Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.13.2011

УДК 519.6

ОЦЕНКИ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА

Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный

Приводится доказательство теоремы Дельсарта для оценки снизу количества элементов сферического дизайна. Изложение является замкнутым, все вспомогательные утверждения доказаны.

Ключевые слова: сферические дизайны, теорема Дельсарта

1. Основная теорема

Используем стандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Считаем, что $n \geqslant 3$.

В работах [1, 2] введено понятие сферического дизайна.

Определение. Пусть t — натуральное число. Система единичных векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ называется сферическим t-дизайном, если выполняется равенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i)$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

По мнению авторов [3] наиболее интересная задача теории дизайнов такова: для данных n, t найти сферический t-дизайн с минимальным числом элементов. Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ получена Ф. Дельсартом [1, 2].

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ *— сферический t-дизайн. Тогда*

$$m \geqslant C_{n+s-1}^{n-1} + C_{n+s-2}^{n-1} \quad \textit{при } t = 2s, \tag{1.1}$$

$$m \geqslant 2\, C_{n+s-1}^{n-1} \quad \textit{при } t = 2s+1. \tag{1.2}$$

2. Полиномы Гегенбауэра

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются полиномы Гегенбауэра $P_k^{(\alpha,\alpha)}$ степени k, ортогональные с весом $w(x) = (1 - x^2)^\alpha$ на отрезке $[-1, 1]$, при $\alpha = (n-3)/2$. Обычно используется следующая нормировка [4]:

$$P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(k+1)}.$$

Известна формула для квадрата нормы полиномов Гегенбауэра

$$\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2 := \int\limits_{-1}^{1} \big[P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)\big]^2\, w(x)\, dx = \\ = \frac{2^{2\alpha+1}\,\Gamma^2(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+1)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+2\alpha+1)}.$$

Ещё раз подчеркнём, что нас интересует специальное значение параметра α:

$$\alpha = \frac{n-3}{2}.$$

Изменим нормировку полиномов Гегенбауэра. Положим $Q_k(x) = c_k\, P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)$, где константа c_k выбирается так, чтобы

$$Q_k(1) = \|Q_k\|^2. \tag{2.3}$$

Перепишем равенство (0.5) в виде $P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = c_k \big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2$. Отсюда следует, что $c_k = P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) \,/\, \big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2$ и

$$Q_k(1) = \frac{\big[P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)\big]^2}{\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2}.$$

С учётом выписанных формул придём к равенству

$$\|Q_k\|^2 = \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{\Gamma^2\big(\frac{n-1}{2}\big)\,k!\,2^{n-2}}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.4}$$

Полином $Q_0(x)$ равен постоянной Q_0. При $k = 0$ из (0.5) и (0.7) получаем

$$Q_0 = \|Q_0\|^2 = \frac{(n-2)!}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{n-2}}. \tag{2.5}$$

3. Зональные сферические функции

Возьмём вектор $v \in S^{n-1}$. Функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$, рассматриваемая на сфере S^{n-1}, называется зональной сферической функцией.

Лемма 1. *Пусть $k \geqslant 1$. Для любого $v \in S^{n-1}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)\, dS_x = 0.$$

Доказательство. Интеграл обозначим I_k. При k нечётном функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$ является нечётной на $\mathbb{R}^n$, поэтому $I_k = 0$.

Пусть k чётное, $k \geqslant 2$. Тогда Q_k содержит только чётные степени:

$$Q_k(u) = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, u^i.$$

Отсюда

$$I_k = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i) \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle v, x\rangle\big]^i\, dS_x = \sigma_n \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, c(i). \tag{3.6}$$

Интеграл в (0.9) вычислен в докладе [5]. Он равен $\sigma_n\, c(i)$, где

$$c(0) = 1; \qquad c(i) = \frac{(i-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+i-2)}, \quad i \geqslant 2.$$

Запишем условие ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(u)(1-u^2)^\alpha\, du = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, d(i) = 0, \tag{3.7}$$

где

$$d(i) = \int\limits_{-1}^{1} u^i (1-u^2)^\alpha\, du = 2\int\limits_{0}^{1} u^i(1-u^2)^\alpha\, du.$$

Вычислим последний интеграл. После замены $x = u^2$, $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ получим

$$d(i) = \int_0^1 x^{(i-1)/2}(1-x)^\alpha\,dx = \frac{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}\big)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}+\alpha+1\big)}.$$

Положим теперь $\alpha = (n-3)/2$ и тогда $\{d(i)\}$ чудесным образом станет пропорциональной последовательности $\{c(i)\}$. Действительно, при $\alpha =$ $= (n-3)/2$

$$d(i) = \frac{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{i+n}{2}\big)}.$$

У нас i — чётное, $i = 2\nu$. Применив ν раз формулу $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, получим

$$\Gamma\Big(\frac{i+1}{2}\Big) = \Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big) = (2\nu-1)!!\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{2^\nu},$$
$$\Gamma\Big(\frac{i+n}{2}\Big) = \Gamma\Big(\nu+\frac{n}{2}\Big) = n\,(n+2)\cdots(n+i-2)\,\frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{2^\nu},$$
$$d(i) = \frac{(i-1)!!}{n\,(n+2)\cdots(n+i-2)}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}$$

В результате

$$d(i) = c(i)\,K(n), \qquad i = 0, 2, \ldots, k, \tag{3.8}$$

где $K(n)$ зависит только от n. (При $i = 0$ проверяется непосредственно.)

