Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.14.2011

УДК 513.88

ЗАМЕЧАНИЯ О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ПРОСТРАНСТВ МАРЦИНКЕВИЧА И ОРЛИЧА, I

А. А. Меклер

Даётся описание взаимных соответствий между некоторыми топологическими инвариантами функциональных пространств Орлича и Марцинкевича и, в частности, совпадения этих пространств по запасу элементов.
Ключевые слова: пространство Орлича, пространство Марцинкевича, инвариант, функция, модуляра.

Обсуждаемые здесь свойства норм банаховых порядково идеальных пространств измеримых функций, в литературе иногда называемых BFS (=Banach Function Spaces), представляют собой **топологические** инварианты. Они сохраняются при эквивалентной монотонной перенормировке пространства и потому являются свойствами, присущими всему классу эквивалентности тех *нормирующих функций*, которыми нормы определены, т.е. свойствами корпуса пространства - состава его элементов. Если же речь идёт об **изометрическом** инварианте P BFS-пространства X, т.е. о некотором свойстве единичной сферы X, то оно при переходе к эквивалентной норме, вообще говоря, пространством теряется. Тем не менее и такое свойство может быть рассмотрено как топологический инвариант $\mathcal{P}$, *индуцированный* P, если считать, что BFS-пространство Y обладает $\mathcal{P}$ в случае, когда хотя бы для одной эквивалентной перенормировки Y выполняется P.

Под нормирующей здесь понимается заданная на полуоси $[0, \infty)$ вещественная непрерывная функция, равная нулю (или доопределённая нулём) в нуле, а вне нуля - положительная, строго возрастающая и стремящаяся к бесконечности на бесконечности. Мы говорим, что *нормирующая функция F_1 (мультипликативно) подчинена нормирующей*

© Меклер А. А., 2011.

функции F_2, если для подходящей константы $C \geq 1$ при всех $t \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$F_1(t) \leq C \cdot F_2(C^{-1} \cdot t),$$

обозначение: $F_1 \overset{m}{\preceq} F_2$. Если одновременно справедливо $F_1 \overset{m}{\preceq} F_2$ и $F_2 \overset{m}{\preceq} F_1$, то мы пишем $F_1 \overset{m}{\sim} F_2$ и говорим, что функции F_1 и F_2 $\overset{m}{\sim}$*эквивалентны* $\Big($мультипликативно эквивалентны$\Big)$. Класс $\overset{m}{\sim}$эквивалентности нормирующих функций мы называем *модулярой*; множество всех модуляр обозначается $\mathfrak{F}$. Если соотношения $\overset{m}{\sim}$эквивалентности выполняются только в окрестности нуля или бесконечности, то мы говорим об $\overset{m}{\sim}$эквивалентности функций именно в этих областях.

Каждая нормирующая функция характеризует геометрию единичной сферы задаваемого ею BFS, тогда как состав его элементов (т.е. его топология) является одним и тем же для всех функций из модуляры. Таким образом *модулярные* свойства, представляют собой топологические инварианты BFS. Ниже рассматриваются некоторые свойства *M-модуляр*, задающих *пространства Марцинкевича*, [1], и *N-модуляр*, задающих *пространства Орлича*, [2]. На множестве всех N- и M-модуляр определены естественные инволюции: переход от N-модуляры к дополнительной N-модуляре, переход от N-модуляры к обратной к ней M-модуляре и наоборот, и переход от M-модуляры к двойственной с ней M-модуляре. Мы выписываем формулы, связывающие эти инволюции.

Известное *свойство Харди-Литтлвуда*, [3], даёт пример модулярного свойства, которое в случае пространства Марцинкевича на $[0, 1]$ соответствует *регулярности* M-модуляры, задающей это пространство - свойству, изучавшемуся, в частности, автором в статьях [4] и [5]. Мы указываем на то, что регулярные M-модуляры являются, *взаимосопоставленными* (см. определение 3 ниже) с N-модулярами, удовлетворяющими *Δ_2-условию*, [2], т.е. задающими сепарабельные пространства Орлича N-модулярами.

В [5], а также в [12] изучалось и другое модулярное свойство - *регулярной варьируемости (в нуле)* нормирующей функции (о ранних работах на эту тему см. литературу в монографии [6]). В настоящей работе с ним сравнивается свойство *субмультипликативности*, которое оказывается более сильным. Отмечается, что для так называемых *быстро варьируемых в нуле M-модуляр* оба свойства равносильны, откуда следует важный вывод о субмультипликативности нормы пространства Марцинкевича, имеющего нетривиальную компоненту симметричных функционалов, [9]. Отсюда же следует, что M-модуляра, двойственная с такой, которая задаёт пространство Марцинкевича, совпадающее по запасу элементов с некоторым пространством Орлича, [7], является быстро варьируемой в нуле. Стоит отметить ещё, что субмультипликативная M-модуляра Ψ является взаимосопоставленной с N-модулярой Φ, удовлетворяющей известному Δ'-условию, [2].

Важнейшие инвариантные свойства нормирующих функций характеризуют предельное поведение оператора растяжения-сжатия полуоси в нуле, или на бесконечности. Показав, как для взаимосопоставленных M- и N-модуляр случай точки бесконечность сводится к точке нуль, мы после этого занимаемся только модулярными свойствами вогнутых модуляр в нуле (а пространства Марцинкевича рассматриваем на отрезке $[0, 1]$.)

