

УДК 512.64+534.2+535.3

РАССЕЯНИЕ ВОЛН НЕПРЕРЫВНО СЛОИСТЫМИ УПРУГИМИ СРЕДАМИ¹

Ю. Н. Беляев

Предложен метод вычисления элементов матрицы второго порядка, характеризующей упругие свойства непрерывно слоистой среды. Получено представление коэффициентов отражения и пропускания плоской волны через элементы характеристической матрицы. Найдено общее решение задачи отражения-пропускания волны слоисто непрерывной периодической средой.

Ключевые слова: плоские волны, периодические структуры, слоистые среды, рассеяние волн, интегральные уравнения Вольтерра, характеристическая матрица

1. Введение

Точные аналитические решения уравнений, описывающих распространение различных волн в слоистых средах, известны лишь для небольшого числа функциональных зависимостей скорости распространения волны от неоднородностей среды [1-5]. Поэтому, несмотря на продолжительную историю исследований волновых процессов в упругих слоистых средах, основным теоретическим подходом к расчёту распространения волн в неоднородных слоистых средах остаётся аппроксимация таких объектов наборами однородных слоёв (см. напр. [1,6,7]) или слоями с линейным изменением параметров [8].

Именно приближение слоистой среды наборами однородных слоёв было положено в основу применения метода характеристической матрицы [6,9] к средам, параметры которых изменяются по толщине непрерывным образом по произвольному закону. При этом существование

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК №02.740.11.0618

характеристической матрицы неоднородного слоя фактически постулировалась.

В данной работе развивается метод вычисления характеристической матрицы слоисто непрерывной среды, распространение волны в которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Найденные представления для элементов характеристической матрицы использованы для решения задачи отражения-пропускания плоской волны слоисто непрерывной периодической структурой.

При решении задачи используется декартова система координат $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Смещение произвольной точки сплошной среды характеризуется вектором деформации $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$.

Деформации предполагаются достаточно малыми, так что для любого участка сплошной среды справедлив закон Гука, т.е. каждая компонента тензора напряжений $\hat{P} \equiv (p_{ij})$ всюду пропорциональна компонентам тензора деформации

$$\hat{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (0.1)$$

Для изотропных сред

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (0.2)$$

где множители μ и λ — это упругие постоянные Ламе.

Пренебрегая объёмными силами, будем исследовать волновые процессы в сплошной среде решая линейное уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \hat{P}, \quad (0.3)$$

где ρ — плотность среды.

Каждой функции, описывающей движение, скажем $f \equiv f(\vec{r}, t)$, соответствует фурье-преобразование по времени $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(\vec{r}, \omega)$:

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (0.4)$$

2. Рассеяние плоской волны в слое жидкой среды

2.1. Волновое уравнение. В жидкости (газе) деформации сдвига отсутствуют, т.е. $\mu = 0$. В такой среде матрица тензора напряжений

является диагональной, причём все диагональные элементы равны и пропорциональны объёмному расширению θ (см. соотношения (0.2)):

$$p_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad p_{11} = p_{22} = p_{33} = \lambda\theta = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -p \quad (0.5)$$

где p — гидростатическое давление.

Из формул (0.3) и (0.5) следуют уравнения для фурье-компонент давления и вектора деформации:

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho\omega^2} \text{grad}\tilde{p}, \quad (0.6)$$

$$\tilde{p} = -\lambda \text{div}\vec{u}. \quad (0.7)$$

Вместо этой системы двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных \vec{u} и \tilde{p} очевидным образом можно получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно каждой из этих неизвестных. Так, подстановкой \vec{u} из равенства (0.6) в правую часть формулы (0.7), приходим к уравнению для фурье-компоненты давления

$$\tilde{p} = -\frac{\lambda}{\omega^2} \text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad}\tilde{p} \right). \quad (0.8)$$

Для однородной среды λ и ρ постоянны. В этом случае (0.8) — это уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \tilde{p} + k^2 \tilde{p} = 0, \quad (0.9)$$

решением которого являются плоские волны $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{r})$, с $k = \omega \sqrt{\rho/\lambda}$.

