*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.14.2011*

УДК 512.566

РЕШЕТКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЕДИНИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

В работе изучаются решетки $C(X, \mathbf{I})$ всех непрерывных функций, заданных на топологических пространствах X и принимающих значения в числовом отрезке $\mathbf{I} = [0, 1]$. Доказана определяемость любого компакта X как решеткой идеалов, так и решеткой конгруэнций решетки $C(X, \mathbf{I})$. Описаны замкнутые идеалы топологических решеток $C_p(X, \mathbf{I})$ с топологией поточечной сходимости. Как следствие получена определяемость произвольного тихоновского пространства X решеткой $C_p(X, \mathbf{I})$.
Ключевые слова: решетка, функция, определяемость, идеал, фильтр, полукольцо, аннулятор, конгруэнция, тихоновское пространство.

1. Введение

Разнообразные алгебраические системы функций и пространства функций образуют важнейшее направление в математике, составляющее в частности основу функционального анализа, общей топологии, топологической алгебры. Многие абстрактные математические объекты могут быть реализованы как функциональные структуры.

В этой статье рассматриваются решетки $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ всевозможных непрерывных вещественнозначных функций на топологических пространствах X с поточечным отношением порядка: для любых функций $f, g \in C(X)$

$$f \leq g \text{ означает, что } f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Это будут дистрибутивные решетки $C(X)$ с операциями $max(\vee)$ и $min(\wedge)$ над функциями.

Нас интересуют их подрешетки $C(X, \mathbf{I})$ функций со значениями в единичном отрезке $\mathbf{I} = [0, 1]$, которые являются также подрешетками полных решеток $\mathbf{I}^X$ всевозможных $\mathbf{I}$-значных функций на X. Получаем уже ограниченные дистрибутивные решетки с наименьшим (наибольшим) элементом — функцией-константой $\mathbf{0}$ ($\mathbf{1}$) над X. Решетки $C(X, \mathbf{I})$ очевидно являются коммутативными полукольцами.

Заметим, что решетки $C(X, \mathbf{I})$ по своим свойствам близки к идемпотентным полукольцам $C(X, \mathbf{I})$, наделенным операциями сложения $\vee$ и обычного умножения функций. Но имеются и отличия уже решетки $\mathbf{I}$ от полукольца $\mathbf{I}$: идеалы в них совпадают, но все собственные идеалы решетки $\mathbf{I}$ простые, а в полукольце $\mathbf{I}$ простыми будут только два идеала — нулевой $\{0\}$ и наибольший $[0, 1)$. Далее в тексте под полукольцами $C(X, \mathbf{I})$ будем понимать указанные идемпотентные полукольца.

Решетки $C(X)$ изучались в работах [1–6]. Капланский [2] доказал определяемость всякого компакта X соответствующей решеткой $C(X)$. Затем Широта [3] усилил этот результат, показав, что любое хьюитовское пространство X определяется решеткой $C(X)$. В свою очередь Нагата [4] доказал определяемость уже произвольного тихоновского пространства X топологической решеткой $C_p(X)$, наделенной топологией поточечной сходимости. В. В. Пашенков [5] передоказал этот результат другим способом.

При изложении мы используем терминологию и некоторые результаты известных монографий [7–10].

Решетки $C(X, \mathbf{I})$ стали изучаться значительно позднее. Одними из первых работ по исследованию алгебраических свойств решеток и полуколец $C(X, \mathbf{I})$ стали статьи [11–13].

2. Предварительные понятия

Введем исходные определения и обозначения.

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $< S, + >$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $< S, \cdot >$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любых $a, b, c \in S$. Будем рассматривать коммутативные полукольца.

Идеалом (*фильтром*) полукольца S называется всякое его непустое подмножество J, такое, что для любых $a, b \in J$, $s \in S$ выполняется: $as \in J$, $a+b \in J$ ($a+s \in J$, $ab \in J$). Для идеалов I, J полукольца S множества $I + J = \{f + g : f \in I, g \in J\}$ и $I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i : f_i \in I, g_i \in J, n \in \mathbf{N}\}$ также являются идеалами в S.

Аннулятором непустого подмножества M полукольца S называется множество $\mathrm{Ann}M = \{s \in S : ms = 0\}$, которое необходимо будет идеалом в S. Идеал вида $AnnM$ называется *аннуляторным*. Легко видеть, что идеал A полукольца S будет аннуляторным тогда и только тогда, когда $A = Ann(AnnA)$.

Множество IdS всех идеалов полукольца S относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$ есть решетка с операциями $sup(I, J) = I \vee J = I + J$ и $inf(I, J) = I \wedge J = I \cap J$. Множество AnS всех аннуляторных идеалов полукольца S относительно $\subseteq$ также будет решеткой, не являющейся, вообще говоря, подрешеткой в IdS.

Отношение эквивалентности ρ на полукольце S называется *конгруэнцией*, если ρ сохраняет полукольцевые операции, то есть

$$\forall a, b, a_1, b_1 \in S \ (a\rho b \text{ и } a_1\rho b_1 \implies (a + a_1)\rho(b + b_1) \text{ и } (aa_1)\rho(bb_1)).$$

Множество всех конгруэнций полукольца S образует решетку $ConS$ по отношению включения: $\rho_1 \subseteq \rho_2 \iff \forall a, b \in S \ (a\rho_1 b \Rightarrow a\rho_2 b)$ для любых $\rho_1, \rho_2 \in ConS$. Операции в решетке $ConS$ определяются следующим образом: $\rho_1 \wedge \rho_2 = \rho_1 \cap \rho_2$, $\rho_1 \vee \rho_2$ – транзитивное замыкание композиции отношений $\rho_1 \circ \rho_2$. Напомним, что при любых $a, b \in S$ и $\rho_1, \rho_2 \in ConS$

$$a(\rho_1 \cap \rho_2)b \iff a\rho_1 b \text{ и } a\rho_2 b, \quad a(\rho_1 \circ \rho_2)b \iff \exists c \in S \ (a\rho_1 c \text{ и } c\rho_2 b).$$

Наибольшим элементом решетки $ConS$ является *единичная* конгруэнция $\mathbf{1} : a\mathbf{1}b$ для любых $a, b \in S$ (то есть одноклассовая конгруэнция на S). Наименьшим элементом в $ConS$ служит *нулевая* конгруэнция $\mathbf{0}$: $a\mathbf{0}b \iff a = b$ для любых $a, b \in S$ (то есть отношение равенства).