Окончательно в силу (0.9), (0.10), (0.11) интеграл I_k равен нулю. Действительно,

$$I_k = \sigma_n \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,c(i) = \frac{\sigma_n}{K(n)} \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,d(i) = 0.$$

Лемма доказана. □

4. Необходимое условие сферического дизайна

Предложение. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн. Тогда выполняются равенства*

$$\sum_{i,j=1}^m Q_k\big(\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\big) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t. \tag{4.9}$$

Доказательство. Функция

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

является алгебраическим полиномом степени не выше k. По определению сферического дизайна и лемме 1

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} P(\varphi_j) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big)\,dS = 0,$$

что равносильно (4.9). □

5. Оценка количества элементов сферического дизайна по теореме Дельсарта

Ф. Дельсарт [1, 2] предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического t-дизайна.

Определим $\mathscr{P}_t^+$ как множество полиномов степени не выше t, удовлетворяющих условиям

$$F(u) \geqslant 0 \text{ на } [-1, 1]; \qquad F(1) = 1.$$

Каждый полином $F \in \mathscr{P}_t^+$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(u) = \sum_{k=0}^{t} F_k\, Q_k(u).$$

Для коэффициентов Фурье F_k справедлива формула

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k \in 0 : t,$$

где $(\ \ ,\ \ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1, 1]$ с весом

$$w_n(u) = (1 - u^2)^{(n-3)/2}.$$

Поскольку $Q_0 = \|Q_0\|^2$, то

$$F_0 = \int\limits_{-1}^{1} F(u)\, w_n(u)\, du > 0. \tag{5.10}$$

Теорема 2. *Если* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн, то*

$$m \geqslant \sup_{F \in \mathscr{P}_t^+} \frac{1}{F_0\, Q_0}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{P}_t^+$. Положим $S = \sum\limits_{i,j=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big)$. Имеем

$$S \geqslant \sum_{i=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle\big) = m\, F(1) = m. \tag{5.12}$$

Вместе с тем, в силу (4.9)

$$S = \sum_{k=0}^{t} F_k \sum_{i,j=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big) = m^2\, F_0\, Q_0. \tag{5.13}$$

Из (0.17) и (5.13) следует неравенство $m \geqslant 1/(F_0\, Q_0)$.

Теорема доказана. □

6. Оценка в случае чётного t

Получим для правой части неравенства (5.11) оценку снизу. Сначала рассмотрим случай $t = 2s$. Обозначим через $\mathscr{R}_{2s}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = [A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u), \quad A(1) = 1. \tag{6.14}$$

Лемма 2. *Экстремальная задача*

$$b_{2s}(F) := \frac{1}{F_0} \to \sup_{F \in \mathscr{R}_{2s}}$$

имеет единственное решение

$$F^*(u) = \left[\frac{1}{L_t} \sum_{k=0}^{s} Q_k(u)\right]^2,$$

где $L_t = \sum\limits_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2$. *При этом* $b_{2s}(F^*) = L_t$.

Доказательство. Для полинома $F(u) = [A(u)]^2$ в силу (6.14), нормировки Q_k и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) = \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(1)\right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, \|Q_k\|^2\right]^2 = \\ = \left[\sum_{k=0}^{s} \bigl(a_k\, \|Q_k\|\bigr) \|Q_k\|\right]^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2 \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Неравенство обращается в равенство только тогда, когда $a_k\, \|Q_k\| = \lambda\, \|Q_k\|$ при некотором λ и всех $k \in 0 : s$, т.е. когда

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_s = \lambda. \tag{6.16}$$

Далее по формуле (5.10)

$$F_0 = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u)\right]^2 w_n(u)\, du.$$

В силу ортогональности

$$F_0 = \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2. \tag{6.17}$$

Из (6.17) и (6.15) следует, что

$$\frac{1}{F_0} \leqslant \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2 = L_t.$$

Равенство достигается только при выполнении условия (6.16), что вместе с равенством $A(1) = 1$ приводит к формуле $\lambda = 1/L_t$. Остаётся отметить, что в силу (6.17)

$$b_{2s}(F^*) = \frac{1}{F_0^*} = L_t.$$

Лемма доказана. □

На основании (5.11) и леммы 2 заключаем, что при $t = 2s$ для количества элементов сферического t-дизайна справедливо неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s)$, где

$$b_D(n, 2s) = \frac{1}{Q_0} \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \tag{6.18}$$

