Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.13.2011

УДК 512.556

СТРОЕНИЕ РЕШЕТОЧНЫХ ИЗОМОРФИЗМОВ ПОЛУКОЛЕЦ, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В. В. Сидоров

Описаны изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ всех подалгебр с единицей полуколец $[f]$ и $[g]$ функций, порожденных соответственно неотрицательными действительнозначными функциями f и g. Показано, что любой изоморфизм этих решеток порождается изоморфизмом самих полуколец $[f]$ и $[g]$. Применяется техника однопорожденных подалгебр.

Ключевые слова: изоморфизмы решеток, изоморфизм полуколец, однопорожденные подалгебры, неотрицательная функция

Введение

В нашей работе описаны изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f$ всех подалгебр с единицей полуколец $[f]$ функций, порожденных одной неотрицательной действительнозначной функцией $f, |\operatorname{Im} f| \leqslant 3$. Случай $|\operatorname{Im} f| = n \geqslant 4$ сводится к случаю $n = 3$. Случай $|\operatorname{Im} f| = \infty$ разобран в [3].

Данная задача возникла при исследовании изоморфизмов решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ подалгебр полуколец непрерывных неорицательных функций на топологических пространствах X (см. [1,2]). Важная роль в этих исследованиях отводится подрешеткам $\mathbb{A}_1(C^+(X))$. Для изучения изоморфизмов решеток $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ весьма полезными оказываются их однопорожденные подалгебры. Отметим, что каждая подалгебра решетки $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ есть точная верхняя грань включенных в нее однопорожденных подалгебр. Кроме того, при изоморфизме α решетки $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ на решетку $\mathbb{A}_1(C^+(Y))$ образом произвольной однопорожденной подалгебры $[f], f \in C^+(X)$, служит некоторая однопорожденная подалгебра $[g], g \in C^+(Y)$. Поэтому α однозначно задается образами однопорожденных подалгебр. С подалгеброй $[f]$ связана подрешетка $\mathbb{A}_f$ решетки

$\mathbb{A}_1(C^+(X))$, образованная всеми подалгебрами $A \subseteq [f]$ с единицей. Возникает естественный вопрос: как связаны между собой изоморфизмы полуколец $[f]$ и $[g]$ и изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$? Функции f и g будем считать произвольными неотрицательными действительнозначными функциями, так их непрерывность оказывается несущественной.

1. Основные понятия и результаты

Исходной алгебраической структурой у нас служит полукольцо. Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения, $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$.

Пусть X — топологическое пространство и $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{P}$) — множество всех неотрицательных (положительных) действительных чисел. Множество всех неотрицательных действительнозначных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полукольцо $F(X) = (\mathbb{R}^+)^X$. Множество всех непрерывных функций из $F(X)$ образует его подполукольцо, которое обозначим через $C^+(X)$. *Подалгеброй* в полукольце $F(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$, полукольца $C^+(X)$ и $F(X)$. Обозначим через $\mathbb{A}(F(X))$ решетку всех подалгебр полукольца $F(X)$ относительно включения $\subseteq$ (символ $\subset$ в работе означает строгое включение), а через $\mathbb{A}_1(F(X))$ ее подрешетку, состоящую из всех подалгебр с единицей. Решетки $\mathbb{A}(F(X))$ и $\mathbb{A}_1(F(X))$ являются алгебраическими, то есть полными компактно порожденными [4, с. 111]. Решеточными операциями в $\mathbb{A}(F(X))$ служат

