathfrak{d}_r(n)$ мы называем *задержкой последовательности* p. По определению базы задержка может иметь только конечные значения.

Перечислим некоторые свойства введённых объектов, тривиальные или легко выводимые из неравенства треугольника для квазиметрики d:

I). $\{0, 1, \cdots, r\} \subset \Delta_r(n) \subset \Delta_{r+1}(n)$, так что $r \leq \mathfrak{d}_r(n) \leq \mathfrak{d}_{r+1}(n)$.
II). $\Delta_r(n-1) \subset \Delta_r(n)+1 \cup \{0\}$, так что $\mathfrak{d}_r(n-1) \leq \mathfrak{d}_r(n)+1,\ r \geq 0,\ n \geq 1$.
III). $\Delta_r(n) = \{0, 1, 2, \cdots, \mathfrak{d}_r(n)\},\ r, n \geq 0$.
IV). $\mathfrak{d}_{r-1}(n+1) < \mathfrak{d}_r(n),\ r \geq 1,\ n \geq 0$.

Предложение 4.1. $d(n, n + \mathfrak{d}_r(n)) = \mathfrak{d}_r(n) - r,\ r, n \geq 0$.

Доказательство. Поскольку $\Delta_r(n)$ - начальный отрезок ряда целых неотрицательных чисел, содержащий свой максимальный элемент $\mathfrak{d}_r(n)$, то

$$\mathfrak{d}_r(n) - d(n, n + \mathfrak{d}_r(n)) \leq r. \tag{4.1}$$

Обозначим $j := d(n, n + \mathfrak{d}_r(n))$ и будем считать, что $d = d_{\psi_p}$ для M-функции ψ_p, определяемой, согласно Теореме A, последовательностью p.

Предположим, что $\psi_p(2^{-n}) \in D_i$, тогда $\psi_p(2^{-n-\mathfrak{d}_r(n)}) \in D_{i+j}$. Тогда из (4.1) мы выводили бы, что включение $\psi_p(2^{-n-\mathfrak{d}_r(n)-1}) \in D_{i+j+1}$ ведёт к равенству $p(n + \mathfrak{d}_r(n) + 1) - p(n) = d(n, n + (\mathfrak{d}_r(n) + 1)) = j + 1 \geq (\mathfrak{d}_r(n) + 1) - r$,
противоречещему максимальности $\mathfrak{d}_r(n)$ в $\Delta_r(n)$.
Если теперь предположить, что $j > \mathfrak{d}_r(n) - r$, то, как показано, $\psi_p(2^{-n-\mathfrak{d}_r(n)-1}) \in D_{i+j}$, откуда снова по максимальности $\mathfrak{d}_r(n)$ получаем: $j = p(n + \mathfrak{d}_r(n)) - p(n)) = p(n + \mathfrak{d}_r(n) + 1) - p(n) = d(n, n + (\mathfrak{d}_r(n) + 1)) < (\mathfrak{d}_r(n) + 1) - r$, что для целого j несовместимо с нашим предположением.
$\square$

Замечание 4.2 (см. Определение 7). Попутно мы доказали, что ни для каких целых $r, n \geq 0$ ψ-точка $\psi(2^{-n-\mathfrak{d}_r(n)})$ не может быть левой последней ψ-точкой диадического полусегмента, её содержащего, и, в частности, не может быть ψ-точкой никакого ψ-одноточечного диадического полусегмента.

Предложение 4.3. $\mathfrak{d}_{r-1}(n) < \mathfrak{d}_r(n),\ r \geq 1,\ n \geq 0$.

Доказательство. Нужно показать, что неравенство в I) строгое. Предположим, что это не так: $\mathfrak{d}_{r-1}(n) = \mathfrak{d}_r(n)$. Дважды применяя Предложение 4.1, получим

$\mathfrak{d}_r(n) - r = d(n, n + \mathfrak{d}_r(n)) = d(n, n + \mathfrak{d}_{r-1}(n)) = \mathfrak{d}_{r-1}(n) - (r-1) = \mathfrak{d}_r(n) - (r-1)$,
- противоречие. $\square$