Во второй части настоящей статьи, [13], вводится понятие (*натуральной*) *базы*, посредством которого каждой паре взаимосопоставленных (N, M)-модуляр соответствует класс (*аддитивно*) эквивалентных между собой последовательностей натуральных чисел, и наоборот. Такая интерпретация служит прозрачности доказательств и построению контрпримеров. Она является также источником новых модулярных инвариантов. Кроме того, модулярные инварианты допускают типизацию в терминах этой интерпретации, например, можно выделить класс инвариантов, описываемых предельным поведением *плотности в натуральном ряде* натуральной последовательности, представляющей данный инвариант.

Мы придерживаемся устоявшейся терминологии всюду, где она имеется, и не даём определений тех понятий, которые содержатся в хорошо известных монографиях [1], [2], [6], [14]. Взаимные свойства выпуклых/вогнутых модуляр мы описываем с помощью приводимых без доказательств весьма простых замечаний и лемм и отсылок к известным фактам.

Тезисы этой статьи и статьи [13] готовятся для публикации в Proceedings of American Institution of Mathematical Sciences.

1. Взаимосопоставленные модуляры Марцинкевича и Орлича.

Отметим, что множество $\mathfrak{F}$ замкнуто относительно перехода к обратной функции: если F - нормирующая функция, то такова же и обратная функция F^{-1}. Модуляра, содержащая F^{-1}, называется *обратной* к модуляре $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni F$, и обозначается $\mathcal{F}^{-1}$. Отображение $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{-1}$ есть инволюция на $\mathfrak{F}$: $(\mathcal{F}^{-1})^{-1} = \mathcal{F}$.

Определение 1. Подмножество $\mathcal{P}$ нормирующих функций назовём *модулярным свойством в нуле* (или, *на бесконечности*), если вместе с каждой функцией $F \in \mathcal{P}$ все нормирующие функции, $\overset{m}{\sim}$эквивалентные F в какой-нибудь окрестности нуля (соответственно, - бесконечности), также принадлежат $\mathcal{P}$.

Определение 2. *Модулярой Марцинкевича* (коротко, *M-модулярой*) Ψ мы называем модуляру, которой принадлежит хотя бы одна *вогнутая* нормирующая функция ψ (такую ψ мы называем *M-функцией*). Заменяя здесь вогнутость на *выпуклость*, приходим к определению *модуляры Орлича* (коротко, *N-модуляры*) и *N-функции*. Функции из M-модуляр (из N-модуляр) мы называем *эквивогнутыми* (соответственно, *эквивыпуклыми*). Класс всех M-модуляр обозначается через $\mathfrak{M}$, а класс всех N-модуляр - через $\mathfrak{N}$. Для M-модуляры Ψ (для N-модуляры Φ) через M_Ψ (через L^*_Φ) мы обозначаем *пространство Марцинкевича*, [1], (соответственно, *пространство Орлича*, [2]), определённое какой-нибудь, - любой, - M-функцией $\psi \in \Psi$ (соответственно, N-функцией $\varphi \in \Phi$). Мы не придём в последующем к недоразумениям, если в обозначениях пространства Марцинкевича и Орлича будем также использовать содержащиеся в M-модулярах (соответственно, N-модулярах) M-функции (соответственно, N-функции).
Модуляру, задающую степенное пространство Марцинкевича $\mathsf{M}_\alpha = \mathsf{M}_{t^\alpha}$ (соответственно, степенное пространство Лебега $\mathsf{L}_p = \mathsf{L}_{t^p}$, $0 \le t < \infty$, $0 < \alpha \le 1$, $p = \frac{1}{\alpha}$) мы называем *степенной*.

При изложении понятий, связанных с действием оператора сжатия/растяжения мы опираемся на утверждения и формулы §1 гл. II монографии [1]. Пусть F нормирующая функция. Определим для любого $s \ge 0$

1). Оператор $\sigma_s :\ (\sigma_s F)(t) = F(st)$;
2). Функцию сжатия/растяжения $M_F(s) := \sup_{0\le t<\infty} \frac{F(s\cdot t)}{F(t)}$;
3). Нижний индекс $\gamma_F = \lim_{s\to 0} \frac{\ln M_F(s)}{\ln s}$;
4). Верхний индекс $\delta_F = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln M_F(s)}{\ln s}$.

Для M-функции ψ (для N-функции φ) справедливы неравенства

$$0 \le \gamma_\psi \le \delta_\psi \le 1, \tag{$1_\frown$}$$

- соответственно,

$$1 \le \gamma_\varphi \le \delta_\varphi \le \infty. \tag{$1_\smile$}$$

Поскольку для $\overset{m}{\sim}$эквивалентных нормирующих функций их функции растяжения также эквивалентны, то соответственные индексы $\overset{m}{\sim}$эквивалентных нормирующих функций равны; их общее значение естественно приписать содержащей эти функции модуляре. Таким образом ($1_\frown$) справедливо и для эквивогнутой $\Big($а ($1_\smile$) справедливо и для эквивыпуклой$\Big)$ функции.