7. Оценка в случае нечётного t

Обратимся к случаю $t = 2s+1$. Обозначим $\mathscr{R}_{2s+1}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = (1+u)[A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(u), \quad A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Полиномы Q_{s-2k} имеют одинаковую чётность. Аналогично (6.15) получаем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) = 2\left[\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(1)\right]^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2\, \|Q_{s-2k}\|^2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Равенство достигается только, когда все a_{s-2k} равны между собой. Их общее значение обозначим λ. Из условия $A(1) = 1/\sqrt{2}$ следует, что $\lambda = \sqrt{2}/L_t$, где

$$L_t = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2.$$

Далее по формуле (5.10)

$$\begin{aligned} F_0 &= \int_{-1}^{1} (1+u)\,[A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \\ &= \int_{-1}^{1} [A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2\, \|Q_{s-2k}\|^2. \end{aligned}$$

Согласно (7.19)

$$\frac{1}{F_0} \leqslant L_t. \tag{7.20}$$

При этом в силу (7.20) $b_{2s+1}(F^*) := 1/F_0^* = L_t$. Для количества элементов сферического t-дизайна по теореме 2 получаем неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s+1)$, где

$$b_D(n, 2s+1) = \frac{2}{Q_0} \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \tag{7.21}$$

8. Вычисление границы Дельсарта $b_D(n,t)$

С учетом формулы (0.8) перепишем формулу (0.7) в виде

$$\begin{aligned}\|Q_k\|^2 &= \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{2^{n-2}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)k!} = \\ &= Q_0\,\frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{(n-2)!\,k!} = \\ &= Q_0\,\frac{(k+(k+n-2))\,(k+n-3)!}{(n-2)!\,k!} = \\ &= Q_0\left(\frac{(k+n-3)!}{(n-2)!\,(k-1)!} + \frac{(k+n-2)!}{(n-2)!\,k!}\right) = \\ &= Q_0\left(C_{k+n-3}^{k-1} + C_{k+n-2}^{k}\right).\end{aligned}$$

При $k=0$ считаем, что $C_{n-3}^{-1}=0$.

Вычислим теперь величину (6.18):

$$b_D(n,2s) = \frac{1}{Q_0}\sum_{k=0}^{s}\|Q_k\|^2 = \sum_{k=0}^{s}\left(C_{k+n-3}^{k-1} + C_{k+n-2}^{k}\right). \tag{8.22}$$

Последовательным применением равенства $C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-1}^{s-1}$ получаем

$$C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-2}^{s-1} + C_{m-3}^{s-2} + \ldots + C_{m-s-1}^0 = \sum_{k=0}^{s} C_{m-s-1+k}^{k}\,.$$

Здесь учли, что $C_{m-s}^0 = 1 = C_{m-s-1}^0$. В частности,

$$\sum_{k=0}^{s} C_{k+n-2}^{k} = C_{n+s-1}^{s} = C_{n+s-1}^{n-1}\,, \tag{8.23}$$

$$\sum_{k=0}^{s} C_{k+n-3}^{k-1} = \sum_{k=1}^{s} C_{k+n-3}^{k-1} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{k+n-2}^{k} = C_{n+s-2}^{n-1}\,.$$

Отсюда и из (8.22) следует равенство $b_D(n,2s) = C_{n+s-1}^{n-1} + C_{n+s-2}^{n-1}$, что доказывает оценку (0.2).

Вычислим теперь величину (7.21):

$$b_D(n,2s+1) = \frac{2}{Q_0}\sum_{j=0}^{\lfloor s/2\rfloor}\|Q_{s-2j}\|^2 = 2\sum_{j=0}^{\lfloor s/2\rfloor}\left(C_{s-2j+n-3}^{s-2j-1} + C_{s-2j+n-2}^{s-2j}\right). \tag{8.24}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $s=2l$. Тогда $\lfloor s/2\rfloor = l$ и в силу (8.23)

$$b_D(n,2s+1) = 2\left[C_{s+n-2}^{s} + C_{s+n-3}^{s-1} + C_{s+n-4}^{s-2} + \ldots + C_{n-2}^{0}\right] = 2\,C_{n+s-1}^{n-1}.$$

Если же $s=2l+1$, то из формулы (8.24) получим ровно тот же результат. Это доказывает оценку (0.3).

Литература

1. **Delsarte Ph.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory // *Philips Res. Reports Suppl. 1973. №10. P. 1–97.*

2. **Delsarte Ph., Goethals J. M., Seidel J. J.** Spherical codes and designs // *Geometricae Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.*

3. **Bannai E., Munemasa A., Venkov B.** The nonexistence of certain tight spherical designes // *Алгебра и анализ. 2004. Т. 10. Вып. 4. С. 1–23.*

4. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

5. **Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б.** Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве / Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515)

Summary

Afonin R. E., Malozemov V. N., Pevnyi A. B. Delsarte bounds for the number of elements of the spherical design

The proof of the Delsarte's theorem for lower bound for cardinality of spherical design is given. The exposition is closed, all auxiliary theorems are proved.

Keywords: spherical designs, Delsart's theorem

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 14.04.2011*