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = A + B + AB,$$

где $AB = \{$конечная сумма $\sum f_i g_i \colon f_i \in A,\ g_i \in B\}$. Минимальные (ненулевые) подалгебры в $F(X)$ — это атомы решетки $\mathbb{A}(F(X))$, а максимальные (собственные) подалгебры — ее коатомы. Наименьшую подалгебру $A \in \mathbb{A}_1(F(X))$, содержащую функцию $f \in F(X)$, назовем *однопорожденной* и обозначим $[f]$. Она состоит из всевозможных многочленов от f с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Множество всех подалгебр с единицей, включенных в $[f]$, образует подрешетку решетки $\mathbb{A}_1(F(X))$, которую обозначим через $\mathbb{A}_f$. Множества $\mathrm{Z}(f) = \{x \in X \colon f(x) = 0\}$ и $\operatorname{coz} f = X \backslash Z(f), f \in F(X)$, называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* функции f соответственно. Ясно, что для функции $g \in [f]$ либо $\mathrm{Z}(g) = \mathrm{Z}(f)$, либо $\mathrm{Z}(g) = \varnothing$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1.1. *Для произвольных функций $f \in F(X)$ и $g \in F(Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) $[f] \cong [g]$ *как* $\mathbb{R}^+$*–алгебры;*

2) $\mathbb{A}_f \cong \mathbb{A}_g$;

3) *выполняется одно из условий:*

а) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 1$;

б) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2,\ 0 \notin \operatorname{Im} f \cup \operatorname{Im} g$ *или* $0 \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$;

в) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = n \geqslant 3,\ f = kg, k \in \mathbb{R}^+$, *как упорядоченные* n*-ки чисел;*

г) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = \infty$.

В данной работе, как уже отмечалось, подробно разобран случай $|\operatorname{Im} f| \leqslant 3$, а именно доказана

Теорема 1.2. *Для произвольных функций $f \in F(X), |\operatorname{Im} f| \leqslant 3$ и $g \in F(Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) $[f] \cong [g]$ *как* $\mathbb{R}^+$*–алгебры;*

2) $\mathbb{A}_f \cong \mathbb{A}_g$;

3) *выполняется одно из условий:*

а) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 1$;

б) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2,\ 0 \notin \operatorname{Im} f \cup \operatorname{Im} g$ *или* $0 \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$;

в) $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 3,\ f = kg, k \in \mathbb{R}^+$, *как упорядоченные тройки чисел.*

Случай $n \geqslant 4$ может быть сведен к случаю $n = 3$. Если функции f и g — бесконечнозначные, то решетки $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ изоморфны решетке $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ всех подалгебр с 1 полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Поэтому задача описания изоморфизмов решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ в случае бесконечнозначных функций f и g сводится в описанию автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$. Ответ содержит

Теорема 1.3 ([3]). *Автоморфизмы решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ порождаются автоморфизмами полукольца $\mathbb{R}^+[x]$, которые, в свою очередь, получаются заменами $x \mapsto px,\ p \in \mathbb{P}$. В частности, группа автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ изоморфна мультипликативной полугруппе $\mathbb{P}$ положительных действительных чисел.*

Из теорем 1.1 и 1.3 следует

Теорема 1.4. *Изоморфизмы решетки $\mathbb{A}_f, f \in F(X)$ индуцируются изоморфизмами полукольца $[f]$.*

2. Свойства однопорожденных подалгебр

В этой части изучаются свойства однопорожденных подалгебр, которые потребуются для доказательства теоремы 1.2. Во многих рассуждениях используется

Лемма 2.1 (Правило знаков Декарта [5, с. 249]). *Если мономы многочлена от одной переменной с действительными коэффициентами упорядочены по убыванию (возрастанию) показателей степеней, то число положительных корней многочлена равно числу перемен знака между последовательными ненулевыми коэффициентами или на четное число меньше этого числа. Корни считаются с учетом кратности.*

Для успешного использования правила знаков Декарта нам понадобится следующее наблюдение. Рассмотрим произвольную последовательность действительных чисел

$$a_0, a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \quad a_0 \geqslant 0, a_{l+1} \geqslant 0.$$

Наибольшее число перемен знака, которое может иметь подобная последовательность, обозначим через $\mathrm{MCS}(l)$. Если l — четно, то $a_k a_{k+1} \geqslant 0$ для некоторого $k \leqslant l$. Поэтому $\mathrm{MCS}(l) = \mathrm{MCS}(l-1)$ для четных значений l. В свою очередь, $\mathrm{MCS}(l) = l+1$, когда l — нечетно, поскольку каждое из $(l+1)/2$ чисел $a_1, a_3, \ldots, a_l$ доставляет максимум две перемены знака, причем он достигается в случае чередования знаков у членов последовательности. Значит, $\mathrm{MCS}(l) = l$ для четных значений l.