Полагая, как обычно, $\frac{0}{0} = \frac{1}{\infty} = 0 \cdot \infty = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$, для эквивогнутой функции ψ обозначим через ψ_* наименьшую вогнутую мажоранту эквивогнутой функции $\frac{t}{\psi(t)}$, $0 \leq t < \infty$, а через Ψ_* - модуляру, содержащую $\psi_*(t)$. Как известно, [1], $\psi_*(t) \overset{m}{\sim} \frac{t}{\psi(t)}$, т.е. Ψ_* - M-модуляра. ψ_* (Ψ_*) называется *двойственной* для ψ эквивогнутой функцией (модулярой).

Очевидно, что при всех s, $0 \leq s < \infty$, справедливы формулы, [1],

$$M_{\psi_*}(s) = sM_\psi(\frac{1}{s}), \tag{1.2}$$

из которых вытекают равенства

$$\begin{cases} \delta_{\psi_*} = 1 - \gamma_\psi; \\ \gamma_{\psi_*} = 1 - \delta_\psi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ясно, что функция растяжения любой нормирующей функции неубывает. Из (1.2) видно, что неубывает и функция $\frac{s}{M_{\psi_*}(s)} = \frac{1}{M_\psi(\frac{1}{s})}$, то есть, функция M_{ψ_*} является квази-, [1], и, следовательно, эквивогнутой. Тем самым функция растяжения всякой эквивогнутой функции является эквивогнутой.

Лемма 1.1. Для эквивогнутой функции ψ справедлива пара эквивалентностей:

$$\begin{cases} \gamma_\psi = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } M_\psi(s) = 1,\ 0 < s \leq 1; \\ \delta_\psi = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } M_\psi(s) = s,\ s \geq 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_\psi = 0$. По формуле (1.19), [1], имеем $M_\psi(s) \geq 1$, $s \in (0, 1]$. С другой стороны для всех $s \in (0, 1]$ по монотонности ψ имеем: $M_\psi(s) \leq 1$, значит $M_\psi(s) = 1$, $s \in (0, 1]$. Обратное следует из равенства $\gamma_\psi := \lim_{s \to 0} \frac{\ln M_\psi(s)}{\ln s}$.

Пусть $\delta_\psi = 1$. Тогда $\gamma_{\psi_*} = 0$, что по первому утверждению равносильно $M_{\psi_*}(s) = 1$, $0 < s \leq 1$. Но, согласно (1.2), $M_{\psi_*}(s) = sM_\psi(\frac{1}{s})$, $0 \leq s < \infty$, откуда имеем: $M_{\psi_*}(s) = 1$, $0 < s \leq 1$, значит $M_\psi(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}$, $0 < s \leq 1$, а

$M_\psi(s) = s,\ s \geq 1.$ $\square$

Каждое отображение $I : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ будем считать продолженным на модуляры функций из $\mathfrak{F}$. Зададим $I_1 : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, полагая $\psi \mapsto I_1\psi := \psi_*$. Из формулы (1.7), гл. II, [1], следует, что I_1 является инволюцией на $\mathfrak{M}$.

Для M-модуляр очевидно следующее утверждение.

Лемма 1.2. Пусть ψ M-функция из M-модуляры Ψ. Для того, чтобы нормирующая функция ξ содержалась в Ψ_*, необходимо и достаточно, чтобы нашлась константа $C \geq 1$, такая что выполняются неравенства

$$C^{-1} \cdot v \leq \psi(v) \cdot \xi(v) \leq C \cdot v,\ 0 \leq v < \infty.$$

Пусть N-модуляра Φ содержит выпуклую функцию φ и пусть $I_2\varphi \in \mathfrak{N}$ обозначает N-функцию, дополнительную к φ, [2], а $I_3\varphi \in \mathfrak{M}$ обозначает M-функцию, обратную к φ. Содержащие эти функции модуляры мы называем *дополнительной* к Φ N-модулярой $I_2\Phi$ (соответственно, *обратной к* Φ *M-модулярой* $I_3\Phi$). Для модуляр обратимость отображений I_2 и I_3 очевидна, причём I_2 является инволюцией в классе $\mathfrak{N}$. Из леммы 1.2 и из формулы (2.10), [2], вытекает, что справедлива

Лемма 1.3. Для любой N-функции φ имеет место эвивалентность $M-$функций $I_3I_2\varphi \overset{m}{\sim} I_1I_3\varphi$, которую для модуляр мы записываем в виде равенства:

$\boxed{\textbf{ПЕРВАЯ ИНВОЛЮЦИОННАЯ ФОРМУЛА: } I_3I_2\Phi = I_1I_3\Phi.}$

Определим операцию *инверсии* $I_4 : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ формулой:

$$I_4\zeta(t) = t\zeta(\frac{1}{t}),\ t \in [0, \infty).$$

Взятием первой и второй производных элементарно проверяется, что верна

Лемма 1.4. Если ζ вогнутая функция, то вогнута и её *инверсная* функция $I_4\zeta$.

Поскольку инверсия эквивогнутых функций сохраняет $\overset{m}{\sim}$эквивалентность, для M-функции $\psi \in \Psi$ можно говорить об *инверсной* M-модуляре $I_4\Psi$; ясно, что инверсное отображение $I_4 : \mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M}$ действует как инволюция: $I_4 I_4 \Psi = \Psi$.