Предложение 4.4. Для любых целых чисел $r, n \geq 0$ равенство $\mathfrak{d}_r(n) = r$ выполнено, тогда и только тогда, когда выполнено строгое неравенство

$$\sum_{i=1}^{p(n)} q(i) - n > r.$$

Доказательство. Снова обозначим $p = p_\psi$, $d = d_\psi$, $q = q_\psi$ где ψ – M-функция, построенная по p, согласно теореме A.
Нужно доказать равносильность равенства $\mathfrak{d}_r(n) = r$ и неравенства $\nu_l > r$, где $n + \nu_l$ номер левой последней ψ-точки на диадическом полусегменте $D_{p_\psi(n)}$. Допустим, что $\nu_l \leq r = \mathfrak{d}_r(n)$. Тогда по Замечанию 3.2 должно выполняться строгое неравенство $\nu_l < \mathfrak{d}_r(n)$. Следовательно $\psi(2^{-n-\mathfrak{d}_r(n)}) \in D_{p_\psi(n)+j}$, где $j > 0$. Отсюда получаем $0 < j = p_\psi(n + \mathfrak{d}_r(n)) - p_\psi(n) = d(n, n + \mathfrak{d}_r(n))$. С другой стороны по Предложению 4.1 $d(n, n + \mathfrak{d}_r(n)) = \mathfrak{d}_r(n) - r = 0$, - противоречие.

Обратно, пусть выполняется неравенство $\nu_l > r$. Тогда получим: $d(n, n + \nu_l) = p_\psi(n + \nu_l) - p_\psi(n) = 0 < \nu_l - r$, т.е. $\nu_l \notin \Delta_r(n)$ и значит $\mathfrak{d}_r(n) < \nu_l$. Теперь, поскольку всегда $r \leq \mathfrak{d}_r(n)$, то $r + 1 \leq \mathfrak{d}_r(n) + 1 \leq \nu_l$, откуда $\psi(2^{-n-r-1}) \geq \psi(2^{-n-\nu_l})$, тем самым $\psi(2^{-n-r-1}) \in D_{p_\psi(n)}$. Это нам даёт $d_\psi(n, n + r + 1) = 0 < 1 = r + 1 - r$, и по определению $\mathfrak{d}_r(n) < r + 1$. Следовательно $\mathfrak{d}_r(n) = r$. $\square$

Предложение 4.5. Последовательность натуральных чисел $q = (q_n)$ является неограниченной, тогда и только тогда, когда для всякого целого $r \geq 0$ справедливо равенство $\liminf_{n\to\infty} \mathfrak{d}_r(n) = r$.

Доказательство. Зафиксируем $r \geq 0$ и предположим, что q неограничена. В силу неравенств $\mathfrak{d}_r(n) \geq r,\ n \geq 0$, нам нужно лишь найти такую натуральную последовательность n_k, что $\mathfrak{d}_r(n_k) = r,\ k \geq 1$. Выберем возрастающую натуральную последовательность m_k, такую что $q_{m_k} > r + 1,\ k \geq 1$, и положим $n_1 = \sum_{i=1}^{m_{k_1}-1} q_i + 1$. Мы получим, что $p(n_1) = m_{k_1}$ и $\sum_{i=1}^{m_{k_1}} q_i - n_1 = q_{m_{k_1}} - 1$. Из Предложения 4.1 следует, что $\mathfrak{d}_r(n_1) = r$. Беря $m_{k_2} > m_{k_1}$, мы построим аналогично n_2, такое что $\mathfrak{d}_r(n_2) = r$, и т.д.
Обратно, предположим последовательность q ограничена некоторым

натуральным Q. Если возьмём $r > Q$, то получим: $\sum_{i=1}^{p(n)} q_i - n \leq q_{p(n)} \leq Q < r,\ n \geq 0$, откуда, пользуясь Предложением 4.1, получим, что $\mathfrak{d}_r(n) > r$ при любом $n \geq 0$. $\square$

Следствие 4.6. Пусть $p = p_\psi,\ q = q_\psi$ для M-функции ψ. Из Теоремы B и Предложения 4.5 вытекает, что ψ - регулярная M-функция, тогда и только тогда, когда $\liminf_{n\to\infty} \mathfrak{d}_k^\psi(n) > k$ для некоторого целого $k \geq 0$.

