Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.13.2011

УДК 621.391.1:519.27

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ

Н. О. Котелина

Даётся обзор методов оценивания контактных чисел, основанных на линейном программировании. Проведены расчёты в Matlab. Приводится таблица наилучших известных до сих пор границ для оценки контактных чисел сверху.
Ключевые слова: верхняя граница, контактное число, Дельсарт, линейное программирование

1. Обозначения и предварительные сведения

В $\mathbb{R}^n$ используем скалярное произведение $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ векторов x и y, а также норму $|x| = \sqrt{xx}$. Рассмотрим шар $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leqslant r\}$ радиуса $r > 0$. Будем искать шары $B(x_i, r)$, $i \in 1 : m$, касающиеся шара $B(x_0, r)$, но при этом $B(x_i, r)$ и $B(x_j, r)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$ не имеют общих внутренних точек. Эти условия можно записать так:

$$|x_i - x_0| = 2r, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{0.1}$$
$$|x_i - x_j| \geqslant 2r, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{0.2}$$

Через M_n обозначим максимальное количество шаров, которые можно приклеить к данному шару так, чтобы выполнялись условия (0.1) и (0.2). Число M_n зависит только от n и называется *контактным числом.* Используется также английский термин “kissing number”. Известны контактные числа $M_2 = 6$, $M_3 = 12$, $M_4 = 24$. О них имеется обширная литература (см. ссылки в [3], [2], [3]). Число $M_3 = 12$ правильно указано Ньютоном в 1694 г., из многочисленных доказательств отметим работу [4]. Равенство $M_4 = 24$ очень сложным образом доказал О. Мусин [3]. Также известно, что $M_{24} = 196560$ [3].

Сферическим кодом называется любое конечное множество C на сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$. Рассмотрим случай, когда угол между векторами кода не меньше 60°, т. е. выполнено неравенство

$$xy \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \forall\, x,\, y \in C, \quad x \neq y. \tag{0.3}$$

Такой код C будем называть $\frac{1}{2}$ - кодом. Условие (0.3) равносильно неравенству

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2xy + |y|^2 = 2(1-xy) \geqslant 2(1-\tfrac{1}{2}) = 1,$$

т. е. расстояние между точками кода не меньше 1.

Через A_n обозначим максимальное количество векторов $\frac{1}{2}$ - кода. Справедливо равенство

$$A_n = M_n. \tag{0.4}$$

Действительно, возьмем $\frac{1}{2}$ - код $C = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset S^{n-1}$, $m = A_n$, основной шар $B(\mathbb{O}, \frac{1}{2})$ и приклеим к нему шары $B(x_i, \frac{1}{2})$, $\quad i \in 1 : m$. Условия (0.1) и (0.2) выполнены при $x_0 = \mathbb{O}$ и $r = \frac{1}{2}$, поэтому $A_n \leqslant M_n$. Обратное неравенство столь же очевидно.

Многочисленные примеры $\frac{1}{2}$ - кодов можно получить, рассматривая минимальные векторы решеток (см. об этом в [5]), а оценку сверху для $A_n = M_n$ дает теорема Дельсарта [6].

2. Оценка Дельсарта для мощности $\frac{1}{2}$ - кода

В начале 1970-х годов Ф. Дельсарт предложил замечательный метод оценки A_n сверху, использующий полиномы Гегенбауэра $\big\{G_k^{(n)}(t)\big\}_{k=0}^{\infty}$. Эти полиномы обладают свойствами:

1. $G_k^{(n)}(t)$ — алгебраический полином степени k;
2. полиномы $\big\{G_k^{(n)}(t)\big\}_{k=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему на $[-1,1]$ с весом $w_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$;
3. выполнено условие нормировки $G_k^{(n)}(1) = 1$;
4. для любых $x_1, \ldots, x_m \in S^{n-1}$ матрица $\big\{G_k^{(n)}(x_i x_j)\big\}_{i,j=1}^{m}$ неотрицательно определена, в частности

$$\sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i x_j) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{0.5}$$

ТЕОРЕМА 1. *(Дельсарт). Пусть $f(t)$ — полином степени d, удовлетворяющий условиям:*

1. $f(t) \leqslant 0$ при $t \in \big[-1, \frac{1}{2}\big]$;