Рассмотрим далее решение уравнения (0.8) для области, упругие свойства которой изменяются в направлении оси z , перпендикулярной ограничивающей эту область двум плоскостям $z = 0$ и $z = d$. Полупространства $z < 0$ и $z > d$ предполагаются однородными. Для постоянных параметров, определяющих упругие свойства в этих полупространствах, используем обозначения:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } z < 0, \\ \rho_d, & \text{если } z > d, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_0, & \text{если } z < 0, \\ \lambda_d, & \text{если } z > d. \end{cases} \quad (0.10)$$

2.2. Плоские волны в слоисто непрерывной среде. Пусть из области $z < 0$ на слой $0 \leq z \leq d$ падает плоская волна \tilde{p}_0 , в результате взаимодействия которой со слоем, в области $z < 0$ формируется отражённая волна \tilde{p}_R , а в области $z > d$ — прошедшая \tilde{p}_T .

Выберем направление декартовой оси координат x таким образом, чтобы направление распространения волны лежало в плоскости xz , так что вектор деформации \vec{u} и давление p являются функциями только координат x и z . Будем искать решение $\tilde{p}(x, z)$ уравнения (0.8) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — только от z :

$$\tilde{p}(x, z) = X(x)\mathcal{P}(z). \quad (0.11)$$

Подставляя выражение (0.11) в уравнение (0.8) и разделяя переменные, получаем два уравнения относительно неизвестных $X(x)$ и $\mathcal{P}(z)$:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + a^2 X = 0; \quad (0.12)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{dz^2} - \frac{d(\ln \rho)}{dz} \frac{d\mathcal{P}}{dz} + (k^2(z) - a^2) \mathcal{P} = 0, \quad k(z) = \frac{\omega}{v(z)}, \quad v(z) = \sqrt{\frac{\lambda(z)}{\rho(z)}} \quad (0.13)$$

Функциональная зависимость волнового поля от координаты x во всех трёх областях $z < 0$, $z \in [0, d]$ и $z > d$ одинакова и даётся решением уравнения (0.12):

$$X = C_1 e^{iax} + C_2 e^{-iax}. \quad (0.14)$$

Здесь C_1 и C_2 — некоторые постоянные, выбор которых, а также значение постоянной разделения a^2 определяются геометрией задачи. Пусть направление падающей на неоднородный слой плоской волны составляет с осью z угол θ_0 (рис. 1). Тогда падающая волна единичной амплитуды имеет вид:

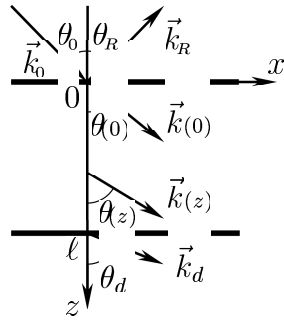


Рис. 1

$$\tilde{p}_0 = \exp [ik_0(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)], \quad k_0 = \omega \sqrt{\rho_0 / \lambda_0}. \quad (0.15)$$

Именно таким было волновое поле вдали от слоя в области $z < 0$ до тех пор, пока не произошло формирование отражённой волны. Сравнивая выражения (0.14) и (0.15), приходим к выводу, что в правой части формулы (16) следует оставить только первое слагаемое ($C_2 = 0$) и принять для постоянной разделения a в уравнениях (0.12) и (0.13) следующее значение:

$$a = k_0 \sin \theta_0. \quad (0.16)$$

Относя постоянную C_1 к неизвестной пока функции $\varphi(z)$, можем переписать решение (0.11) в виде:

$$\tilde{p}(x, z) = \mathcal{P}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0). \quad (0.11')$$

Из равенства (0.16) следует, что отражённая волна распространяется под углом $\theta_R = \theta_0$ (так что $k_{Rx} = k_0 \sin \theta_0$) и имеет вид

$$\tilde{p}_R = R \exp [ik_0(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)], \quad (0.17)$$

где R — амплитуда отражённой волны.