Все многочлены, если не оговорено противное, считаем с коэфициентами из $\mathbb{R}^+$. Коэффициенты обозначаем буквами a, b, c и d (часто индексированными).

Непосредственным следствием правила знаков Декарта является

Лемма 2.2. *Для любой функции* $f \in F(X), |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 3$ *и* $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n \Longleftrightarrow a_k = 1, a_i = 0 \text{ для } i \neq k.$$

При $k = 1$ *достаточно считать, что* $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$.

Очевидно, что пропорциональность функций f и g из $F(X)$ влечет равенство $[f] = [g]$ соответствующих им подалгебр. Докажем, что в случае, когда функции f и g являются трех и более значными, верно и обратное.

Лемма 2.3. *Для трех и более значных функций* $f, g \in F(X)$

$$[f] = [g] \Longleftrightarrow f \text{ и } g \text{ пропорциональны.}$$

Доказательство. Достаточность отмечалась выше. Докажем необходимость. Пусть трех и более значные функции f и g таковы, что $[f]=[g]$. Равенство подалгебр означает, что $f=Q(g)$ и $g=P(f)$ для некоторых многочленов $Q\in\mathbb{R}^+[g]$ и $P\in\mathbb{R}^+[f]$. Поэтому $f=(Q\circ P)(f)$. Если многочлены Q и P не мономы первой степени, то многочлен $Q\circ P$ также не моном первой степени от f. Поэтому согласно лемме 2.2 равенство $f=(Q\circ P)(f)$ невозможно. Значит, Q и P — мономы первой степени, то есть $f=kg$ для некоторого числа $k\in\mathbb{P}$. $\square$

Пусть $f\in F(X)$ и $\operatorname{Im} f=\{r_1,\ldots,r_n\}, r_1>\ldots>r_n\geqslant 0$. Тогда множества $X_1=f^{-1}(r_1),\ldots,X_n=f^{-1}(r_n)$ образуют разбиение множества X, и любая функция $g\in[f]\backslash\mathbb{R}^+$ будет n-значной, причем если $g(X_1)=\{r'_1\},\ldots,g(X_n)=\{r'_n\}$, то $r'_1>\ldots>r'_n\geqslant 0$. Используем это наблюдение следующим образом: функции, задающие подалгебры из $[f]$, иногда будем записывать упорядоченными по убыванию n-ми чисел (значения функций), причем *нормированными*, то есть наибольшие значения, которые функции принимают на X_1, считать равными единице. Само пространство X будем считать n-точечным, отождествляя точки из X_i с номером i. Например, если функция $f\in F(X)$ равна 2 на $X_1\subset X$ и 1 на $X\backslash X_1$, то $[f]=[(1;1/2)]$, поскольку функция $h=f/2$ порождает ту же однопорожденную подалгебру, что и $[f]$. Кроме того, h записана упорядоченной по убыванию двойкой $(1;1/2)$ своих значений.

Предложение 2.1. *Для произвольной функции $f\in F(X)$ верны следующие утверждения:*

1) $|\mathbb{A}_f|=1\iff f\in\mathbb{R}^+$;
2) $|\mathbb{A}_f|=2\iff \operatorname{Im} f=\{r_1,r_2\}, r_1>r_2>0$;
3) $|\mathbb{A}_f|=3\iff \operatorname{Im} f=\{r_1,0\}, r_1>0$;
4) $|\mathbb{A}_f|=\infty\iff |\operatorname{Im} f|\geqslant 3$.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Оно, в частности, дает решеточную характеризацию подалгебры $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{A}_f$.