Замечание 1. На топологическом пространстве X введем следующее отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$, если $f(x) = f(y)$ для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$. На фактормножестве $\tau X = X/\sim$ существует наименьшая топология, относительно которой непрерывны все функции $\overline{f} : \tau X \to \mathbf{I}$, где $f \in C(X, \mathbf{I})$ и $\overline{f}(\widetilde{x}) = f(x)$ при любом $x \in X$ ([7, p. 41]). Пространство τX *тихоновское* (то есть вполне регулярное хаусдорфово) и $C(X, \mathbf{I}) \cong C(\tau X, \mathbf{I})$ при каноническом отображении $f \mapsto \widetilde{f}$. Для пространства τX существует стоун-чеховская компактификация $\beta(\tau X) = Z$, дающая изоморфизм $C(\tau X, \mathbf{I}) \cong C(Z, \mathbf{I})$ ([7, p. 82]) Таким образом, любому топологическому пространству X соответствует *компакт* $Z = \beta\tau X$ (то есть компактное хаусдорфово пространство), такой, что полукольца $C(Z, \mathbf{I})$ и $C(X, \mathbf{I})$ канонически изоморфны. Поэтому для изучения алгебраических свойств полукольца и решетки $C(X, \mathbf{I})$ можно считать пространство X компактом. $\square$

Под *окрестностью* подмножества топологического пространства понимается любое содержащее его открытое множество. Через $\overline{U}$ будем обозначать замыкание множества $U \subseteq X$, через U^0 — его внутренность.

Каждой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ соответствует *нуль-множество* $\mathrm{Z}(f) = f^{-1}(0)$, его внутренность $\mathrm{Z}^0(f)$ и *конуль-множество* $\mathrm{coz}f = X \setminus Z(f)$. Любому подмножеству $A \subseteq X$ в полукольце (решетке) $C(X, \mathbf{I})$ отвечают идеал $M_A = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(A) = \{0\}\}$ и конгруэнция $\rho_A : f\rho_A g \Leftrightarrow f = g$ на $A \Leftrightarrow A \subseteq \mathrm{Z}(f - g)$.

Каждой точке $x \in X$ в решетке $C(X, \mathbf{I})$ сопоставляются:
идеал $O_x = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : x \in \mathrm{z}^0(f)\} = \bigcup\{M_{\overline{U}} : U$ – окрестность точки $x\}$;
фильтр $E_x = 1 - O_x = \{f \in C(X, \mathbf{I})$: $f = 1$ на некоторой окрестности точки $x\}$;
конгруэнция $\delta_x = \bigcup\{\rho_{\overline{U}} : U$ — окрестность точки $x\}$, то есть $f\delta_x g \Leftrightarrow x \in \mathrm{Z}^0(f - g)$ для любых $f, g \in C(X, \mathbf{I})$.

Для нас будут важны следующие три утверждения:

Лемма 1. *Пусть X — тихоновское пространство и $(x_1, x_2, ..., x_k)$ — n-ка его точек. Тогда существуют такая функция $e \in C(X, \mathbf{I})$, что $e(x_1) = 1$ и $e(x_i) = 0, i = 2, ..., k$.*

Доказательство. Поскольку X тихоновское, то для каждого индекса $i = 2, ..., k$ в $C_p(X, \mathbf{I})$ найдется такая функция e_i, что $e_i(x_1) = 1$ и $e_i(x_i) = 0$. Тогда для функции $e = \prod\limits_{i=2,...,k} e_i$ имеем следующие равенства: $e(x_1) = 1$ и $e_i(x_i) = 0$ для любого $i = 2, ..., k$. □

Лемма 2. *Пусть X — тихоновское пространство и U — окрестность точки $x \in X$. Тогда существуют такие окрестности $V \subseteq W$ точки x и функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, что $\overline{W} \subseteq U$ и $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$.*

Доказательство. В силу тихоновости пространства X существует функция $h \in C(X, \mathbf{I})$, для которой $h(x) = 1$ и $h(X \setminus U) = \{0\}$. Положим $f = 4((h - \frac{1}{2}) \vee 0) \wedge 1 \in C(X, \mathbf{I})$. Обозначим $W = U \setminus \{x \in X : h(x) \leq \frac{1}{2}\}$ и $V = \{x \in X : g(x) > \frac{3}{4}\}$, при этом $V \subseteq W \subseteq U$ — окрестности точки x и $X \setminus W$ — окрестность множества $X \setminus U$. Имеем $f = 0$ на $X \setminus W$ и $f = 1$ на окрестности V точки x. □

Легко видеть, что $M_A = M_{\overline{A}}$ для любого подмножества $A \setminus X$. Поэтому в обозначениях леммы 2 имеем $f \in 1 - M_{\overline{V}}$.

Подмножество V топологического пространства X называется *канонически замкнутым*, если $V = \overline{U}$ — замыкание некоторого открытого множества $U \subseteq X$. Отметим, что множество V будет канонически замкнутым тогда и только тогда, когда $V = \overline{V^0}$.

Лемма 3. *Пусть X — тихоновское пространство. Если $y \in X \setminus \{x\}$, то $M_A \vee M_B = C(X, \mathbf{I})$ и $\rho_A \circ \rho_B = \rho_A \vee \rho_B = \mathbf{1}$ для некоторых* *канонически замкнутых множеств* A, B *в* X *с условием* $x \in A^0$, $y \in B^0$.

Доказательство. В пространстве X найдутся непересекающиеся окрестности U_x, U_y точек x, y. Возьмем в $C(X, \mathbf{I})$ функции f_x и f_y, аналогичные функции f из леммы 2. Обозначим $A = M_{\overline{V_x}}$, $B = M_{\overline{V_y}}$, где, как и в лемме 2, V_x и V_y окрестности точек x и y. Тогда для функций $g_x = 1 - f_x \in M_A$ и $g_y = 1 - f_y \in M_B$ получаем $g_x \vee g_y = 1$. Для любой функции $h \in C(X, \mathbf{I})$ имеем $h = h \wedge (g_x \vee g_y) = (h \wedge g_x) \vee (h \wedge g_y) \in M_A \vee M_B$. Значит, $M_A \vee M_B = C(X, \mathbf{I})$. Произвольным функциям $k, l \in C(X, \mathbf{I})$ сопоставим функцию $g = (k \vee g_x) \wedge (l \vee g_y) \in C(X, \mathbf{I})$. Тогда $k \rho_A g$ и $g \rho_B l$, то есть $k(\rho_A \circ \rho_B) l$. Значит, $\rho_A \circ \rho_B = \mathbf{1}$. □

3. Определяемость компакта X решеткой идеалов решетки $C(X, \mathbf{I})$

По изоморфизму решеток идеалов решеток $C(X, \mathbf{I})$ и $C(Y, \mathbf{I})$ над компактами X и Y построим гомеоморфизм $\varphi : X \to Y$. Данное построение легко переносится на случай полуколец $C(X, \mathbf{I})$ [15].

В решетке $IdC(X, \mathbf{I})$ исследуем псевдодополнения ее элементов. Напомним, что *псевдодополнением элемента* a решетки $\langle L, \vee, \wedge, 0 \rangle$ называется наибольший элемент $a^* \in L$, удовлетворяющий условию $a \wedge a^* = 0$.

Для идеалов A и B решетки $C(X, \mathbf{I})$ имеем $A \wedge B = 0 \Leftrightarrow A \cap B = 0$. Поэтому для любого идеала A решетки $C(X, \mathbf{I})$ аннуляторный идеал $\mathrm{Ann} A$ — есть наибольший идеал среди идеалов B с условием $A \cap B = 0$, то есть является псевдодополнением к A. Получаем, что аннуляторные идеалы решетки $C(X, \mathbf{I})$ — это в точности псевдодополнения элементов решетки $IdC(X, \mathbf{I})$.