С помощью Предложения 4.1 легко доказывается следующая

Лемма 4.7. Для любых двух эквивалентных M-функций ψ и φ найдётся натуральное D, такое что выполняются неравенства

$$\mathfrak{d}_r^\psi(n) \leq \mathfrak{d}_{r+D}^\varphi(n) \leq \mathfrak{d}_{r+2D}^\psi(n),\ r, n \geq 0.$$

Следствие 4.8. Если $\varphi \overset{m}{\sim} \psi$ и при некотором $r \geq 0$ выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{d}_r^\varphi(n) = \infty$, или же неравенство $\sum_{n\geq 1} 2^{-\mathfrak{d}_r^\varphi(n)} < \infty$, то найдётся целое $\rho \geq 0$, такое что равенство $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{d}_\rho^\psi(n) = \infty$, соответственно неравенство $\sum_{n\geq 1} 2^{-\mathfrak{d}_\rho^\psi(n)} < \infty$, также справедливы.

Иными словами, наличие целого $r \geq 0$ в каждом из сформулированных в Следствии 3.8 соотношений представляет собой в обоих случаях M-свойство.

Лемма 4.9. Пусть l_n обозначает длину n-го одноточечного блока количественной последовательности базы. Нижеследующие условия I_a) и I_b) также как и условия II_a) и II_b) очевидным образом равносильны.

I_a). $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{d}_r(n) = \infty$ для некоторого целого $r \geq 0$; I_b). $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$.

II_a). $\sum_{n\geq 1} 2^{-\mathfrak{d}_r(n)} < \infty$ для некоторого целого $r \geq 0$; II_b). $\sum_{n\geq 1} 2^{-l_n} < \infty$.

Предложение 4.10. Пусть M-функция ζ такова, что количественная последовательность q_ζ является r-приведённой, $r \geq 2$, причём для последовательности l_n^ζ длин всех её одноточечных блоков справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} l_n^\zeta = \infty$ (соответственно, неравенство $\sum_{n\geq 1} 2^{-l_n^\zeta} < \infty$). Тогда найдётся $\overset{m}{\sim}$эквивалентная с ζ M-функция ψ, количественная последовательность q_ψ которой является 2-приведённой, причём выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} l_n^\psi = \infty$ (соответственно, неравенство $\sum_{n\geq 1} 2^{-l_n^\psi} < \infty$).

Доказательство. Докажем первое утверждение. Понятно, что натуральная последовательность, начинающаяся с некоторого элемента исходной, эквивалентна исходной, поэтому можно считать, что количественная последовательность q_ζ представима как последовательность идущих один за другим отрезков вида $A_n = (r, 1, 1, \cdots, 1)$ длины $l_n + 1$, $l_n > 2r$. Оставляя общее количество единиц в каждом из A_n неизменным, преобразуем этот отрезок к цепочке из r отрезков вида $2, 1, 1, \cdots, 1$, так чтобы длина единичного блока у первых $r - 1$ из них была равна $[\frac{l_n}{r}]$, а у последнего она равнялась бы остатку: $l_n - [\frac{l_n}{r}](r-1) \geq [\frac{l_n}{r}]$. Мы получим последовательность, $\overset{a}{\sim}$эквивалентную исходной, длины единичных блоков которой стремятся к бесконечности. Второе утверждение доказывается в точности также. □

5. Совпадение по составу элементов пространств Марцинкевича и Орлича.

В заключение на языке натуральных баз будет интерпретированы условия 2) и 3) Теоремы С, [9]. А именно, справедлива

Теорема 5.1. Составы элементов пространств Орлича $L^*_\varphi(0,1)$ и Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ совпадают, тогда и только тогда, когда $\Psi = \Phi^\frown$ и для длин l_n одноточечных n-х блоков 2-приведённой количественной последовательности М-функции, $\overset{m}{\sim}$эквивалентной ψ, выполняется условие

$$\sum_{n\geq 1} 2^{-l_n} < \infty, \qquad (5.1).$$

Доказательство. Нужно доказать равносильность (5.1) совокупности условий 2) и 3) Теоремы С. Из условия 2) посредством Теоремы В и Леммы 1.5 выводим, что, не умаляя общности, для некоторого натурального R количественную последовательность q_ψ можно считать R-приведённой.