Аналогично, волна, прошедшая через слой, выражается формулой

$$\tilde{p}_T = T \exp [ik_d(x \sin \theta_d + z \cos \theta_d)], \quad (0.18)$$

где T — амплитуда прошедшей волны, $k_d = \omega \sqrt{\rho_d/\lambda_d}$; и (см. рис. 1)

$$k_d \sin \theta_d = k_0 \sin \theta_0 = k(z) \sin \theta(z). \quad (0.19)$$

Из уравнений (0.6) и (0.7) следует, что зависимость компонент вектора деформации от координаты x такая же, как и у давления

$$\tilde{u}_x(x, z) = \mathcal{X}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0), \quad (0.20)$$

$$\tilde{u}_z(x, z) = \mathcal{Z}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0), \quad (0.21)$$

причём $\mathcal{X}(z) = ia\mathcal{P}(z)/(\rho\omega^2)$, а амплитудные функции $\mathcal{P}(z)$ и $\mathcal{Z}(z)$ связаны друг с другом уравнениями:

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & \rho\omega^2 \\ -\frac{k^2 - a^2}{\rho\omega^2} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Z} \end{Bmatrix} \equiv W \begin{Bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Z} \end{Bmatrix}. \quad (0.22)$$

Исключение из этой системы дифференциальных уравнений первого порядка функции \mathcal{Z} , даёт дифференциальное уравнение второго порядка (0.13) относительно функции \mathcal{P} . И наоборот, исключая \mathcal{P} , получаем уравнение относительно \mathcal{Z} :

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{k^2 - a^2}{\rho\omega^2} \right) \frac{d\mathcal{Z}}{dz} + (k^2(z) - a^2) \mathcal{Z} = 0. \quad (0.23)$$

Решение матричного уравнения (0.22) можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{P}(0) \\ \mathcal{Z}(0) \end{Bmatrix} = M \begin{Bmatrix} \mathcal{P}(z) \\ \mathcal{Z}(z) \end{Bmatrix}, \quad (0.24)$$

где матрица M , связывающая нормальную компоненту вектора деформации и давление на плоскости $z = 0$ с этими компонентами волнового поля на произвольной плоскости $z = const$, называется характеристической матрицей слоя. Такого сорта матрицы, связывающие компоненты поля на границах слоистой среды, называют (см. [9]) также матрицами переноса.

2.3. Характеристическая матрица. В случае однородного слоя решением уравнения (0.22) является

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(z) \\ \mathcal{Z}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} W^n z^n \begin{pmatrix} \mathcal{P}(0) \\ \mathcal{Z}(0) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{P}(0) \\ \mathcal{Z}(0) \end{pmatrix},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \cos(kz \cos \theta) & -\frac{\rho\omega^2}{k \cos \theta} \sin(kz \cos \theta) \\ \frac{k \cos \theta}{\rho\omega^2} \sin(kz \cos \theta) & \cos(kz \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (0.25)$$

характеристическая матрица однородного жидкого слоя.

Найдём теперь выражение характеристической матрицы неоднородного по толщине слоя. Для этого представим общие решения уравнений (0.13) и (0.23) в виде комбинаций

$$\mathcal{P}(z) = a_1 \mathcal{P}_1(z) + a_2 \mathcal{P}_2(z), \quad (0.26)$$

$$\mathcal{Z}(z) = b_1 \mathcal{Z}_1(z) + b_2 \mathcal{Z}_2(z), \quad (0.27)$$

образованных из линейно независимых частных решений $\mathcal{P}_1(z)$, $\mathcal{P}_2(z)$ и $\mathcal{Z}_1(z)$, $\mathcal{Z}_2(z)$, которые удовлетворяют условиям:

$$\mathcal{P}_1(0) = 1, \quad \mathcal{Z}_1(0) = 0, \quad \mathcal{P}_2(0) = 0, \quad \mathcal{Z}_2(0) = 1 \quad (0.28)$$