Пусть $\operatorname{Im} f=\{r_1,r_2\}, r_1>r_2>0$. Докажем, что $[g]=[f]$ для произвольной функции $g\in[f]\backslash\mathbb{R}^+$. Для этого достаточно установить включение $[f]\subseteq[g]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g=(1,a)$ и $f=(1,b)$, где $1>a>0, 1>b>0$. Если $a=b$, то $[g]=[f]$. Пусть $a>b$. Выберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы $a^n\leqslant b$. Тогда $[f]\subseteq[g]$, так как

$$f=\frac{b-a^n}{a-a^n}\cdot g+\frac{a-b}{a-a^n}\cdot g^n.$$

Случай $a<b$ сведем к предыдущему. Для этого выберем число $r>0$ так, чтобы у нормированной функции $(g+r)/(1+r)=(1,c)$ значение c

было больше a. Тогда, как было показано выше, $[f] \subseteq [g+r]$. Следовательно, $[f] \subseteq [g]$, так как $[g+r] \subseteq [g]$. Получается, что все подалгебры из $[f]$, отличные от $\mathbb{R}^+$, совпадают с $[f]$. Значит, решетка $\mathbb{A}_f$ — двухэлементная цепь $\mathbb{R}^+ \subset [f]$.

Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, 0\}, r_1 > 0$. Очевидно, $\mathbb{R}^+ \subset [f+1] \subset [f]$ и для любой функции $g \in [f] \backslash \mathbb{R}^+$ имеем $[g] = [f]$ если $\mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$ и, как было показано ранее, $[g] = [f+1]$ если $\mathrm{Z}(g) = \varnothing$. Поэтому решетка $\mathbb{A}_f$ — трехэлементная цепь, состоящая из подалгебр $\mathbb{R}^+, [f+1]$ и $[f]$.

Если $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$, то по лемме 2.3 в цепи

$$[f] \supseteq [f^2] \supseteq \ldots \supseteq [f^n] \supseteq [f^{2n}] \supseteq \ldots, \quad n \in \mathbb{N},$$

все включения строгие, а потому $|\mathbb{A}_f| = \infty$. □

Следствие 2.1. *Если решетка $\mathbb{A}_f$ — конечная, то все ее элементы являются однопорожденными $\vee$-неразложимыми подалгебрами.*

Опишем однопорожденные подалгебры произвольной решетки $\mathbb{A}_f$.

Предложение 2.2. *Однопорожденные подалгебры решетки $\mathbb{A}_f$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решетки $\mathbb{A}_f$.*

Доказательство. Очевидно, однопорожденные подалгебры будут компатными элементами решетки $\mathbb{A}_f$. Докажем их $\vee$-неразложимость. Допустим, напротив, что некоторая однопорожденная подалгебра $[g]$ из $\mathbb{A}_f$ $\vee$-разложима: $[g] = A \vee B,\ A, B \subset [g]$. Элементами подалгебр A и B служат многочлены $P(g)$, причем $\deg P(g) \geqslant 2$, если многочлен $P(g)$ без свободного члена. Ясно, что $[g] \neq \mathbb{R}^+$. Поэтому функция g как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид

$$g = a_0 + a_1 g + \ldots + a_n g^n,\ a_n > 0, n \geqslant 1,$$

причем $n \geqslant 2$ в случае $a_0 = 0$. Если $n = 1$, то $|\operatorname{Im} g| = 1$, а при $n \geqslant 2$, согласно правилу знаков Декарта, $|\operatorname{Im} g| \leqslant 2$. В силу предложения 2.1 это означает, что решетка $\mathbb{A}_g$ — конечная, что противоречит следствию 2.1. Значит, все однопорожденные подалгебры из $[f]$ являются $\vee$-неразложимыми элементами решетки $\mathbb{A}_f$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что в решетке $\mathbb{A}_f$ компактность подалгебры равносильна ее конечнопорожденности, и если любая система образующих конечнопорожденной подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$-разложима. □