Пусть теперь выполняется условие 3) Теоремы С. Поскольку с уменьшением ε неравенство сохранится, то можно взять в нём вместо ε число $2^{-\nu}$ для достаточно большого ν. Для $k \geq 1$ обозначим $\psi_*^{-1}(2^{-\nu}\psi_*(2^{-k})) := u_k \cdot 2^{-k}$; $[-\log_2 u_k] := v_k$, тогда $\sum_{k\geq 1} u_k < \infty$. С учётом неравенств

$2^{-(v_k+1)} < u_k \le 2^{-v_k},\ k \ge 1$ условие 3) даёт:

$$\sum_{k\ge 1} 2^{-v_k} < \infty. \tag{5.2}$$

Из монотонности же ψ_* мы получаем неравенства $2^{-\nu} \cdot \psi_*(2^{-k}) = \psi_*(u_k \cdot 2^{-k}) \le \psi_*(2^{-k-v_k}),\ k \ge 1$, или, равносильно,

$$\frac{\psi(2^{-k})}{\psi(2^{-k-v_k})} \ge 2^{v_k-\nu},\ k \ge 1. \tag{5.3}$$

Пусть теперь $\psi(2^{-k}) \in D_i,\ \psi(2^{-k-v_k}) \in D_{i+j}$ для некоторых $i, j \ge 1$. Тогда (5.3) влечёт $2^{v_k-\nu} \le 2^{j+1}$, то есть $j+1 = p_\psi(k+v_k) - p_{\psi(k)} + 1 \ge v_k - \nu,\ k \ge 1$.
Мы получили неравенства $d_\psi(k, k+v_k) = p_\psi(k+v_k) - p_\psi(k) \ge v_k - (\nu + 1),\ k \ge 1$. По определению из них следует, что $\mathfrak{d}^{\psi}_{\nu+1}(k) \ge v_k,\ k \ge 1$, так что (5.2) влечёт

$$\sum_{k\ge 1} 2^{\mathfrak{d}^{\psi}_{\nu+1}(k)} < \infty. \tag{5.4}$$

Теперь, поскольку в силу условия 2), Теоремы B и Леммы 2.5 база b_ψ $\overset{m}{\sim}$эквивалентна приведённой, остаётся воспользоватmся Леммой 4.9 и Предложением 4.10.

Обратным ходом этого доказательства выводим из (5.1) условия 2) и 3) Теоремы C. $\square$

Замечание 5.2. Очевидно, что условие (5.1) двойственно неравенству $\sum_{n\ge 1} 2^{-q_{\psi_*}(n)} < \infty$.

Литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978.
2. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Г.И.Ф-М.Л., 1958.
3. **Shimogaki T.** Hardy-Littlewood Majorants in Function Spaces// *J. Mathem. Soc. Japan, 17(1965),365-373.*
4. **Mekler A. A.** On Regularity and Weak Regularity of Functions Generating Marcinkiewicz Spaces// *Proc. Intern. Conf. "FUNCTION*

SPACES, V."- Poznan, Poland, July 2000, ed. by H. Hudzik and L. Skrzypczak. Marcel Dekker, Lect. Not. Pur. Appl. Math. Ser., **213**, *pp. 379-387.*

5. **Меклер А. А.** О полугруппе модулярных функций с операцией инволюции// *Записки научных семинаров ПОМИ, т. 315, 2004, с. 121 - 131.*
6. **Седаев А. А., Смуров В. А.** О нахождении одной числовой характеристики для пространств Марцинкевича// *В сб. "Методы решения операторных уравнений,"ВГУ, Воронеж, 1978, с. 135-142.*
7. **Меклер А. А.** Представление суперпозиции вогнутых модуляр на двоичной логарифмической шкале// *Герценовские Чтения, LX, С.-Пб. 2007, с. 121-128.*
8. **Меклер А. А.** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр// *Вестник Сыктывкарского Университета, Сер.1, вып. 8, 2008, с. 27 -38.*
9. **Меклер А.А.** Замечания о соответствии между некоторыми инвариантами пространств Марцинкевича и Орлича, I// *Вестник Сыктывкарского Университета, Сер.1, вып. , 2011, с. 33 – 48.*
10. **Меклер А. А.** О существовании $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$ для вогнутой функции ψ// *"Тезисы X-й Всесоюзной Школы по теории операторов в функциональных пространствах."Челябинск, 1986, т. 2, с. 117-118.*
11. **Drasin D., Seneta E.** A generalization of slowly varying function// *Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986) pp. 470-472.*

Summary

Mekler A. A. Remarks on the correspondence between the topological invariants of spaces, Marcinkiewicz and Orlicz, II

In terms of behavior of limit densities of positive integer sequences an unique interpretation of some topological invariants of Orlicz, respectively, Marcinkiewicz functional spaces (in particular their coincidence) is given.

Keywords: Banach Function Spaces, Marcinkiewicz Space, Orlicz Space, function, invariant.

Universities of Sankt Petersburg/Bremen *Поступила 01.10.2010*