Предложение 1. $IdC(X, \mathbf{I})$ — *полная решетка с псевдодополнениями.*

Лемма 4. *Если* $\alpha : IdC(X, \mathbf{I}) \to IdC(Y, \mathbf{I})$ — *изоморфизм, то и* $\alpha|_{AnC(X,\mathbf{I})} : AnC(X, \mathbf{I}) \to AnC(Y, \mathbf{I})$ — *также изоморфизм.*

Далее установим взаимно однозначное соответствие между множествами $AnC(X, \mathbf{I})$ и $L(X)$ всех канонически замкнутых подмножеств тихоновского пространства X.

Предложение 2. *Псевдодополнения элементов решетки* $IdC(X, \mathbf{I})$ *совпадают с идеалами вида* M_A *по всем канонически замкнутым подмножествам* $A \subseteq X$.

Доказательство. Достаточно показать, что аннуляторные идеалы решетки $C(X, \mathbf{I})$ совпадают с идеалами вида M_A по всем канонически замкнутым подмножествам $A \subseteq X$.

Пусть дан аннуляторный идеал $\mathrm{Ann}J$ для некоторого идеала $J \in C(X, \mathbf{I})$. Обозначим $\Delta J = \bigcap_{f \in J} Z(f)$. Тогда $\mathrm{Ann}J = M_{\overline{U}}$, $U = X \setminus \Delta J$. Действительно, пусть $f \in \mathrm{Ann}J$ и $x \in U$. Найдется такая функция $g \in J$, что $g(x) \neq 0$ и $f \wedge g = 0$. Поэтому $f(x) = 0$. Значит, $U \subseteq Z(f)$ и $\overline{U} \subseteq Z(f)$. С другой стороны, пусть $f \in M_{\overline{U}}$. Если $g \in J$, то $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g) \subseteq U \cup \Delta J = X$, то есть $f \wedge g = 0$ и $f \in \mathrm{Ann}J$.

Обратно, возьмем в X открытое множество U. Тогда $M_{\overline{U}} = \mathrm{Ann}M_{X \setminus \overline{U}}$. Очевидно $M_{\overline{U}} \subseteq \mathrm{Ann}M_{X \setminus \overline{U}}$. Для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I}) \setminus M_{\overline{U}}$ найдется такая точка $x \in \overline{U}$, что $f(x) \neq 0$. Поэтому найдется функция $g \in C(X, \mathbf{I})$, для которой $g(x) \neq 0$ и $g = 0$ на $X \setminus U$. Значит, $g \in M_{X \setminus \overline{U}}$ и $f \wedge g \neq 0$. Откуда $f \notin AnnM_{X \setminus \overline{U}}$. □

Множество $L(X)$ относительно отношения включения $\subseteq$ есть решетка, в которой $A \wedge B = \overline{A^0 \cap B^0}$, $A \vee B = A \cup B$. Эта решетка *булева* ([8, с. 11]), то есть дистрибутивная решетка с наибольшим (X) и наименьшим $(\varnothing)$ элементами, каждый элемент A которой обладает дополнением $A' = \overline{X \setminus A}$ $(A \vee A' = 1, A \wedge A' = 0)$. Более того, $L(X)$ — полная булева решетка.

Зададим отображение $\mu = \mu_X : AnC(X, \mathbf{I}) \to L(X)$ следующим образом: $\mu(M_A) = A$ по всем канонически замкнутым множествам $A \subseteq X$. В силу предложения 2 отображение μ взаимно однозначно и обращает включения. То есть имеет место следующее утверждение:

Следствие 1. *Решетка $AnC(X, \mathbf{I})$ аннуляторных идеалов решетки $C(X, \mathbf{I})$ антиизоморфна решетке $L(X)$ канонически замкнутых подмножеств пространства X.*

Поэтому решетка $AnC(X, \mathbf{I})$ является полной и булевой.

Введем отображение $\gamma : L(X) \to L(Y)$, $\gamma(A) = \mu_Y(\alpha(\mu_X^{-1}(A)))$ для всех $A \in L(X)$.

Следствие 2. *Если $\alpha : IdC(X, \mathbf{I}) \to IdC(Y, \mathbf{I})$ — изоморфизм, то γ — изоморфизм булевых решеток канонически замкнутых множеств.*

Рассмотрим максимальные фильтры в решетке $L(X)$. Нам понадобятся следующие два хорошо известных свойства булевых решеток:
1) для любого максимального фильтра F и любого $A \in L(X)$ или $A \in F$, или $A' \in F$;
2) любой собственный фильтр содержится в некотором максимальном фильтре.

Пусть $\alpha : IdC(X, \mathbf{I}) \to IdC(Y, \mathbf{I})$ — фиксированный изоморфизм для произвольных компактов X и Y.

Лемма 5. *Для любого максимального фильтра F булевой решетки $L(X)$ существует такая единственная точка $x \in X$, что $\bigcap F = \bigcap_{A \in F} A = \{x\}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\bigcap F \neq \emptyset$. Пусть это не так. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется такое канонически замкнутое множество $A \in F$, что $x \in X \setminus A$. Из открытого покрытия компакта X множествами $X \setminus A$ выберем конечное подпокрытие $X \setminus A_1, ..., X \setminus A_k$. Тогда $\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset$, что невозможно. Значит, $\bigcap F \neq \emptyset$.

Пусть $\bigcap F \supseteq \{x_1, x_2\}$, где $x_1 \neq x_2$ — точки их X. Существует такое канонически замкнутое подмножество A топологического пространства X, что $x_1 \in A^0$ и $x_2 \in A' = \overline{X \setminus A}$. Тогда $A \notin F$ и $A' \notin F$, противоречие. $\square$

На множестве всех максимальных фильтров булевой решетки $L(X)$ введем отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $F \sim G \Leftrightarrow \bigcap F = \bigcap G$. Обозначим через $[F]$ класс эквивалентности, содержащий максимальный фильтр F.

В решетке $L(X)$ определим фильтр, аналогичный идеалу O_x, $x \in X$. Положим $\Theta_x = \{\mu(M_{\overline{U}}) : U$ — окрестность точки $x\}$ — это фильтр в решетке $L(X)$, состоящий из всех канонически замкнутых множеств, содержащих точку x в своей внутренности. Заметим, что $\bigcap \Theta_x = \{x\}$.

Ламма 6. *Для любого максимального фильтра F булевой решетки $L(X)$ с условием $\bigcap F = \{x\}$ имеем $\Theta_x \subseteq F$.*

Доказательство. Рассмотрим $A \in \Theta_x$. Имеем $x \in A^0$ и $x \notin \overline{X \setminus A} = A'$, то есть $A' \notin F$. Значит, $A \in F$. Поэтому $\Theta_x \subseteq F$. $\square$

Предложение 3. *Для любого максимального фильтра F булевой решетки $L(X)$ имеем $\bigcap_{A \in [F]} A = \bigcap [F] = \Theta_x$ для однозначно определенной точки $x \in X$.*

Доказательство. По лемме 6 $\Theta_x \subseteq \bigcap [F]$ для однозначно определенной точки $x \in X$. Покажем, что $\Theta_x \supseteq \bigcap [F]$. Пусть это не так, тогда найдется такое канонически замкнутое множество A, что $A \in G$ для любого $G \in [F]$ и $x \in A \setminus A^0$. Рассмотрим фильтр H в $L(X)$, порожденный множествами Θ_x и $\{A'\}$. Очевидно, $\bigcap H = \{x\}$, то есть H собственный. Найдется содержащий H максимальный фильтр M решетки $L(X)$, принадлежащий $[F]$. Это противоречит тому, что $A' \notin G$ для всех $G \in [F]$. Значит, $\Theta_x \supseteq \bigcap [F]$. $\square$

Покажем, что γ сохраняет отношение $\sim$.