Условимся называть подалгебру $[g] \subset [f]$ $\vee$-*включенной* в $[f]$, если $[g] \subset [u] \vee [v]$ для некоторых подалгебр $[u]$ и $[v]$ из $[f]$, отличных от $[g]$ и $[f]$, и $\vee$-*невключенной* в $[f]$, если такой пары подалгебр $[u]$ и $[v]$ нет.

Лемма 2.4. *Для любой трех и более значной функции $f \in F(X)$ и функции g такой, что*

$$g = a_n f^n, \quad a_n > 0, n \geqslant 4,$$

или

$$g = a_i f^i + \ldots + a_j f^j, \quad a_i > 0, a_j > 0, i < j,$$

подалгебра $[g]$ $\vee$-включена в $[f]$.

Доказательство. Если $g = a_n f^n, a_n > 0, n \geqslant 4$, то подойдут $[u] = [f^2]$ и $[v] = [f^{n-2}]$, так как подалгебры $[f^2]$ и $[f^{n-2}]$ отличны от $[f]$ и $[f^n]$ по лемме 2.3. Иначе положим

$$u = \frac{1}{2}\left(a_i f^i + \ldots + a_{j-1} f^{j-1}\right) + \frac{2}{3} a_j f^j, \quad v = g - u.$$

Тогда $[g] \subseteq [u] \vee [v]$, так как $g = u + v$, а $[u]$ и $[v]$ отличны от $[f]$ по лемме 2.2. Покажем, что $[u] \neq [g]$. Допустим обратное. Тогда по лемме 2.3 найдется число $k > 0$ такое, что

$$k\left(a_i f^i + \ldots + a_{j-1} f^{j-1}\right) + k a_j f^j = \frac{1}{2}\left(a_i f^i + \ldots + a_{j-1} f^{j-1}\right) + \frac{2}{3} a_j f^j.$$

В последовательности

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) a_i, \ldots, \left(k - \frac{1}{2}\right) a_{j-1}, \left(k - \frac{2}{3}\right) a_j$$

при любом значении k не более одной перемены знака, причем первое и последнее числа не равны нулю одновременно. Поэтому согласно правилу знаков Декарта $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 1$. Противоречие. Значит, $[u] \neq [g]$. Аналогично доказывается, что $[v] \neq [g]$. $\square$

Лемма 2.5. *Для любой функции $f \in F(X), |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 3$ множество $\vee$-невключенных подалгебр в $[f]$ — это в точности $\{[f^2], [f^3]\}$.*

Доказательство. По лемме 2.4 подалгебры $[f^2]$ и $[f^3]$ — единственные претенденты на $\vee$-невключенные подалгебры в $[f]$. Предположим, что $[f^2] \subset [u] \vee [v]$ для некоторых подалгебр $[u]$ и $[v]$ из $[f]$, отличных от $[f]$ и $[f^2]$. Тогда

$$f^2 = a_{00} + a_{10} u + a_{01} v + a_{20} u^2 + a_{11} uv + a_{02} v^2 + \ldots + a_{n0} u^n + \ldots + a_{0n} v^n.$$

В силу леммы 2.2 это равенство означает, что правая часть как многочлен от f имеет вид f^2. Последнее невозможно, так как по лемме 2.3 функции u и v отличны от функций вида $a_1 f$ и $a_2 f^2$. Противоречие. Значит, подалгебра $[f^2]$ не может быть $\vee$-включенной в $[f]$. $\vee$-невключенность подалгебры $[f^3]$ доказывается аналогично. $\square$

Опишем свойства решетки $\mathbb{A}_f$, характерные только для трехзначной функции f с непустым нуль-множеством.