и называются фундаментальной системой решений. Заметим, что решения уравнений (0.13) и (0.23) связаны между собой дифференциальными уравнениями первого порядка (0.22). Вследствие этого постоянные коэффициенты в формулах (0.26) и (0.27) удовлетворяют равенствам: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Эти постоянные определим, используя значения функций $\mathcal{P}(z)$ и $\mathcal{Z}(z)$ на границе $z = 0$. Находим: $a_1 = \mathcal{P}(0)$, $a_2 = \mathcal{Z}(0)$. В результате систему уравнений (0.26) и (0.27) можно переписать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(z) \\ \mathcal{Z}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(z) & \mathcal{P}_2(z) \\ \mathcal{Z}_1(z) & \mathcal{Z}_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}(0) \\ \mathcal{Z}(0) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что определитель квадратной матрицы, стоящей в правой части последнего равенства, не зависит от z и, согласно условиям (0.28), равен единице. Поэтому характеристическая матрица неоднородного слоя выражается с помощью фундаментальной системы решений следующим образом:

$$M \equiv \|m_{ij}\| = \begin{vmatrix} \mathcal{Z}_2(z) & -\mathcal{P}_2(z) \\ -\mathcal{Z}_1(z) & \mathcal{P}_1(z) \end{vmatrix}. \quad (0.29)$$

2.4. Фундаментальная система решений. Решение дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{d(\ln \varphi)}{dz} \frac{df}{dz} + k_z^2(z)f = 0, \quad k_z(z) = k \cos \theta, \quad (0.30)$$

к которому относятся (0.13) и (0.23), с помощью стандартной замены $F = \varphi^{-1/2} f$, сводится к решению уравнения в приведённой форме

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + K^2(z, \varphi(z))F = 0, \quad (0.31)$$

где

$$K^2(z, \varphi(z)) = k_z^2(z) + \frac{1}{2\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \right)^2. \quad (0.32)$$

Заметим, что функции $F(z)$ и $f(z)$ совпадают в той мере, в какой можно пренебречь вторым и третьим слагаемыми по сравнению с первым в правой части равенства (0.32).

Частные решения уравнения (0.31), удовлетворяющие дополнительным условиям $F_1(0) = 1$ и $F_2(0) = 0$, можно определить с помощью интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{vmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{vmatrix} + k_z(0) \int_0^z \alpha(s) \begin{vmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{vmatrix} \sin[k_z(0)(z-s)] ds, \quad (0.33)$$

где использованы обозначения:

$$\Phi_1(z) = \cos[k_z(0)z], \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{k_z(0)} \sin[k_z(0)z], \quad \alpha(z) = 1 - \frac{K^2(z, \varphi(z))}{k_z^2(0)}. \quad (0.34)$$

В справедливости представлений (0.33) легко убедиться непосредственной подстановкой их в уравнение (0.31).

Необходимым и достаточным условием существования и единственности решений интегральных уравнений (0.33) является непрерывность функции $\alpha(z)$. При решении уравнений (0.33) методом последовательных приближений:

$$F_i^{(1)}(z) = \Phi_i(z), \quad F_i^{(j+1)}(z) = \Phi_i(z) + k_z(0) \int_0^z \alpha(s) F_i^{(j)}(s) \sin[k_z(0)(z-s)] ds, \quad (0.35)$$