Замечание 1.5. 1. Очевидно, что для любой M-функции ψ справедливо равенство

$$I_4 I_1 \psi(t) = [\psi(t^{-1})]^{-1}, \ t > 0. \tag{1.5}$$

2. Предположим, что ψ_1 и ψ_2 - две M-функции. Очевидно, что M-функцией будет и их композиция $\psi_1 \circ \psi_2$. причём $I_4(\psi_1 \circ \psi_2) = I_4 \psi_1 \circ I_4 \psi_2$.
3. Класс всех степенных модуляр очевидным образом замкнут относительно инволюций $I_1 - I_4$.

Замечание 1.6. В силу первой инволюционной формулы для любой N-функции φ справедлива эквивалентность $I_4 I_3 I_2 \varphi \overset{m}{\sim} I_4 I_1 I_3 \varphi$, так что эта формула переписывается как равенство M-модуляр из $\mathfrak{M}$:

$\boxed{\textbf{ВТОРАЯ ИНВОЛЮЦИОННАЯ ФОРМУЛА: } I_4 I_3 I_2 \Phi = I_4 I_1 I_3 \Phi}$

Определение 3. Зафиксируем некоторую эквивыпуклую функцию $\varphi \in \mathfrak{F}$. Эквивогнутую функцию $I_4 I_1 I_3 \varphi \in \mathfrak{F}$ будем называть *сопоставленной* к φ и обозначать $\varphi^\frown$. Название переносится на M-модуляру $\Phi^\frown$, содержащую $\varphi^\frown$. Любая M-модуляра Ψ является сопоставленной для N-модуляры $\Psi^\smile := (I_3)^{-1} I_1 I_4 \Psi$. В самом деле, $(\Psi^\smile)^\frown = I_4 I_1 I_3 (I_3)^{-1} I_1 I_4 \Psi = \Psi$ (и аналогично $(\Phi^\frown)^\smile = \Phi$), ибо I_1 и I_4 - инволюции, а I_3 - обратимый оператор. Это даёт основание к введению понятия *взаимосопоставленности*, как для функций, так и для модуляр.

Замечание 1.7. 1. Вторая инволюционная формула по сути дела означает справедливость утверждения: *M-модуляра Ψ и N-модуляра Φ взаимосопоставлены, тогда и только тогда, когда взаимосопоставлены двойственная для Ψ M-модуляра Ψ_* и дополнительная для Φ N-модуляра Φ^**. Аналогично первая инволюционная формула означает, что *если M-модуляра Ψ и N-модуляра Φ взаимосопоставлены, то сопоставленная к N-модуляре Φ^* M-модуляра $(\Phi^*)^\frown = \Psi_*$ может быть записана как $\Psi_* = I_4 I_3 \Phi$*.
2. Для степенных модуляр взаимосопоставленными являются пары $\Big(\mathsf{M}_\alpha, \mathsf{L}_p\Big)$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $0 \le \alpha < \infty$, степенных пространств Марцинкевича и Лебега.

2. Некоторые инвариантные свойства модуляр Марцинкевича и Орлича.

Одна из наших целей - свести некоторые модулярные свойства на бесконечности взаимосопоставленных пар Марцинкевича-Орлича к свойствам в нуле модуляр Марцинкевича. С учётом формулы (1.5) с этой целью иногда удобно приписывать функции $M_\zeta(s)$ значение

$$M_\zeta(s) = \sup_{0<t\leq 1} \frac{\zeta(s\cdot t)}{\zeta(t)},\ 0 \leq s < \infty, \tag{2.1}$$

понимая под ζ либо M-функцию ψ, либо $I_4 I_1 \psi$.

Ниже все инварианты связаны с мультипликативным сжатием-растяжением полуоси:

$$\sigma_s : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} :\ \sigma_s F(t) = F(s\cdot t),\ t > 0;\ s \geq 0$$

для случев, когда этот оператор действует на классе эквивыпуклых /эквивогнутых нормирующих функций.

Перечислим рассматриваемые здесь инварианты.

I. Δ_2-условие N-модуляры в соответствии с регулярностью сопоставленной M-модуляры;

II. Регулярность изменения M-и N-модуляр;

III. Суб/супермультипликативность M-модуляры в соответствии с Δ'-условием сопоставленной N-модуляры;

IV. Эквимультипликативность M-модуляр;

V. Экстремальность M-модуляр;

VI. Совпадение по запасу элементов пространств Орлича и Марцинкевича.

I. **Δ_2-условие N-модуляры и регулярность сопоставленной M-модуляры.**

Определение 4. Говорят, что N-функция φ *удовлетворяет* Δ_2*−условию*, если $\varphi \overset{m}{\sim}$эквивалентна на бесконечности функции $\sigma_2\varphi$ (ср. [2]). Мы говорим, что *N-модуляра* Φ *удовлетворяет* Δ_2*−условию*, если она содержит N-функцию, удовлетворяющую Δ_2−условию. В этом и только в этом случае пространство Орлича L^*_Φ сепарабельно, [2].