Предложение 2.3. *Для произвольной трех и более значной функции $f \in F(X)$ эквивалентны следующие условия:*

1) $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2, 0\}, r_1 > r_2 > 0$;
2) *любая подалгебра* $[g] \subset [f]$ $\vee$*-включена в* $[f]$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2, 0\}, r_1 > r_2 > 0$. Тогда

$$f^2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} f + \frac{1}{r_1 + r_2} f^3, \quad f^3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} f^2 + \frac{1}{r_1 + r_2} f^4.$$

Справедливость импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) теперь следует из леммы 2.4. Обратная импликация верна в силу леммы 2.5. $\square$

Замечание. Будем говорить, что имеется *решеточная характеризация* решеткой $\mathbb{A}_f$ свойства Pr подалгебр или функций из $[f]$, если существует набор свойств решетки $\mathbb{A}_f$, равносильный Pr. Например, в силу пункта а) предложения 2.1 свойство подалгебры $A \in \mathbb{A}_f$ «быть подалгеброй констант $\mathbb{R}$» имеет решеточную характеризацию в $\mathbb{A}_f$. Важно, что при изоморфизмах решетки свойства, имеющие в ней решеточную характеризацию, сохраняются. Например, предложение 2.2 содержит решеточную характеризацию однопорожденных подалгебр решетки $\mathbb{A}_f$. Поэтому образами однопорожденных подалгебр при изоморфизмах решетки $\mathbb{A}_f$ являются однопорожденные подалгебры. Обратимся еще к одному примеру. В предложении 2.3 решеточная характеризация свойства Pr «функция f, порождающая решетку $\mathbb{A}_f$, трехзначная и обращается в нуль» дана в предположении $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$, а решеточная характеризация неравенства $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$ была дана ранее в предложении 2.1. Поэтому имеется решеточная характеризация наличия или отсутствие свойства Pr для произвольной решетки $\mathbb{A}_f$. Подобная ситуация, когда для решеточной характеризации свойства Pr используется свойство Pr', решеточная характеризация которого была получена ранее, будет встречаться неоднократно. Так, в следующей лемме решеточная характеризация подалгебры $[f^{2n+1}]$ дана в предположении, что множество подалгебр $\{[f^n], [f^{n+1}]\}$ уже охарактеризовано.

Лемма 2.6. *Для множества подалгебр* $\{[f^n],[f^{n+1}]\}, |\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$, *в* $\mathbb{A}_f$ *имеется решеточная характеризация подалгебры* $[f^{2n+1}]$.

Доказательство. Рассмотрим множество подалгебр

$$M = \left\{[g] \subseteq [f] \colon [g] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}], \quad [g] \nsubseteq [f^n], \quad [g] \nsubseteq [f^{n+1}]\right\}. \qquad (2.1)$$

Легко видеть, что $[f^{2n+1}] \in M$ (см. лемму 2.2).

Докажем, что для произвольной подалгебры $[g] \in M$ эквивалентны следующие условия:

1) $[g] = [f^{2n+1}]$;

2) $\{[u],[v]\} = \{[f^n],[f^{n+1}]\} \Longleftrightarrow [g] \subset [u] \vee [v]$, где $[u] \neq [v]$ — подалгебры из $[f^n] \vee [f^{n+1}]$, отличные от $[g]$.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $[g] = [f^{2n+1}]$. По лемме 2.3 $[f^n] \neq [f^{n+1}]$, а потому импликация $\Rightarrow$ в условии 2) верна. Докажем ей обратную. Из леммы 2.2 следует, что функция f^{2n+1} представима многочленом с неотрицательными коэффициентами от функций f^n и f^{n+1} единственным способом: $f^{2n+1} = f^n f^{n+1}$. По условию подалгебра $[f^{2n+1}]$ отлична от $[u]$ и $[v]$ и $[u] \vee [v] \subseteq [f^n] \vee [f^{n+1}]$. Поэтому $f^{2n+1} \notin [u] \vee [v]$, если $\{[u],[v]\} \neq \{[f^n],[f^{n+1}]\}$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Поскольку $g \in [f^n] \vee [f^{n+1}]$, то функция g имеет вид

$$g = a_{ij} f^{ni} f^{(n+1)j} + \ldots + a_{pl} f^{np} f^{(n+1)l}, \quad i, j, \ldots, p, l \in \mathbb{N}_0.$$