где $i = 1, 2$ и $j \in N$, ошибка аппроксимации функции $F(z)$ j -ым приближением при условиях $|\Phi(z)| \leq m_1$ и $|k_z(0)\alpha(z)| \leq m_2$ не превышает величины [11]:

$$|F(z) - F^{(j)}(z)| \leq m_1 \frac{(m_2 d)^j}{j!} \exp(m_2 d). \quad (0.36)$$

Используя указанный подход, находим представление для фундаментальной системы решений уравнений (0.13) и (0.23):

$$\mathcal{P}_1(z) = \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \left\{ \cos[k_z(0)z] + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \rho) \mathcal{P}_1(s) ds \right\}, \quad (0.37)$$

$$\mathcal{P}_2(z) = \sqrt{\rho(z)\rho(0)} \omega^2 \left\{ \frac{\sin[k_z(0)z]}{k_z(0)} + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \rho) \mathcal{P}_2(s) ds \right\}, \quad (0.38)$$

$$\mathcal{Z}_1(z) = -\sqrt{\frac{k_z(z)k_z(0)}{\rho(z)\rho(0)}} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{\sin[k_z(0)z]}{k_z(0)} + k_z(0) \int_0^z A\left(z, s, \frac{k_z^2}{\rho\omega^2}\right) \mathcal{Z}_1(s) ds \right\}, \quad (0.39)$$

$$\mathcal{Z}_2(z) = \sqrt{\frac{\rho(0)k_z(z)}{\rho(z)k_z(0)}} \left\{ \cos[k_z(0)z] + k_z(0) \int_0^z A\left(z, s, \frac{k_z^2}{\rho\omega^2}\right) \mathcal{Z}_2(s) ds \right\}, \quad (0.40)$$

где

$$A(z, s, \varphi) = \left(1 - \frac{1}{k_z^2(0)} K^2(s, \varphi(s)) \right) \frac{1}{\sqrt{\varphi(s)}} \sin[k_z(0)(z-s)], \quad (0.41)$$

и функция $K^2(z, \varphi(z))$ определяется формулой (0.32). Решения интегральных уравнений (0.37–0.40) могут быть найдены методом последовательных приближений, подобным тому, как формулы (0.35) аппроксимируют решения уравнений (0.33).

Таким образом, характеристическая матрица слоистой среды, параметры которой изменяются непрерывным образом, существует, единственна и может быть представлена с помощью интегральных уравнений Вольтерра.

2.5. Коэффициенты отражения и пропускания. Обозначим

$$\gamma_0 = \frac{ik_0 \cos \theta_0}{\rho_0 \omega^2}, \quad \gamma_d = \frac{ik_d \cos \theta_d}{\rho_d \omega^2}. \quad (0.42)$$

Из условия непрерывности давления и нормальной составляющей вектора деформации на границах $z = 0$ и $z = d$ получаем

$$\begin{aligned} 1 + R &= \mathcal{P}(0), & \mathcal{P}(d) &= T, \\ \gamma_0(1 - R) &= \mathcal{Z}(0), & \mathcal{Z}(d) &= \gamma_d T. \end{aligned}$$

Используя эти формулы, а также соотношения (0.24), выразим коэффициенты отражения R и пропускания T через элементы m_{ij} характеристической матрицы слоя:

$$R = \frac{[m_{11}(d) + m_{12}(d)\gamma_d]\gamma_0 - [m_{21}(d) + m_{22}(d)\gamma_d]}{[m_{11}(d) + m_{12}(d)\gamma_d]\gamma_0 + [m_{21}(d) + m_{22}(d)\gamma_d]}, \quad (0.43)$$

$$T = \frac{2\gamma_0}{[m_{11}(d) + m_{12}(d)\gamma_d]\gamma_0 + [m_{21}(d) + m_{22}(d)\gamma_d]}. \quad (0.44)$$

3. Горизонтальные волны сдвига в изотропной среде

Рассмотрим рассеяние плоской волны, в которой вектор деформации перпендикулярен плоскости падения. Такие волны принято называть горизонтальными или SH волнами [2]. При выборе той же системы координат, что и в предыдущем разделе, не нулевой компонентой \vec{u} в SH волне будет только u_y .