Лемма 7. *Для произвольных максимальных фильтров F и G булевой решетки $L(X)$ имеем*

$$F \sim G \Leftrightarrow \mu^{-1}(A) \vee \mu^{-1}(B) \neq C(X, \mathbf{I}) \textit{ для любых } A \in F \textit{ и } B \in G.$$

Доказательство. Пусть $F \sim G$. По лемме 5 $\bigcap F = \bigcap G = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$. Произвольные множества $A \in F, B \in G$ содержат точку x. Тогда $x \in \delta\mu^{-1}(A) \cap \delta\mu^{-1}(B)$, откуда $\mu^{-1}(A) \vee \mu^{-1}(A) \neq C(X, \mathbf{I})$.

Предположим, что $F \not\sim G$. Тогда $\bigcap F = \{x\} \neq \{y\} = \bigcap G$ для соответствующих точек $x, y \in X$. Возьмем постоенные в лемме 2 канонически замкнутые множества $A \in \Theta_x \subseteq F$ и $B \in \theta_y \subseteq G$. Получаем $C(X, \mathbf{I}) = M_A \vee M_B = \mu^{-1}(A) \vee \mu^{-1}(B)$. $\square$

Из леммы 7 вытекает следующее утверждение:

Следствие 3. *Для произвольных максимальных фильтров F и G булевой решетки $L(X)$ имеем $F \sim G \Leftrightarrow \gamma(F) \sim \gamma(G)$.*

Определим соответствие $\varphi : X \to Y$ между компактими X и Y формулой

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \gamma(\Theta_x) = \theta_y \text{ для любых точек } x \in X, y \in Y.$$

Предложение 3 и следствие 3 показывают, что φ является взаимнооднозначным отображением.

Теорема 1. *Произвольные компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда решетки $IdC(X, \mathbf{I})$ и $IdC(Y, \mathbf{I})$ изоморфны*

Доказательство. Пусть φ — гомеоморфизм компактов X на Y, тогда φ индуцирует изоморфизм решеток $\alpha(\varphi) : C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$, где $\alpha(\varphi)(f)(y) = f(\varphi^{-1}(y))$ для любых функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ и точки $y \in Y$. Значит, изоморфны соответствующие решетки идеалов $IdC(X, \mathbf{I})$ и $IdC(Y, \mathbf{I})$.

Выше по изоморфизму $\alpha : IdC(X, \mathbf{I}) \to IdC(Y, \mathbf{I})$ мы определили биекцию $\varphi : X \to Y$. Покажем, что φ сохраняет некоторую базу топологии. Такой базой будет множество внутренностей всех канонически замкнутых подмножеств X. Рассмотрим любое открытое множество U и точку x в нем. Для U возьмем построенную в лемме 2 окрестность V точки x. Тогда $W = \overline{V}^0 \subseteq U$ и $U = \bigcup_{x \in U} W$.

Пусть $A \in L(X)$ и $x \in X$. Тогда

$$x \in A^0 \Leftrightarrow A \in \Theta_x \Leftrightarrow \gamma(A) \in \theta_{\varphi(x)} \Leftrightarrow \varphi(x) \in \gamma(A)^0.$$

Следовательно, $\varphi(A^0) = \gamma(A)^0$. Таким образом, биекция φ сохраняет базу топологии, то есть является гомеоморфизмом. $\square$

Замечание 2. По известной теореме представления М. Стоуна любая булева решетка (булева алгебра) L изоморфна булевой решетке всех открыто-замкнутых подмножеств *нульмерного* компакта $MaxL$ всех максимальных идеалов в L (со стоуновской топологией), определенного однозначно с точностью до гомеоморфизма [9, с. 41]. Нульмерность пространства означает, что его открыто-замкнутые множества образуют базу. При этом булева решетка L полна тогда и только тогда, когда

$MaxL$ *экстремально несвязно* (то есть замыкание любого открытого в нем множества открыто) [9, с. 140]. Значит, для компакта, не являющегося экстремально несвязным пространством, изоморфизм решеток аннуляторных идеалов не влечет гомеоморфизм соответствующих компактов. □

4. Определяемость компакта X решеткой конгруэнций на $C(X, \mathbf{I})$

Определяемость компакта X решеткой $ConC(X, \mathbf{I})$ конгруэнций на $C(X, \mathbf{I})$ может быть доказана по той же схеме, что и для решетки идеалов $IdC(X, \mathbf{I})$. Покажем это. Рассмотрим псевдодополнения элелементов решетки $ConC(X, \mathbf{I})$. Для полукольца $C(X, \mathbb{R}^+)$ вид псевдодополнений элементов соответствующей решетки конгруэнций установлен в [14], для решетки $C(X, \mathbf{I})$ получается аналогичный результат.

Лемма 8. Для любых конгруэнций ρ, τ на решетке $C(X, \mathbf{I})$ равенство $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$ эквивалентно тому, что $(f-g)(h-q) = 0$ для любых функций $f, g, h, q \in C(X, \mathbf{I})$ со свойствами $f\rho g$ и $h\tau q$.

Доказательство. Предположим, что существуют такие функции $f, g, h, q \in C(X, \mathbf{I})$, что $f\rho g$ и $h\tau q$ и $(f-g)(h-q) \neq 0$. Тогда найдется точка $x \in X$, для которой $f(x) \neq g(x)$ и $h(x) \neq q(x)$. Можем считать, что $f(x) > g(x), h(x) > q(x)$. Для функций $(f \wedge h) \vee (g \wedge q)$ и $(g \wedge h) \vee (f \wedge q)$ имеем: $((f \wedge h) \vee (g \wedge q))(\rho \cap \tau)((g \wedge h) \vee (f \wedge q))$ и $((f \wedge h) \vee (g \wedge q))(x) = (f \wedge h)(x) > ((g \wedge h) \vee (f \wedge q))(x)$. Поэтому $\rho \cap \tau \neq \mathbf{0}$.