Мы будем называть M-модуляру Ψ *регулярной*, если M-функция ψ, $\psi \in \Psi$, является *регулярной*, т.е. для неё выполнено условие

$$\lim_{s\to 0} \limsup_{t\to 0} \frac{s\psi(t)}{\psi(s\cdot t)} < 1.$$

Легко проверяется, что регулярность - модулярное свойство в нуле. Оно, как известно, [3], равносильно свойству Харди-Литтлвуда пространства Марцинкевича $\mathsf{M}_\Psi[0,1]$, порождённому модулярой Ψ.
В [13] мы покажем, как из второй инволюционной формулы вытекает, что для взаимосопоставленных модуляр (и только для них), содержащих, соответственно, N-функциию φ и M-функциию $\varphi^\frown$, регулярность $\varphi^\frown$ равносильна выполнению Δ_2-условия для φ. Иными словами, *если Φ и Ψ взаимосопоставленные модуляры, то сепарабельность пространства Орлича L^*_Φ равносильна выполнению свойства Харди-Литтлвуда в пространстве Марцинкевича M_Ψ*. Отсюда сразу же вытекает первая часть теоремы 3 [5]: *суперпозиция $\psi_1 \circ \psi_2$ двух M-функций регулярна, тогда и только тогда, когда каждая из этих функций регулярна.*

II. **Регулярность изменения.**

Определение 5. Нормирующую функцию F будем называть *функцией регулярного изменения на бесконечности (в нуле) с показателем α*, $0 \le \alpha \le \infty$, если в соответственных областях выполняется эквивалентность

$$\mathcal{F}_\alpha : \limsup_{t\to\infty} \frac{F(s\cdot t)}{F(t)} \overset{m}{\sim} s^\alpha (\text{соответственно}, \limsup_{t\to 0} \frac{F(s\cdot t)}{F(t)} \overset{m}{\sim} s^\alpha).$$

Модуляры, содержащие функции регулярного изменения, мы называем модулярами регулярного изменения (с соответствующим показателем). Очевидно, что для M-модуляр регулярного изменения (всё равно, - в нуле или на бесконечности) их показатель α содержится на промежутке $[0,1]$, тогда как для N-модуляр $\alpha \ge 1$. Для случая $\alpha = 1$ M-модуляру называют *быстро*, а N-модуляру - *медленно изменяющейся* (или *варьируемой*), а в случаях $\alpha = 0$ (соответственно $\alpha = \infty$) - наоборот, [6]. [1]

Рассмотрим пример топологического инварианта, индуцированного изометрией - регулярно варьируемые M-функции, [6]. Напомним, что M-функция ψ называется *регулярно варьируемой с показателем α*, $0 \le \alpha \le 1$, если

$$\mathbf{P}_\alpha : \lim_{t\to 0} \frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} = s^\alpha, \; 0 \le s < \infty.$$

Свойство $\mathbf{P}_\alpha$ единичной сферы пространства Марцинкевича M_ψ может быть потеряно при эквивалентной перенормировке. Доказано, [12], что

[1] Мы не станем уточнять очевидного значения символа $\overset{m}{\sim}$ для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$.

оно индуцирует топологический инвариант $\mathcal{P}_\alpha$ M-модуляры - быть регулярного изменения. Отметим очевидные свойства этого инварианта.

Лемма 2.1. Следующие утверждения равносильны.

1). Эквивогнутая функция ψ есть функция регулярного изменения на бесконечности (в нуле) с показателем $\alpha,\ 0 \le \alpha \le 1$;
2). Инверсная с ψ эквивогнутая функция $I_4\psi$ есть функция регулярного изменения в нуле (на бесконечности) с показателем $1-\alpha$.
3). Двойственная с ψ функция $I_1\psi = \psi_*$ есть функция регулярного изменения на бесконечности (в нуле) с показателем $1-\alpha,\ 0 \le \alpha \le 1$;
4). Обратная к ψ эквивыпуклая функция φ есть функция регулярного изменения на бесконечности с показателем $\frac{1}{\alpha},\ 0 \le \alpha \le 1$.

Замечание 2.2. 1. Взаимосопоставленные функции могут быть регулярного изменения (и при этом принадлежещими взаимно обратным показателям α и $\frac{1}{\alpha},\ \alpha \ge 0$) только одновременно.

2. Из леммы 2.1 следует, что для M-функции ψ условие (4.2) работы [9]: $\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(\lambda\cdot t)}{\psi(t)} < \infty$, которое означает, что ψ - медленно меняющаяся на бесконечности вогнутая функция, влечёт, что $I_4\psi$ есть быстро меняющаяся M-функция. Но тогда в силу [12] (см. также [10] и [11] вместе с содержащейся там библиографией) найдётся M-функция $\xi \overset{m}{\sim} I_4\psi$, такая что $\lim_{t\to 0}\frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)} = s,\ s\in[0,\infty)$. Тем самым для инверсной M-функции $I_4\xi$, $\overset{m}{\sim}$эквивалентной ψ, выплняются равенства $\lim_{t\to\infty}\frac{I_4\xi(\lambda\cdot t)}{I_4\xi(t)} = 1,\ \lambda\in[0,\infty)$. Существование такой M-функции весьма непросто доказывается в опорной лемме 4.2, [9].