Фурье-компоненты напряжения и вектора деформации в данном случае, как это следует из уравнений (0.2) и (0.3), связаны соотношениями:

$$\tilde{p}_{yx} = \mu \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x}, \quad \tilde{p}_{yz} = \mu \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z}, \quad -\rho \omega^2 \tilde{u}_y = \frac{\partial \tilde{p}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}_{yz}}{\partial z}. \quad (0.45)$$

Используя тот же метод решения задачи, что и в случае продольной волны в жидкой среде, находим:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_y(x, z) &= \mathcal{Y}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0), \\ \tilde{p}_{yx}(x, z) &= \mathcal{P}_{yx}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0), \\ \tilde{p}_{yz}(x, z) &= \mathcal{P}_{yz}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta_0), \end{aligned}$$

где амплитудные функции $\mathcal{Y}(z)$, $\mathcal{P}_{yx}(z)$ и $\mathcal{P}_{yz}(z)$ связаны друг с другом уравнениями:

$$\mathcal{P}_{yx}(z) = \mu i k_0 \sin \theta_0 \mathcal{Y}(z), \quad (0.46)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{vmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{P}_{yz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/\mu \\ -\mu k_z^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{P}_{yz} \end{vmatrix}. \quad (0.47)$$

Здесь использованы обозначения:

$$k_0 = \omega \sqrt{\rho_0/\mu_0}, \quad k = \omega \sqrt{\rho(z)/\mu(z)}, \quad k_z = k \cos \theta. \quad (0.48)$$

Фундаментальная система решений уравнений (0.47) представляется следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1(z) = \sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}} \left\{ \cos[k_z(0)z] + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \mu^{-1}) \mathcal{Y}_1(s) ds \right\}, \quad (0.49)$$

$$\mathcal{Y}_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(z)\mu(0)}} \left\{ \frac{\sin[k_z(0)z]}{k_z(0)} + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \mu^{-1}) \mathcal{Y}_2(s) ds \right\}, \quad (0.50)$$

$$\mathcal{P}_{yz1}(z) = -\sqrt{\mu(0)\mu(z)k_z^2(z)} \left\{ \sin[k_z(0)z] + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \mu k_z^2) \mathcal{P}_{yz1}(s) ds \right\}, \quad (0.51)$$

$$\mathcal{P}_{yz2}(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)k_z^2(z)}{\mu(0)k_z^2(0)}} \left\{ \cos[k_z(0)z] + k_z(0) \int_0^z A(z, s, \mu k_z^2) \mathcal{P}_{yz2}(s) ds \right\}, \quad (0.52)$$

где функция $A(z, s, \varphi)$ определяется формулой (0.41).

Характеристической матрицей слоя является

$$M = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_{yz2}(z) & -\mathcal{Y}_2(z) \\ -\mathcal{P}_{yz1}(z) & \mathcal{Y}_1(z) \end{vmatrix}. \quad (0.53)$$

В частности, характеристическая матрица однородного слоя теперь выражается формулой:

$$M = \begin{vmatrix} \cos(kz \cos \theta) & -\frac{1}{\mu k \cos \theta} \sin(kz \cos \theta) \\ \mu k \cos \theta \sin(kz \cos \theta) & \cos(kz \cos \theta) \end{vmatrix}. \quad (0.54)$$

Коэффициенты отражения и пропускания выражаются формулами (0.43) и (0.44), в которых, в отличие от предыдущего случая, следует положить

$$\gamma_0 = i\mu k_0 \cos \theta_0, \quad \gamma_d = i\mu k_d \cos \theta_d. \quad (0.55)$$