Обратно, пусть для любых функций $f, g, h, q \in C(X, \mathbf{I})$, таких, что $f\rho g$ и $h\tau q$, выполняется равенство $(f-g)(h-q) = 0$. Тогда, если $k(\rho \cap \tau)l$ для $k, l \in C(X, \mathbf{I})$, то $(k-l)(k-l) = 0$ и $k = l$. Значит, $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$. □

Предложению 2 соответствует следующее:

Предложение 4. Пусть X — тихоновское пространство. Тогда псевдодополнения элементов в решетке $ConC(X, \mathbf{I})$ совпадают с конгруэнциями вида ρ_A по всем канонически замкнутым подмножествам $A \subseteq X$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любой конгруэнции $\rho \in ConC(X, \mathbf{I})$ существует такое канонически замкнутое множество A, что $\rho^* = \rho_A$. Для это возьмем конгруэнцию ρ_A для $A = \overline{\bigcup_{k\rho l} coz(k-l)}$. Тогда для любых функций $f, g, h, q \in C(X, \mathbf{I})$, таких что $f\rho g$ и $h\rho_A q$, $(f-g)(h-q) = 0$. Значит, по лемме 7 $\rho \cap \rho_A = \mathbf{0}$.

Конгруэнция ρ_A является наибольшей со свойством $\rho \cap \rho_A = \mathbf{0}$. Действительно, для любой конгруэнции $\sigma \in ConC(X, \mathbf{I})$, если $\rho \cap \sigma = \mathbf{0}$, то по лемме 7 для всех функций $f, g, h, q \in C(X, \mathbf{I})$, таких что $f\rho g$ и $h\sigma q$, $(f-g)(h-q) = 0$. Получаем $(h-q) = 0$ на $\overline{\bigcup_{k\rho l} coz(k-l)} = V$ и $\sigma \subseteq \rho_A$. Значит, $\rho^* = \rho_A$.

Покажем, что для канонически замкнутых множеств A и B в X, если $\rho_A = \rho_B$, то $A = B$, то есть множесво A единственное. Предположим, что $A \neq B$. Тогда $A^0 \nsubseteq B$ или $B^0 \nsubseteq A$. Найдется точка $x \in X$, для которой $x \in A^0, x \notin B$ или $x \in B^0, x \notin A$. Достаточно рассмотреть первый случай: пусть $x \in A^0$ и $x \notin B$. Для окрестности $U = A^0 \cap (X \setminus B)$ точки x возьмем функцию $f \in E_x$, построенную в лемме 2. Имеем $f = 0$ на B и $f(x) = 1$, то есть $f \rho_B 0$ и $f \notin [0]_{\rho_A}$. Поэтому $\rho_A \neq \rho_B$.

Обратно, покажем, что для любого канонически замкнутого множнства A конгруэнция ρ_A служит псевдодополнением к конгруэнции $\rho_{\overline{X \setminus A}} \in ConC(X, \mathbf{I})$. По уже доказанному нам достаточно доказать равенство $A = \overline{\bigcup_{k\rho_{\overline{X\setminus A}}l} coz(k-l)}$. Очевидно $\overline{\bigcup_{k\rho_{\overline{X\setminus A}}l} coz(k-l)} \subseteq \overline{A}$. Пусть $x \in \overline{A}$. Найдется окрестность U точки x не пересекающаяся с множеством $\overline{X \setminus A}$. Для нее возьмем функцию f, построенную в лемме 2. Имеем $f \rho_{\overline{X\setminus A}} \frac{1}{2} f$, $(f - \frac{1}{2}f)(x) = \frac{1}{2}$ и $x \in \overline{\bigcup_{k\rho_{\overline{X\setminus A}}l} coz(k-l)}$. Значит, $A = \overline{\bigcup_{k\rho_{\overline{X\setminus A}}l} coz(k-l)}$. □

Для решетки $PC(X, \mathbf{I})$ всех псевдодополнений элементов решетки конгруэнций $ConC(X, \mathbf{I})$ отображение $\nu = \nu_X : PC(X, \mathbf{I}) \to L(X)$, $\nu(\rho_A) = A$ для всех канонически замкнутых множеств $A \subseteq X$, является антиизоморфизмом решеток. Аналогом леммы 7 служит:

Лемма 9. Для произвольных максимальных фильтров F и G булевой решетки $L(X)$ имеем

$$F \sim G \Leftrightarrow \nu^{-1}(A) \vee \nu^{-1}(B) \neq \mathbf{1} \text{ при любых } A \in F \text{ и } B \in G.$$

Доказательство. Пусть $F \sim G$, то есть $\bigcap F = \bigcap G = \{x\}$. Возьмем произвольные множетва $A \in F, B \in G$. Получаем $\nu^{-1}(A) \subseteq \rho_{\{x\}}$ и $\nu^{-1}(B) \subseteq \rho_{\{x\}}$. Значит, $\nu^{-1}(A) \vee \nu^{-1}(B) \subseteq \rho_{\{x\}} \neq \mathbf{1}$.

Предположим, что $F \nsim G$. Тогда $\{x\} = \bigcap F \neq \bigcap G = \{y\}$. Для точек x и y возьмем посторенные в лемме 2 канонически замкнутые множества $A \in \Theta_x \subseteq F$ и $B \in \Theta_y \subseteq G$. Получаем $\mathbf{1} = \rho_A \vee \rho_B = \nu^{-1}(A) \vee \nu^{-1}(B)$. □

Из лемм 8 и 9 и предложения 4 получаем:

Торема 2. Компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда решетки $ConC(X, \mathbf{I})$ и $ConC(Y, \mathbf{I})$ изоморфны.

Из теорем 1 и 2 и замечания 1 вытекает

Следствие 4. *Для произвольных топологических пространств X и Y следующие утверждения эквивалентны:*

1) решетки $C(X, \mathbf{I})$ и $C(Y, \mathbf{I})$ изоморфны;

2) решетки $IdC(X, \mathbf{I})$ и $IdC(Y, \mathbf{I})$ изоморфны;

3) решетки $ConC(X,\mathbf{I})$ и $ConC(Y,\mathbf{I})$ изоморфны.

Замечание 3. Покажем, что не всякий изоморфизм решеток $\alpha : IdC(X,\mathbf{I}) \to IdC(Y,\mathbf{I})$ ($\alpha : ConC(X,\mathbf{I}) \to ConC(Y,\mathbf{I})$) индуцируется гомеоморфизмом компактов X и Y.

Пусть $X = \beta((0,1))$ — стоун-чеховская компактификация числового интервала $(0,1)$. Возьмем непрерывное отображение $r : (0,1) \to [4,+\infty)$, $r(x) = \frac{1}{x-x^2}$. Зададим отображение $\delta : C(X,\mathbf{I}) \to C(X,\mathbf{I})$, положив $\delta(f) = \beta(f^r)$ для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$. Функция $f^r \in C((0,1),\mathbf{I})$ непрерывная и ограниченная на интервале $(0,1)$. Тогда $\delta(f) \in C(X,\mathbf{I})$. Очевидно, что δ — решеточный гомоморфизм. Прообразом произвольной функции $g \in C(X,\mathbf{I})$ будет функция f, заданная формулой $f = \beta(g^{1/r})$. Поэтому δ — изоморфизм. Идеал $\delta^{-1}(M_x)$ содержит все константы $0 \le c < 1$ для любой точки $x \in X \setminus (0,1)$, то есть в этом случае $\delta(c)(x) = 0$.