III. **Суб/супермультипликативность и Δ'-условие сопоставленной N-модуляры.**

Определение 6. Функцию $F = F(t) \in \mathfrak{F}$, а вместе с ней - её модуляру, - будем называть *субмультипликативной на бесконечности* (или *в нуле*), если найдётся константа $C \ge 1$, такая что при любом неотрицательном s в окрестности бесконечности (соответственно, нуля) выполняются неравенства

$$F(t\cdot s) \le C\cdot F(t)\cdot F(s).$$

В литературе субмультипликативная на бесконечности N-функция называется иногда удовлетворяющей Δ'-условию, [2]. Там же отмечается,

что Δ'-условие силнее, чем Δ_2-условие.
Супермультипликативной называется нормирующая функция (модуляра), для которой условие аналогичное Δ'-условию выполнется с неравенствами противоположного смысла.

Очевидно, что оба свойства суб- и супермультипликативности модулярные. Более того - для M-, а также для N-модуляр они ещё и взаимно двойственные. Действительно, например, эквивогнутая функция ψ субмультипликативна (супермультипликативна), тогда и только тогда, когда дуальная к ней эквивогнутая функция $I_1\psi$ супермультипликативна (соответственно, субмультипликативна), а из инволюционных формул вытекает, что для N-модуляр в этом утверждении вместо двойственной следует брать дополнительную N-модуляру, т.е. вместо отображения I_1 отображение I_2.

Ясно также, что для любой субмультипликативной на бесконечности N-модуляры обратная к ней является супермультипликативной на бесконечности M-модулярой, и наоборот.

Напротив того, инверсия сохраняет эти свойства: очевидно, что если эквивогнутая функция ψ субмультипликативна (супермультипликативна), - в нуле или на бесконечности, - то её инверсная эквивогнутая функция тоже субмультипликативна (соответственно, супермультипликативна).

Замечание 2.3. Эквивогнутая функция φ субмультипликативна, тогда и только тогда, когда $\varphi \overset{m}{\sim} M_\varphi$. Действительно, поскольку субмультипликативность инвариантна относительно $\overset{m}{\sim}$эквивалентности эквивогнутых функций, а $\overset{m}{\sim}$эквивалентность последних влечёт $\overset{m}{\sim}$эквивалентность их функций растяжения, то для субмультипликативной M-функции ψ имеем: $\psi(s) = \psi(1) \cdot \frac{\psi(s\cdot 1)}{\psi(1)} \leq \psi(1) \cdot \sup_{0\leq t<\infty} \frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} = \psi(1) \cdot M_\psi(s) \leq C \cdot \sup_{0\leq t<\infty} \frac{\psi(s)\cdot\psi(t)}{\psi(t)} = C \cdot \psi(s),\ s \geq 0.$

Из инволюционных формул вытекает, что переход от N-модуляры к сопоставленной M-модуляре сохраняет суб- а также супермультипликативность. Поэтому *N-модуляра Φ пространства Орлича L^*_Φ удовлетворяет Δ'-условию, тогда и только тогда, когда сопоставленная M-модуляра $\Phi^\frown$ является субмультипликативной в нуле.*

Отметим здесь доказанные в [13] факты.

Замечание 2.4. 1). Каждая субмультипликативная M-модуляра Ψ обладает свойством $\mathcal{P}_\alpha$ для подходящего $\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1$.

2). Для случая $\alpha = 1$ верно и обратное: быстро меняющаяся M-

модуляра, полумультипликативна. Как отмечалось выше (см. [10], [11], позднее - в [9]) в этом случае найдётся *быстро меняющаяся* M-функция ψ из класса $\overset{m}{\sim}$эквивалентности Ψ, для которой выполнены равенства $\mathbf{P}_1$. Доказано, [9], что существование быстро меняющегося представителя ψ M-модуляры Ψ равносильно ещё и существованию непрерывного симметричного функционала над пространством Марцинкевича M_{ψ_*}.

IV. Эквимультипликативность.

Определение 7. Модуляра, являющаяся одновременно суб- и супермультипликативной, называется *эквимультипликативной.*

Замечание 2.5. Эквивогнутые функции ψ и M_ψ могут быть эквимультипликативными только одновременно, и в этом случае они $\overset{m}{\sim}$эквивалентны друг другу. В этом и только в этом случае обе они $\overset{m}{\sim}$эквивалентны степенной M-функции s^α, где число α, $0 \le \alpha \le 1$, равно общему значению верхнего и нижнего индексов функций ψ и M_ψ.

Доказательство. Уже отмечалось, что эквивогнутая функция может быть эквимультипликативна только вместе со своей двойственной. Поэтому, если ψ эквимультипликативна, то по формуле (1.2) и по Замечанию 2.3 такова же и M_ψ, Остальное вытекает, например, из Замечания 2.4. Обратное утверждение очевидно. □

V. **Экстремальность модуляр.**

Лемма 2.6. Предположим, что ψ эквивогнутая функция, пусть $0 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$. Функция ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$.