2. коэффициенты разложения $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра

$$f(t) = \sum_{k=0}^{d} f_k^{(n)} G_k^{(n)}(t)$$

неотрицательны: $f_k^{(n)} \geqslant 0, \quad k \in 0 : d$, *и* $f_0^{(n)} > 0$. *Тогда* A_n *ограничивается неравенством*

$$A_n \leqslant f(1)/f_0^{(n)} \tag{0.6}$$

3. Сеточная задача линейного программирования

Для данного n, используя оценку Дельсарта (0.6), оценим M_n. Выберем d и равномерную сетку на $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Положим

$$t_i = -1 + 1.5 \cdot \frac{i}{m}, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Задача оценивания M_n сводится к нахождению полинома $f(t)$ степени d, имеющего вид

$$f(t) = f_0 + \sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t),$$

где $f_k \geqslant 0$ при $k \in 0 : d$ и $f_0 > 0$, минимизирующего $f(1)$, при этом f_0 будем фиксировать, взяв равным 1. Запишем соответствующую задачу линейного программирования. Тогда

$$\begin{aligned} &L(f_0, \ldots, f_d) = f(1) = f_0 + \cdots + f_d \to \min, \\ &f(t_i) = \sum_{k=0}^{d} f_k G_k^{(n)}(t_i) \leqslant 0, \quad i \in 0 : m, \\ &f_0 = 1, \\ &f_k \geqslant 0, \quad k \in 1 : d. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Если $(f_0^*, \ldots, f_d^*)$ — оптимальное решение (0.7), то $f^*(t) = \sum_{k=0}^{d} f_k^* G_k^{(n)}(t)$ — оптимальный полином, для которого, из-за возникающей при решении задачи (0.7) погрешности, на отрезке $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ может нарушаться условие неположительности, требуемое теоремой (0.6). Для того, чтобы это исправить, введем

$$\varepsilon = \max\left\{f^*(t),\ t \in \left[-1,\ \tfrac{1}{2}\right]\right\}.$$

Если $\varepsilon > 0$, то рассмотрим полином

$$\widetilde{f}(t) = f^*(t) - \varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{f}(t) \leqslant 0$ на $\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$. Коэффициенты $\widetilde{f}$ и f^* связаны соотношениями

$$\widetilde{f}_k = f_k^*, \quad k = 1 : d, \quad \widetilde{f}_0 = f_0^* - \varepsilon.$$

По оценке Дельсарта (0.6)

$$M_n \leqslant \frac{\widetilde{f}(1)}{\widetilde{f}_0} = \frac{f^*(1) - \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

4. Решение задачи линейного программирования в среде Matlab

Будем решать задачу (0.7) в среде Matlab 7.4.0 (R2007a). Как показано в докладе [7], задачи линейного программирования в среде Matlab решаются с помощью функции `linprog`.

Функция `linprog` решает задачу линейного программирования в форме

$$\begin{aligned} &f^T \cdot x \to \min, \\ &A \cdot x \leqslant b,\ Aeq \cdot x = beq,\ lb \leqslant x \leqslant ub. \end{aligned} \tag{0.8}$$

На выходе `linprog` даёт оптимальный план x задачи (0.8) и экстремальное значение целевой функции `fval`. В задаче (0.7) зададим входные данные для программы. Введем индексные множества $D = 1 : d+1$, $M = 1 : m+1$ и зададим вектор-строку коэффициентов целевой функции $f^T[D]$, матрицу ограничений-неравенств $A[M, D]$, вектор-столбец правых частей ограничений-неравенств $b[M]$, матрицу ограничений-равенств $Aeq[1, D]$, вектор-столбец ограничений-равенств $beq[D]$, вектор-столбец ограничений снизу $lb[D]$:

$$\begin{aligned} &f^T[D] = (1 \ldots 1); \\ &A[i,k] = G_k^{(n)}(t_i), \qquad i \in M, \quad k \in D; \\ &b[M] = (0 \ldots 0)^T; \\ &Aeq[1,0] = 1; \quad Aeq[1,k] = 0, \qquad k \in 2 : d+1; \\ &beq[D] = (1, 0, \ldots, 0)^T; \\ &lb[D] = (0, \ldots, 0)^T. \end{aligned}$$

Далее зададим название используемого для решения задачи метода, например, simplex, и максимальное количество итераций:

$\texttt{options} = \texttt{optimset}('\texttt{LargeScale}', '\texttt{off}', '\texttt{Simplex}', '\texttt{on}', '\texttt{MaxIter}', 100);$

Применим функцию `linprog` таким образом:

$[\texttt{x}, \texttt{fval}, \texttt{exitflag}, \texttt{output}] = \texttt{linprog}(\texttt{f}, \texttt{A}, \texttt{b}, \texttt{Aeq}, \texttt{beq}, \texttt{lb}, [\,], [\,], \texttt{options});$

5. Верхние границы для контактных чисел

Далее приведем верхние границы линейного программирования для M_n, полученные с помощью программы в среде MATLAB. В эту же таблицу для сравнения поместим верхние границы для M_n, полученные в книге Дж. Конвея, Н. Слоэна [1, с. 42].