Автоморфизм $\delta : C(X,\mathbf{I}) \to C(X,\mathbf{I})$ индуцирует автоморфизм $\alpha : IdC(X,\mathbf{I}) \to IdC(X,\mathbf{I})$ ($\alpha : ConC(X,\mathbf{I}) \to ConC(Y,\mathbf{I})$) решетки идеалов (конгруэнций) решетки $C(X,\mathbf{I})$. Легко видеть, что гомеоморфизм φ, полученный выше по изоморфизму α, не порождает как исходный изоморфизм решеток δ, так и полученный изоморфизм решеток идеалов (конгруэнций) α. □

Замечание 4. Для полуколец $C(X,\mathbf{I})$ теоремы 1 и 2 и следствие 4 также справедливы [15] и доказываются аналогичным образом. □

5. Решетки $C(X,\mathbf{I})$ с топологией поточечной сходимости

Для изучения свойств решеток (полуколец) $C(X,\mathbf{I})$ в случае тихоновских пространствах X целесообразно ввести топологию на них.

Множество $C(X,\mathbf{I})$ будем рассматривать как подпространство декартового произведения $\mathbf{I}^X$ с топологией поточечной сходимости. Относительно этой топологии поточечные операции $\vee$ и $\wedge$ (и умножения функций) непрерывны на $C(X,\mathbf{I})$. Следовательно, получаем топологические решетку (топологическое полукольцо) $C_p(X,\mathbf{I})$. Для каждой точки $x \in X$ проектирование $\pi_x(f) = f(x), f \in C(X,\mathbf{I})$, является непрерывным эпиморфизмом $C_p(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$.

Идеал $J \subseteq C_p(X,\mathbf{I})$ называется *замкнутым идеалом*, если J есть замкнутое множество в $C_p(X,\mathbf{I})$. Опишем далее замкнутые идеалы в топологической решетке $C_p(X,\mathbf{I})$. Приведенные ниже рассуждения легко переносятся на случай топологического полукольца $C_p(X,\mathbf{I})$. Другой способ доказательства утверждений для топологического полукольца $C_p(X,S)$, где S — произвольное простое топологическое полукольцо, реализован в [16].

Лемма 10. *Идеалы решетки* $\mathbf{I}$ *имеют вид* $[0,r]$ *и* $[0,r)$ *для произвольных значений* $r \in \mathbf{I}$. *При этом простыми идеалами будут все собственные идеалы, а замкнутыми — всевозможные отрезки* $[0,r]$.

Отметим, что в решетке $C_p(X,\mathbf{I})$ все идеалы *выпуклые*, то есть с каждым своим элементом содержат элементы, меньшие его. При этом все главные идеалы в ней замкнутые.

Замечание 5. Отметим, что в полукольцах $C(X,\mathbf{I})$ не все идеалы выпуклы. В топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$ замкнутые идеалы выпуклые. Действительно, пусть идеал J в полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$ замкнутый и $g \le f$, $f \in J$, $g \in C(X,\mathbf{I})$. Возьмем произвольную базовую окрестность U элемента g в пространстве $C_p(X,\mathbf{I})$: $U = U(x_1,...,x_n;U_1,...,U_n) = \{h \in C_p(X,\mathbf{I}) : h(x_i) \in U_i\}$, где $x_i \in X$ и U_i – окрестности чисел $g(x_i)$ при $i = 1,...,n$. Отметим, что для любой точки x_i множество $\pi_x(J)$, как образ идеала, является идеалом в $\mathbf{I}$, то есть выпукло. Поскольку $g \le f$, то для любой окрестности U_i числа $g(x_i)$ существует функция $h_i \in J$, для которой $h_i(x_i) \in U_i$. Рассмотрим функцию $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \cdot e_i \in J$, где e_i — функции из леммы 1, соответствующие точкам $(x_i, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k)$. Так как $h(x_i) = h_i(x_i) \cdot e_i(x_i) \vee \sum\limits_{j \ne i} h_j(x_i) \cdot e_j(x_i) = h_i(x_i)$, то $h(x_i) \in U_i$ для любого $i = 1,...,n$. То есть в любой окрестности функции g нашлась функция из замкнутого идеала J. Следовательно, $g \in J$ и идеал J выпуклый. □

Лемма 11. *Пусть* X *— тихоновское пространство. Тогда для любых замкнутого идеала* J *решетки* $C_p(X,\mathbf{I})$ *и точки* $x \in X$ *имеем* $\pi_x(J) = \overline{\pi_x(J)}$.

Доказательство По лемме 10 $\pi_x(J) = \{0\}$, или $\pi_x(J) = [0,r]$, или $\pi_x(J) = [0,r)$ для некоторого ненулевого числа $r \in \mathbf{I}$.

Пусть $\pi_x(J) = [0,r)$, тогда для любого индекса $n \in \mathbb{N}$ найдется функция $g_n \in J$, для которой $g_n(x) = \frac{rn}{n+1} = r_n \to r$. Обозначим окрестности $V_0 = X$ и $U_n = \{x \in X : g_{n+1}(x) > r_n\} \cap V_{n-1}$ точки x. Возьмем функции $h_n = (f_n \wedge r_n) \le g_{n+1}, r_n$ для функций f_i и окрестностей V_i из леммы 2, соответствующие окрестностям U_i точки x. Из выпуклости идеала J получаем $h_n \in J$. При таком построении

$$h_n = \begin{cases} r_n, \text{ если } x \in \overline{V_n}; \\ 0, \text{ если } x \in X \setminus U_n; \\ f_n \wedge r_n, \text{ если } x \in U_n \setminus \overline{V_n} \end{cases}$$

и $V_{n-1} \supseteq U_n \supseteq V_n$. Тогда $Z(h_n) = (X \setminus U_n) \cup Z(f_n)$, где $X \setminus U_n \subseteq Z(f_n) \subseteq X \setminus V_n \subseteq X \setminus U_{n+1} \subseteq Z(f_{n+1})$. При этом $Z(h_n) \subseteq Z(h_{n+1})$ и $h_i = 0$ для

$i \geq n+1$ на $Z(h_{n+1})$. Отметим, что $Z(h_{n+1})^0 \supseteq Z(f_{n+1})^0 \supseteq (X \setminus \overline{V_n})^0 = X \setminus \overline{V_n} \supseteq Z(h_n)$, то есть $Z(h_{i+1})^0 \supseteq Z(h_i)$.

Покажем, что функция $h(x) = \sup h_n(x)$ в $\mathbf{I}^X$ непрерывна. Для любой точки $y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ найдется окрестность U_j точки x, что $y \notin U_j$. Значит, $y \in Z(h_j)$. Среди индексов j выберем минимальный $i = \min j$. Тогда $h = h_1 \vee h_2 \vee ... \vee h_i$ на окрестности $Z(h_{i+1})^0 \supseteq Z(h_i)$ точки y. Пусть далее $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Тогда $h(y) = r$ для любой окрестности W числа r найдется число $r_j \in W$, и для любых индексов $i \geq j$ получаем $r_j \leq h(V_i) \subseteq W$. То есть функция h непрерывна в точке y.