Доказательство. Пусть $p < \frac{1}{\delta_\psi}$. В силу стр.79, [1], $\delta_{\psi^p} = p \cdot \delta_\psi < 1$. Значит найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $\delta_{\psi^p} + \varepsilon < 1$. В силу (1.20), стр. 76, [1], при $s \ge s_\varepsilon > 1$ справедливо: $M_{\psi^p}(s) \le s^{\delta_{\psi^p}+\varepsilon} \le s$.
Тем самым мы оказываемся в условиях Следствия 1 стр.78, [1], согласно которому функция ψ^p эквивогнута, будучи $\overset{m}{\sim}$эквивалентной своей наименьшей вогнутой мажоранте.
Обратно, пусть функция $\psi^p \overset{m}{\sim} \varphi$, где φ - M-функция. Предположим. что $p > \frac{1}{\delta_\psi}$. Как отмечалось, $\delta_\varphi = \delta_{\psi^p}$, откуда по стр. 79, [1], $\delta_\varphi = p \cdot \delta_\psi > 1$. Но, согласно формуле (1.24), [1], для M-функции φ это

неравенство невозможно. □

Замечание 2.7. Известно, [15], что при $1 \leq p \neq 1/\delta_\psi$ пространство Марцинкевича $\mathsf{M}_\psi[0,1]$ является p-выпуклым, [14], (и, стало быть, пространство Лоренца $\Lambda_{\psi_*}[0,1]$ является q-выпуклым, $1/p+1/q=1$), тогда и только тогда, когда $1 \leq p < 1/\delta_\psi$.

Определение 8. Будем говорить, что M-функция ψ *экстремальна*, если функция $\psi(t)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$ является эквивогнутой.

Опираясь на [1], приходим к результату:
Теорема 2.8. Следующие условия равносильны.

1). ψ экстремальна;
2). Существуют такая эквивогнутая функция ξ с $\delta_\xi = 1$ и такое число α, $1 < \alpha \leq 1$, что при M-функция ψ представима в виде

$$\psi(t) = \Big(\xi(t)\Big)^\alpha, \tag{2.2}$$

В этом представлении α совпадает с δ_ψ;
3). $M_\psi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\psi}$ на бесконечности;
4). $M_{\psi_*}(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_{\psi_*}}$ в нуле.

Доказательство. Если имеет место представление (2.2), то по формулам стр. 79, [1], $\delta_\psi = \alpha$ и $\Big(\psi\Big)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$ эквивогнутая функция. Обратно, если $\Big(\psi\Big)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$ эквивогнутая функция, то $\delta_\varphi = \frac{1}{\delta_\psi} \cdot \delta_\psi = 1$, откуда следует представление (2.1), в котором $\alpha = \delta_\psi$.
Эквивалентность 3) и 4) следует из формулы (1.2). Покажем, например, 3) $\Rightarrow$ 4). При $0 < s \leq 1$ имеем: $M_{\psi_*}(s) = s{\cdot}M_\psi(\frac{1}{s}) = s{\cdot}s^{-\delta_\psi} = s^{1-\delta_\psi} = s^{\gamma_{\psi*}}$, и в точности также в другую сторону.
2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\psi(t)$ экстремальная эквивогнутая функция, т.е. $\Big(\psi(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$ $\overset{m}{\sim}$эквивалентна M-функции $\varphi(t)$. В силу $\overset{m}{\sim}$эквивалентности и 2) $\delta_\varphi = 1$. Опять используя $\overset{m}{\sim}$эквивалентность, лемму 1.1 и формулы стр. 79, [1], получаем: $M_\psi(s) \overset{m}{\sim} M_{(\varphi)^{\delta_\psi}}(s) = \Big(M_\varphi(s)\Big)^{\delta_\psi} \overset{m}{\sim} s^{\delta_\psi}$. Обратно, предполагая, что $M_\psi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\psi}$, $s \geq 1$, и покажем, что ψ - экстремальная эквивогнутая функция. Положим $\varphi(t) = \Big(\overline{\psi}(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\psi}}}}$, где M-функция $\overline{\psi}$

эквивалентна ψ, и покажем, что φ эквивогнута. Ясно, что φ не убывает. Кроме того $M_\varphi(s) = \left(M_{\overline{\psi}}(s)\right)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\psi}}}} \overset{m}{\sim} s,\ s \geq 1$. Значит для подходящей константы $C > 0$ справедливо: $\sup_{t>0} \frac{\varphi(s\cdot t)}{\varphi(t)} \leq C \cdot s,\ s \geq 1$, откуда $\frac{\varphi(s\cdot t)}{s\cdot t} \leq C \cdot \frac{\varphi(t)}{t},\ s \geq 1,\ t > 0$. С учётом неубывания φ мы оказываемся в условиях теоремы 1.1 стр. 69 [1], согласно которой φ эквивалентна положительной вогнутой функции и, следовательно, эквивогнута. Но, поскольку $\psi \overset{m}{\sim} \overline{\psi}$, то $\varphi = \left(\overline{\psi}\right)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\psi}}}} \overset{m}{\sim} \left(\psi\right)^{\frac{1}{\delta_\psi}}$, значит ψ экстремальная. $\square$

Нетрудно видеть, что при $p = 1/\delta_\psi$ пространство Марцинкевича $\mathsf{M}_\psi[0,1]$ является p-выпуклым, тогда и только тогда, когда M-функция ψ экстремальна, т. е. когда выполняется условие 4) Теоремы 2.8.