4. Отражение от периодической структуры

Характеристическая матрица периодической структуры, для рассматриваемых в данной работе случаев, выражается формулой [12]:

$$M = \left\| \begin{array}{cc} m_{11}U_{n-1}(b) - U_{n-2}(b) & m_{12}U_{n-1}(b) \\ m_{21}U_{n-1}(b) & m_{22}U_{n-1}(b) - U_{n-2}(b) \end{array} \right\|, \quad (0.56)$$

где m_{ij} ($i, j = 1, 2$) — элементы характеристической матрицы одного периода слоистой среды, n — число периодов, $b = (m_{11} + m_{22})/2$, и

$$U_n(b) = \frac{\sin[(n+1)\arccos b]}{\sqrt{1-b^2}} \quad (0.57)$$

полиномы, удовлетворяющие рекуррентным формулам

$$U_n(b) = 2bU_{n-1}(b) - U_{n-2}(b), \quad U_0(b) = 1, \quad U_1(b) = 2b. \quad (0.58)$$

Получим выражение для коэффициента отражения R_n и пропускания T_n плоской волны n -слойной периодической средой. Обозначим через ϱ и τ соответственно коэффициенты отражения и пропускания одним периодом структуры. В соответствии с формулами (0.43) и (0.44) получим два вспомогательных равенства:

$$\begin{aligned} [m_{11}(d) + m_{12}(d)\gamma_d]\gamma_0 + [m_{21}(d) + m_{22}(d)\gamma_d] &= \frac{2\gamma_0}{\tau}, \\ [m_{11}(d) + m_{12}(d)\gamma_d]\gamma_0 - [m_{21}(d) + m_{22}(d)\gamma_d] &= \frac{2\gamma_0\varrho}{\tau}. \end{aligned}$$

Используем эти соотношения при подстановке элементов матрицы (0.56) в формулы (0.43) и (0.44). В результате находим:

$$R_n = \frac{\varrho U_{n-1}(b) - \tau \frac{\gamma_0 - \gamma_d}{2\gamma_0} U_{n-2}(b)}{U_{n-1}(b) - \tau \frac{\gamma_0 + \gamma_d}{2\gamma_0} U_{n-2}(b)}, \quad T_n = \frac{\tau}{U_{n-1}(b) - \tau \frac{\gamma_0 + \gamma_d}{2\gamma_0} U_{n-2}(b)}. \quad (0.59)$$

Формулы (0.59) принимают особенно простой вид при $\gamma_0 = \gamma_d$. Это реализуется, в частности, когда свойства среды в областях $z < 0$ и $z > d$ одинаковы, и упругие свойства в каждом периоде периодической структуры $\frac{d}{n}(j-1) \leq z \leq \frac{d}{n}j$, где $j = 1, 2, \dots, n$, симметричны относительно его середины. Выполняя элементарные преобразования, находим

$$\frac{U_{n-2}(b)}{U_{n-1}(b)} = b - \sqrt{1-b^2} \operatorname{ctg}(n \arcsin \sqrt{1-b^2}),$$

и для коэффициента отражения при $\gamma_0 = \gamma_d$ получаем следующее выражение

$$R_n = \frac{\varrho}{1 - \tau [b - \sqrt{1 - b^2} \operatorname{ctg}(n \arcsin \sqrt{1 - b^2})]}, \quad (0.60)$$

которое в ряде случаев (см., например [13]) более удобно для анализа, чем формула (0.59).

Для получения представления коэффициентов отражения R_n и пропускания T_n в замкнутой форме через парциальные коэффициенты ϱ и τ необходимо дополнить формулы (0.59) функциональной зависимостью $b = b(\varrho, \tau)$. Например, для случая, когда $m_{11} = m_{22}$, такая зависимость имеет вид: $b = (1 + \tau^2 - \varrho^2)/(2\tau)$.