Возьмем произвольную окрестность U элемента h в пространстве $C_p(X, \mathbf{I})$: $U = U(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) = \{g \in C_p(X, \mathbf{I}) : g(x_i) \in U_i\}$. Поскольку $h = \sup h_n$, то для любой окрестности U_i числа $h(x_i)$ существует функция $g_i \in J$, для которой $g_i(x_i) \in U_i$. Рассмотрим функцию $g = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \wedge e_i \in J$, где e_i — функции из леммы 1, соответствующие точкам $(x_i, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k)$. Получаем, что $g(x_i) \in U_i$ для любого $i = 1, ..., n$. То есть в любой окрестности функции h нашлась функция из замкнутого идеала J. Следовательно, $h \in J$. $\square$

Для любого непустого подмножества J решетки $C(X, \mathbf{I})$ введем обозначение $r_J = supJ$ в $\mathbf{I}^X$, и назовем функции такого вида *sc-функциями.*

Предложение 5. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые идеалы в решетке $C_p(X, \mathbf{I})$ совпадают с идеалами $J(\varphi) = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f \leq \varphi\}$ по произвольным функциям $\varphi \in \mathbf{I}^X$.*

Доказательство По лемме 11 для любых замкнутого идеала J решетки $C_p(X, \mathbf{I})$ и точки $x \in X$ имеем $\pi_x(J) = [0, r_x], r_x \in \mathbf{I}$. Зададим отображение $\varphi : X \to \mathbf{I}$ по правилу $\varphi(x) = r_x$. По лемме 11 $J \subseteq J(\varphi)$.

Обратно, пусть $f \in J(\varphi)$. Возьмем произвольную окрестность U элемента f в пространстве $C_p(X, \mathbf{I})$: $U = U(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) = \{g \in C_p(X, \mathbf{I}) : g(x_i) \in U_i\}$. Для любой окрестности U_i числа $f(x_i) \in \pi_{x_i}(J)$ существует функция $g_i \in J$, для которой $g_i(x_i) \in U_i$. Рассмотрим функцию $g = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \wedge e_i \in J$, где e_i — функции из леммы 1, соответствующие точкам $(x_i, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k)$. Получаем, что $g(x_i) \in U_i$ для любого $i = 1, ..., n$. То есть в любой окрестности функции f нашлась функция из замкнутого идеала J. Следовательно, $f \in J$. $\square$

Отметим, что данный факт можно было доказать по-другому, показав, что для тихоновского пространства X замкнутость идеала J решетки $C_p(X, \mathbf{I})$ равносильна условию $J = \bigcap\limits_{x\in X} \pi_x^{-1}(\overline{\pi_x(J)})$. [16]

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 6. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда для произвольного идеала J решетки $C_p(X,\mathbf{I})$, любых функций $\varphi,\psi\in\mathbf{I}^X$ и $f,g\in C(X,\mathbf{I})$ выполняются следующие свойства:* 1) $r_{J(\varphi)}\leq\varphi$, $J(r_J)=\overline{J}$, $r_{\overline{J}}=r_J$, 2) $r_J\leq r_I\Leftrightarrow J\subseteq I$; *если* $\overline{J}\subseteq\overline{I}$, *то* $r_J<r_I$; 3) *если* $\varphi\leq\psi$, *то* $J(\varphi)\subseteq J(\psi)$; $r_{J(\varphi)}=r_{J(\psi)}\Leftrightarrow J(\varphi)=J(\psi)$; 4) $J(f)\vee J(g)=J(f\vee g)$.

Из предложений 5 и 6 получаем:

Теорема 3. *Отображения $r_{(\cdot)}$ и $J(\cdot)$ устанавливают изоморфизм между решеткой $\overline{Id}C_p(X,\mathbf{I})$ всех замкнутых идеалов J решетки $C(X,\mathbf{I})$ и решеткой всех sc-функций φ из $\mathbf{I}^X$: $r_{J(\varphi)}$ и $J(r_J)=J$.*

Из предложения 5 и леммы 10 получаем

Следствие 5. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые простые идеалы в топологической решетке $C_p(X,\mathbf{I})$ суть в точности $\pi_x^{-1}([0,r])$, при $r\in[0,1), x\in X$. В частности, минимальные замкнутые простые идеалы суть M_x.*

Поскольку в коммутативном полукольце полупростые идеалы совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих, то имеет место

Следствие 6. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые полупростые идеалы в топологической решетке $C_p(X,\mathbf{I})$ суть в точности $\bigcap_{x\in A}\pi_x^{-1}([0,r])$, для $A\subseteq X, r\in[0,1)$. В частности, минимальные замкнутые полупростые идеалы суть M_A.*

Следствие 7 [4]. *Произвольные тихоновские пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда топологические решетки $C_p(X,\mathbf{I})$ и $C_p(Y,\mathbf{I})$ изоморфны.*

Доказательство Для произвольного решеточного изоморфизма $\alpha: C_p(X,\mathbf{I})\to C_p(Y,\mathbf{I})$ зададим отображение $\varphi:X\to Y$ по правилу $\varphi(x)=y$, если $\alpha(M_x)=M_y$. По следствию 5 отображение φ биективно. При этом φ сохраняет нуль-множества, то есть базу топологии. Значит, φ гомеоморфизм. $\square$

Поскольку функции вида $\varphi_x=\begin{cases}0, \text{ если } x=x_0\in X;\\ 1, \text{ если } x\in X\setminus\{x_0\}\end{cases}$. является sc-функцией, то из теоремы 3 вытекает

Следствие 8. *Произвольные тихоновские пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда решетки $\overline{Id}C_p(X,\mathbf{I})$ и $\overline{Id}C_p(Y,\mathbf{I})$ изоморфны.*

Для тихоновского пространства X и точки $y\in\beta X$ обозначим $O^y=\{f\in :y\in(\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X})^0\}$.

Предложение 7. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда* *любой простой идеал P решетки $C(X,\mathbf{I})$ содержит идеал O^y для однозначно определенной точки $y \in \beta X$.*

Доказательство. Докадем сначала для компакта X. Пусть предложение не выполняется. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется такая $f \in O_x \setminus P$, что $f(x) = 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Для открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X существует конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_k$, для которого $0 = f_1 \wedge \ldots \wedge f_k \in S \setminus P$, противоречие. Значит, P содержит O_x для некоторой точки $x \in X$. Единственность этой точки вытекает из леммы 3. Для произвольного тихоновского пространства X и любого простого идеала P в $C(X,\mathbf{I})$ простым будет идеал P^β лежит в $C(\beta X,\mathbf{I}) \cong C(X,\mathbf{I})$. Известно, что $\mathrm{Z}^0(f^\beta) = (\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X})^0$ для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$. Тогда искомое предложение выполняется в силу доказанного. $\square$

Предложение 8. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда:*

1) Для любой точки $x \in X$ имеем $\overline{O_x} = M_x$;

2) Для любой точки $p \in \beta X \setminus X$ имеем $\overline{O^p} = C(X,\mathbf{I})$.