Верхние границы для M_n

n	d	m	$f^*(1)$	ε	$\frac{f^*(1)-\varepsilon}{1-\varepsilon}$	$\lfloor\frac{f^*(1)-\varepsilon}{1-\varepsilon}\rfloor$	Граница из [3]
2	4	50	6.00	2.97e-04	6.00	6	6
3	10	100	13.16	2.26e-05	13.16	13	12
4	9	100	25.56	5.90e-04	25.57	25	25[1]
5	10	100	46.33	5.35e-04	46.36	46	46
6	10	100	82.62	5.89e-04	82.67	82	82
7	10	100	140.15	2.88e-04	140.19	140	140
8	6	100	239.88	7.35e-04	240.06	240	240
9	11	100	380.04	2.17e-03	380.87	380	380
10	11	400	595.82	1.47e-04	595.91	595	595
11	11	200	915.31	1.65e-04	915.46	915	915
12	11	200	1416.07	6.29e-04	1416.96	1416	1416
13	12	300	2233.41	2.24e-04	2233.91	2233	2233
14	12	400	3492.10	9.72e-05	3492.44	3492	3492
15	12	400	5430.68	1.73e-04	5431.62	5431	5431
16	13	490	8313.59	6.73e-05	8314.14	8314	8313
17	13	400	12218.16	1.43e-04	12219.91	12219	12215
18	13	450	17876.67	1.12e-04	17878.68	17878	17877
19	13	450	25899.87	1.64e-04	25904.12	25904	25901
20	13	490	37972.01	2.29e-04	37980.69	37980	37974

[1] О. Мусин доказал, что $M_4 = 24$ [3].

21	13	470	56851.15	2.45e-004	56865.07	56865	56852
22	14	490	86531.38	2.58e-04	86553.69	86553	86537
23	14	490	128086.15	3.70e-04	128133.57	128133	128096
24	10	420	196563.94	-1.72e-05	196563.94	196563	196560

6. Еще одна задача линейного программирования для оценки контактных чисел

В [1] был предложен еще один вариант задачи линейного программирования для оценки сверху контактных чисел M_n. С его помощью данной задачи в [1] показано, что $M_9 \leqslant 379$.

Для данного n зафиксируем d. Тогда задача линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
&S(f) = \sum_{k=1}^{d} f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} \to \min, \\
&\sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t) - f_{d+1} - 2f_{d+2} \leqslant -1, \ t \in \left[-1, \tfrac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3}\right], \\
&\sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t) - f_{d+1} - f_{d+2} \leqslant -1, \ t \in \left(\tfrac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
&\sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t) - f_{d+2} \leqslant -1, \ t \in \left[-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
&\sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t) \leqslant -1, \ t \in \left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{2}\right], \\
&f_k \geqslant 0, \quad k \in 1 : d+2.
\end{aligned} \tag{0.9}$$

Рассмотрим полином

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k G_k^{(n)}(t). \tag{0.10}$$

Справедлива следующая теорема [1] (её доказательство приводится в статье А. Б. Певного и М. Н. Истоминой в этом выпуске “Вестника”).

ТЕОРЕМА. *Если полином* (0.10) *удовлетворяет ограничениям*

$$\begin{aligned}
&f(t) \leqslant f_{d+1} + 2f_{d+2},\ t \in \left[-1, \tfrac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3}\right],\\
&f(t) \leqslant f_{d+1} + f_{d+2},\ t \in \left(\tfrac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\\
&f(t) \leqslant f_{d+2},\ t \in \left[-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right),\\
&f(t) \leqslant 0,\ t \in \left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{2}\right],\\
&f_k \geqslant 0, \quad k \in 1 : d+2,
\end{aligned}$$

то контактное число M_n *удовлетворяет неравенству*

$$M_n \leqslant f(1) + f_{d+1} + 2f_{d+2}. \qquad (0.11)$$

При $n = 9$, $d = 11$ задача (0.9) была решена нами в Matlab и были получены следующие результаты: $f = [7.42462352, 26.30767740, 58.52329993, 89.07308012, 93.98656791, 65.61602353, 22.96950787, 0, 0, 7.78466193\ 6.43507227, 0.32044787, 0.20518516]$,

$$b_{min} = 1 + S^* = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} = 379.8513.$$

С учётом погрешности $\varepsilon \approx 2.54e-4$ окончательный результат выглядит так

$$M_9 \leqslant \frac{b_{min} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 379.9476.$$

7. Верхние границы для контактных чисел, полученные с помощью полуопределённого программирования

C. Bachoc и F. Vallentin [10] разработали метод для нахождения верхних границ для контактных чисел, основанный на полуопределённом программировании. Приведём таблицу верхних границ, полученных с помощью полуопределённого программирования (ПП) в статье [9]. Для сравнения приведём также лучшие верхние границы для контактных чисел.