5. Заключение

Метод определения характеристической матрицы непрерывно слоистой среды, представленный в данной работе, применим не только к упругим волнам, но легко распространяется на волны любой другой природы, лишь бы их распространение описывалось дифференциальным уравнением второго порядка (или системой двух дифференциальных уравнений первого порядка). Например, для плоской световой волны в диэлектрических плёнках определяющим является дифференциальное уравнение вида (0.30) относительно напряжённости электрического поля или напряжённости магнитного поля. При этом роль функции $\varphi(z)$ играют соответственно $\ln \varepsilon$ и $\ln(\mu - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{\varepsilon})$ (здесь ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость и n — показатель преломления рассматриваемой среды).

Общими для волн любой природы, распространение которых в слоистой среде описывается характеристической матрицей второго порядка, является форма представлений (0.43 – 0.44) для коэффициентов отражения и пропускания.

Наконец, найденные в настоящей работе решения (0.59) для коэффициентов отражения и пропускания плоской волны слоисто периодической средой также являются общими для различных физических волн. Для их применения к конкретным задачам требуется лишь знание парциальных коэффициентов отражения ϱ , пропускания τ и зависимости величины b от них. Так для нахождения коэффициента отражения в случае двухлучевой рентгеновской дифракции по Брэггу в совершенном кристалле [14] качестве ϱ и τ в формулах (0.59) (или (0.60)) следует взять соответственно коэффициенты отражения и пропускания одной атомной плоскостью (модель Дарвина). Для той же схемы рентгеновской дифракции в кристаллических сверхрешётках коэффициенты от-

ражения и пропускания [15] следуют из (0.59), если под ρ и τ понимать коэффициенты отражения и пропускания одним кристаллическим слоем.

Литература

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. М.: Из-во АН СССР, 1957. 503 с.
2. **Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.** Elastic Waves in layered media. New York: Graw-Hill Book Com. 1957. 380p.
3. **Tolstoy I.** Effects of density stratification on sound waves // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70. P. 6009-6015.
4. **Knittl Z.** Optics of Thin Films (An Optical Multilayer Theory). New York, Sydney, Toronto: J.Wiley & Sons, 1975. 548 p.
5. **Robins A.J.** Reflection of plane acoustic waves from a layer of varying density // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 87. P. 1546-1552.
6. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
7. **Ito S.** Transient dynamic stress intensity factors around two rectangular cracks in nonhomogeneous interfacial layer between two elastic half-spaces under impact load // *Acta Mech.* 2007. V. 192. P. 89-110.
8. **Huang G.Y., Wang Y.S., Yu S.W.** Stress concentration at penny-shaped cracks in anonhomogeneous medium under torsion // *Acta Mech.* 2005. V. 180. P. 107-115.
9. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970. С. 77-96.
10. **Levin H.** Unidirectional Wave Motion. New York: North-Holland Pub. Comp., 1976. 502 p.
11. **Caviglia G., Morro A.** Acoustic and elastic scattering by continuously stratified media // *Acta Mech.*, 2009. V. 206. P. 173-191.
12. **Беляев Ю.Н.** Характеристическая матрица слоисто-периодической структуры // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1.* 2010. вып. 11. С. 86-91.
13. **Пинскер З.Г.** Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982. 392 с.

14. **Иверонова В.И., Ревкевич Г.П.** Теория рассеяния рентгеновских лучей. М.: Из-во Московского ун-та, 1978. 278 с.
15. **Belyaev Yu. N., Kolpakov A. V.** On the theory of X-ray diffraction in a perfect crystal with distorted surface layer // *phys. stat. sol. (a)*, 1983. V. 76, P. 641-646.

Summary

Belyaev Yu. N. Wave scattering continuously stratified elastic media

Method of calculating elements of the second order matrix, which characterizes the elastic continuously layered media is proposed. The representation of reflection and transmission coefficients of the layer through elements of characteristic matrix is given. General solution to the plane wave reflection and transmission in a periodic continuously stratified medium is found.

Keywords: plane waves, periodic structure, stratified mediums, wave scattering, integral equations of Volterra, characteristic matrix

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 5.04.2011