Доказательство. 1). Легко видеть, что $M_x \supseteq O_x$ и множество M_x замкнуто в $C_p(X,\mathbf{I})$. Покажем, что любая окрестность W произвольной функции $m \in M_x$ содержит некоторую функцию $h \in O_x$. Пусть окрестность W функции m определяется точками $x_1, x_2, ..., x_n$ из X. Для окрестности $U = X \setminus (\{x_1, x_2, ..., x_n\} \setminus \{x\})$ точки x возьмем функцию g из леммы 2. Получили функцию $h = mg \in O_x \cap W$. Значит, $\overline{O_x} = M_x$.

2). Будем рассуждать аналогично. Имеем $C(X,\mathbf{I}) \supseteq O^p$ и множество $C(X,\mathbf{I})$ замкнуто в $C_p(X,\mathbf{I})$. Покажем, что любая окрестность W произвольной функции $s \in C(X,\mathbf{I})$ содержит некоторую функцию $h \in O^p$. Пусть окрестность W функции s определяется точками $x_1, x_2, ..., x_n$ из X. Для окрестности $U = \beta X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ точки p возьмем из леммы 2 в $C(\beta X,\mathbf{I})$ функцию $g = g_1^\beta$. При этом $g_1 \in O^p$, $g(\beta X \setminus U) = g_1(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \{1\}$. Получили функцию $h = sg_1 \in O^p \cap W$. Значит, $\overline{O^p} = C(X,\mathbf{I})$. $\square$

6. Приложения

В этом пункте мы дадим ряд решеточных характеризаций свойств топологических пространств.

Напомним, что топологическое пространство X называется *экстремально несвязным* (*базисно несвязным*), если все его канонически замкнутые множества (замыкания всех конуль-множеств в X) открыты, то есть открыто-замкнутые. *F-пространство* может быть определено как топологическое пространство X, в котором любые два непересекающиеся конуль-множества функционально отделимы [7, pt 14].

Из известных характеризаций экстремально несвязных и базисно несвязных тихоновских пространств X в терминах условий полноты решетки $C(X)$, [7, example 3N.6] и [7, example 3N.5], получаем следующие предложения:

Предложение 9. *Произвольеное тихоновское пространство X экстремально несвязно тогда и только тогда, когда решетка $C(X, \mathbf{I})$ полна.*

Предложение 10. *Базисная несвязность тихоновского пространства X равносильна счетной полноте решетки $C(X, \mathbf{I})$.*

Дистрибутивная решетка L называется *нормальной*, если для любых элементов $a, b \in L$ с условием $ab = 0$ существуют такие элементы $c, d \in L$, что $cd = 0$ и $a + c = b + d = 1$. Решетка L, обладающая двойственным свойством, называется *конормальной.*

Предложение 11. *Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие утверждения:* 1) *X есть F-пространство;* 2) *решетка $C(X, \mathbf{I})$ нормальна;* 3) *решетка $C(X, \mathbf{I})$ конормальна;* 4) *все главные идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$ замкнуты в $C_p(X, \mathbf{I})$.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1)–3) доказана в [11]. Легко видеть, что топологическое пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда $f \leq g$ влечет $f \in gC(X, \mathbf{I})$ для любых функций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ для всех $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ [12]. Значит, 4) $\Rightarrow$ 1). Если X — F-пространство, то любой идеал в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ выпуклый. Но для главного идеала топологического полукольце $C_p(X, \mathbf{I})$ его выпоклость очевидно равносильна замкнутости. $\square$

Предложение 12. *Для всякого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:* 1) *X — дискретное пространство;* 2) *все sc-функции на X непрерывеные;* 3) *все замкнутые идеалы топологической решетки $C_p(X, \mathbf{I})$ являются главными идеалами;* 4) *все замкнутые идеалы топологического полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ главные.*

Доказательство. Очевидно, что 1) $\Rightarrow$ 2) и 1) $\Rightarrow$ 4). В силу теоремы 3 имеем 2) $\Rightarrow$ 3). Если замкнутые идеалы $M_x, x \in X$, — главные, то функции вида $\varphi_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x \in X; \\ 1, & \text{если } y \in X \setminus \{x\} \end{cases}$ непрерывны. Значит, 3) $\Rightarrow$ 1) и 4) $\Rightarrow$ 1). $\square$

Литература

1. **Kaplanskiy I.** Lattices of continuous functions // *Bull. Amer. Math. Soc. — 1947. — V. 53., № 6. — pp. 617–623.*

2. **Kaplanskiy I.** Lattices of continuous functions. II // *Amer. J. Math. — 1948. — V. 70., № 3. — pp. 626–634.*

3. **Shirota Taira.** A generalization of a theorem of I. Kaplansky // *Osaka Math. J. — 1952. — V. 5, № 2. — pp. 121–132*

4. **Nagata Jun-iti.** On lettice of tunctions on topological spaces and of tunctions on uniform spaces // *Osaka Math. J. — 1949. — V. 1, № 2. — pp. 166–181.*

5. **Пашенков В. В.** О структуре непрерывных функций на вполне регулярных пространствах // *Матем. заметки. — 1976. — Т. 19, № 6. — С. 683–689.*

6. **Вечтомов Е. М.** Решетки непрерывных функций // *М.: ВИНИТИ, — 1977. — № 3352–77 Деп. — 29 с.*

7. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. — *N. Y.: Springer-Verlag, 1976. — 300 p.*

8. **Гретцер Г.** Общая теория решеток – *М.: Мир, 1982. — 456 с.*

9. **Сикорский Р.** Булевы алгебры. – *М.: Мир, 1969. — 376 с.*

10. **Энгелькинг Р.** Общая топология. – *М.: Мир, 1986. — 752 с.*

11. **Вечтомов Е. М.** Дистрибутивные решетки, функционально представимые цепями // *Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 1. — С. 93–102.*

12. **Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 493–510.*

13. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** О простых идеалах полуколец непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // *Вестник Удм. ун-та — 2011. — Вып. 2. — С. 12–18.*

14. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Псевдодополнения в решетке конгруэнций полуколец непрерывных функций // *Вестник Сыктывкарского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — № 9. — С. 3–17.*

15. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** Определяемость компактов решетками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $0, 1$-значных функций // *Известия вузов. Математика. — 2012. — № 1 (в печати).*

16. **Смирнова (Подлевских) М. Н.** Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций с топологией поточечной сходимости // *Вестник Вятского государственного педагогического университета. Митематика, информатика, физика. — 1996. — Вып. 1. — С. 16–18.*

Summary

Vechtomov E. M., Lubiagina E. N. Lattices continuous function with values in unit segment

In this paper we prove that the lattice of ideals (lattice of congruences) in lattice $C(X, [0, 1])$ determines any compactum X. We study the lattice of all continuous $[0, 1]$-value functions on topological spaces X. We proved that any compactum X determined by the the lattice of ideals (the lattice of congruences) of a lattice $C(X, \mathbf{I})$. We described the closed ideals of topological lattices $C_p(X, \mathbf{I})$ with the topology of pointwise convergence. we have that a Tikhonov space X defined by the lattice $C_p(X, \mathbf{I})$ as a consequence.

Keywords: lattice, function, ideal, filter, topological lattice, semiring, congruence, Tikhonov space.

ВятГГУ *Поступила 01.10.2011*