Верхние границы для M_n, полученные с помощью ПП

n	лучшая верхняя граница, известная ранее	ПП граница
3	12 (Schütte, v. d. Waerden, 1953 [11])	s_{14}[2]$=12.38\ldots$
4	24 Musin, 2008 [3]	$s_{14} = 24.06\ldots$
5	45 Bachoc, Vallentin, 2008 [10]	$s_{14} = 44.99\ldots$
6	78 Bachoc, Vallentin, 2008 [10]	$s_{14} = 78.24\ldots$
7	135 Bachoc, Vallentin, 2008 [10]	$s_{14} = 134.44\ldots$
8	240 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{11} = 240.00\ldots$
9	366 Bachoc, Vallentin, 2008 [10]	$s_{14} = 364.09\ldots$
10	567 Bachoc, Vallentin, 2008 [10]	$s_{14} = 554.50\ldots$
11	915 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 870.88\ldots$
12	1416 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 1357.88\ldots$
13	2233 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 2069.58\ldots$
14	3492 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 3183.13\ldots$
15	5431 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 4866.24\ldots$
16	8312 Pfender, 2007 [13]	$s_{14} = 7355.80\ldots$
17	12210 Pfender, 2007 [13]	$s_{14} = 11072.37\ldots$
18	17877 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 16572.26\ldots$
19	25900 Boyvalenkov, 1994 [14]	$s_{14} = 24812.30\ldots$

[2] нижний индекс соответствует значению параметра d

20	37974 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 36764.40\ldots$
21	56871 Boyvalenkov, 1994 [14]	$s_{14} = 54584.76\ldots$
22	86537 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{14} = 82340.08\ldots$
23	128095 Boyvalenkov, 1994 [14]	$s_{14} = 124416.97\ldots$
24	196560 Odlyzko, Sloane, 1979 [12]	$s_{11} = 196560.00\ldots$

Литература

1. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решётки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.

2. **Pfender F., Ziegler G. M.** Kissing numbers, sphere packings and some unexpected proofs // *Notices AMS. September 2004. P. 873-883.*

3. **Musin O. R.** The kissing number in four dimensions Preprint (`http://arXiv.org/abs/math/0309430v3`).

4. **Maehara H.** The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates // *Europ. J. Combinatorics. 2007. V. 28. P. 1770-1778.*

5. **Андреев Н. Н., Юдин В. А.** Арифметический минимум квадратичной формы и сферические коды //*Мат. Просвещение. Сер. 3. 1998. Вып. 2. С. 133–140.*

6. **Delsarte P., Goetals J. M., Seidel J. J.** Spherical codes and designs //*Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363-388.*

7. **Сергеев А. Н., Соловьёва Н. А., Чернэуцану Е. К.** Решение задач линейного программирования в среде MATLAB// *Семинар «DHA & CAGD». Программы на языке MATLAB. 12 февраля 2011 г.* (`http://dha.spb.ru/programs.shtml`).

8. **Всемирнов М. А., Ржевский М. Г.** Верхняя оценка контактного числа в размерности 9// *УМН. 2002. Т. 57 Вып. 5. С. 149–150.*

9. **Mittelman H. D., Vallentin F.** High accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers (`http://arxiv.org/abs/0902.1105`).

10. **Bachoc C., Vallentin F.** New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming (`http://arxiv.org/abs/math/0608426)`).

11. **Schütte K., van der Waerden B. L.** Das Problem der dreizehn Kugeln //*Math. Ann. 1953. 125. S. 325–334.*

12. **Odlyzko A. M., Sloane N. J. A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions //*J. Combin. Theory. Ser. A. 1979. V. 26. P. 210–214.*

13. **Pfender F.** Improved Delsarte bounds for spherical codes in small dimensions //*J. Combin. Theory Ser. A. 2007. V. 114. P. 1133–1147.*

14. **Boyvalenkov P.** Small improvements of the upper bounds of the kissing numbers in dimensions 19, 21 and 23//*Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1994. V. 42. P. 159–163.*

Summary

Kotelina N. O. Methods of estimating kissing numbers

Methods for estimating of kissing numbers based on linear programming, corresponding grid problems of linear programming and results of calculations in Matlab are given. The table of best known upper bounds for kissing numbers is also given.

Keywords: upper bound, kissing number, Delsarte, linear programming, Matlab

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 20.04.11*