Из замечания 2.5 и теоремы 2.8 вытекает

Следствие 2.9. Если $\psi(t)$ экстремальная субмультипликативная функция, то она $\overset{m}{\sim}$эквивалентна степенной t^{δ_ψ} на бесконечности, а её двойственная $\psi_*(t)$ $\overset{m}{\sim}$эквивалентна степенной $t^{\gamma_{\psi_*}}$ в нуле.

VI. **Совпадение по запасу элементов пространств Орлича и Марцинкевича.**

В статье [16] изучался вопрос о совпадении по составу элементов пространств Марцинкевича $\mathsf{M}_\psi(0,1)$ и пространства Орлича L^*_φ, (это совпадение, разумеется, представляет собой, топологический инвариант каждого из этих пространств). Полученный позднее в работе [7] критерий приводится здесь в следующем виде.

Теорема C ([7]). Пусть ψ - M-функция на [0,1]. Пространство Марцинкевича $\mathsf{M}_\psi(0,1)$ совпадает по составу элементов с пространством Орлича L^*_φ, тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия.

1). $\varphi(u) \overset{m}{\sim} \frac{1}{\psi_*^{-1}(u^{-1})}$ на бесконечности;
2). ψ регулярна;
3). $\sum_{n\geq 1} 2^n \psi_*^{-1}(\varepsilon \cdot \psi_*(2^{-n})) < \infty$ для подходящего $\varepsilon > 0$.

Поскольку рассматриваемый M-инвариант путём перехода к обратным, инверсным, дополнительным и двойственным модулярам можно свести к инвариантности M-модуляр в нуле, то, как и ко всем предыдущим пяти M-инвариантам, в [13] язык и техника натуральных баз, развитые в [4] и [8], в [13] применяются также и к этому.

Литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978.

2. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Г.И.Ф-М.Л., 1958.

3. **Shimogaki T.** Hardy-Littlewood Majorants in Function Spaces// *J. Mathem. Soc. Japan, 17(1965),365-373.*

4. **Mekler A. A.** On Regularity and Weak Regularity of Functions Generating Marcinkiewicz Spaces// *Proc. Intern. Conf. "FUNCTION SPACES, V."- Poznan, Poland, July 2000, ed. by H. Hudzik and L. Skrzypczak. Marcel Dekker, Lect. Not. Pur. Appl. Math. Ser.,* **213**, *pp. 379-387.*

5. **Меклер А. А.** О полугруппе модулярных функций с операцией инволюции// *Записки научных семинаров ПОМИ, т. 315, 2004, с. 121 - 131.*

6. **Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.** Regular Variations. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

7. **Седаев А. А., Смуров В. А.** О нахождении одной числовой характеристики для пространств Марцинкевича// *В сб. "Методы решения операторных уравнений,"ВГУ, Воронеж, 1978, с. 135-142.*

8. **Меклер А. А.** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр// *Вестник Сыктывкарского Университета, Сер.1, вып. 8, 2008, с. 27 - 38.*

9. **Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семёнов Е. М., Сукочев Ф. А.** Сингулярные симметричные функционалы// *Записки научных семинаров ПОМИ, т. 290, 2002, с. 42 - 71.*

10. **Меклер А. А.** О существовании $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$ для вогнутой функции ψ// *"Тезисы X-й Всесоюзной Школы по теории операторов в функциональных пространствах."Челябинск, 1986, т. 2, с. 117-118.*

11. **Drasin D., Seneta E.** A generalization of slowly varying function// *Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986) pp. 470-472.*

12. **Abakumov E. V., Mekler A. A.** A Concave Regularly Varying Leader for Equi-concave Functions// *J. Math. Anal. Appl. 187(1994)3, c. 943-951.*

13. **Меклер А. А.** Замечания о соответствии между топологическими инвариантами пространств Марцинкевича и Орлича, II.// *Вестник Сыктывкарского Университета, Сер.1, вып. , 2011, с. 49–66.*

14. **Lindenstrauss J. and Tzafriri L.**, Classical Banach Spaces II, Springer, Berlin, 1979.

15. **Новиков С. И.** Котип и тип функциональных пространств Лоренца// *Матем. заметки, 32(1982)2, p.213-221. (in Russian)*

16. **Рутицкий Я. Б.** О некоторых классах измеримых функций// *УМН 20(1965)4, с. 205- 208.*

Summary

Mekler A. A. Remarks on the correspondence between the topological invariants of spaces, Marcinkiewicz and Orlicz, I

In this paper is presented a parallel approach to treating of some invariants of two kinds of classical Banach Function Spaces namely Marcinkiewicz and Orlicz spaces which are denoted M_ψ and L^*_φ, respectively. The exposition has the goal to state that there is such a way of mutually associating into couples $(M_\psi, \mathsf{L}^*_{\psi^\smile})$ (as well as $(\mathsf{M}_{\varphi^\frown}, \mathsf{L}^*_\varphi)$) that isomorphic properties of one of counterpart transfer into they of another one. Moreover by the way the isomorphic properties at ∞ allow to be reduced to ones at 0.

Keywords: Banach Function Spaces, Marcinkiewicz Space, Orlicz Space, function, invariant.

Universities of Sankt Petersburg/Bremen *Поступила 01.10.2010*