Допустим, многочлен в правой части не моном от f. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$ni + (n+1)j < \ldots < np + (n+1)l, \quad a_{ij} > 0, \quad a_{pl} > 0.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2}\left(a_{ij} f^{ni} f^{(n+1)j} + \ldots\right) + \frac{2}{3} a_{pl} f^{np} f^{(n+1)l}, \quad v = g - u.$$

Тогда $[u],[v] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$ и $[g] \subset [u] \vee [v]$, так как $g = u + v$. Соотношения $[g] \neq [u], [g] \neq [v]$ и $[u] \neq [v]$ несложно установить, используя лемму 2.3 и правило знаков Декарта. По лемме 2.2 $\{[u],[v]\} \neq \{[f^n],[f^{n+1}]\}$. Получили противоречие с условием 2). Значит, функция g как многочлен от f обязательно моном от f, то есть $[g] = [f^{ni} f^{(n+1)j}]$. По условию $[g] \nsubseteq [f^n]$ и $[g] \nsubseteq [f^{n+1}]$. Следовательно, $i \neq 0$ и $j \neq 0$. Положим $[u] = [f^{ni}]$, $[v] = [f^{(n+1)j}]$. Очевидно, $[g] \subset [u] \vee [v]$ и $[u],[v] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$. По лемме 2.3 подалгебра $[g]$ отлична от $[u]$ и $[v]$. Кроме того, $[u] \neq [v]$, так как тогда имели бы $[g] \subseteq [u] \subseteq [f^n]$. Далее, если $i \geqslant 2$ или $j \geqslant 2$, то $\{[u],[v]\} \neq \{[f^n],[f^{n+1}]\}$ по лемме 2.3, и условие 2) нарушается. Значит, $i = j = 1$, то есть $[g] = [f^{2n+1}]$. □

Предложение 2.4. *Для любой подалгебры* $[f], |\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \geqslant 3$ *и показателя* $n \in \mathbb{N}$ *подалгебра* $[f^n]$ *имеет решеточную характеризацию в* $\mathbb{A}_f$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n. Базой служат случаи $n = 2$ и $n = 3$. Разберем их. Для этого воспользуемся леммой 2.5 и рассмотрим множество подалгебр $\{[f^2], [f^3]\}$. Опишем свойства решетки $\mathbb{A}_f$, позволяющие различить подалгебры $[f^2]$ и $[f^3]$. С этой целью применим лемму 2.5 к решеткам $\mathbb{A}_{f^2}$ и $\mathbb{A}_{f^3}$ и рассмотрим множества подалгебр $\{[f^4], [f^6]\}$ и $\{[f^6], [f^9]\}$. Их симметрическая разность $\{[f^4], [f^9]\}$. Применим лемму 2.6 для $n = 2$ и рассмотрим подалгебру $[f^5]$. Очевидно, $[f^9] \subset [f^4] \vee [f^5]$, но $[f^4] \not\subseteq [f^9] \vee [f^5]$. Таким образом, мы можем отличить подалгебру $[f^4]$ от $[f^9]$, а, значит, и $[f^2]$ от $[f^3]$.

Пусть имеется характеризация подалгебр $[f^n]$ для всех $n < k, k \geqslant 4$. Если k — нечетное, то подалгебра $[f^k]$ может быть получена применением леммы 2.6 для $n = (k-1)/2$. В случае четного k рассмотрим подалгебру $[f^{k/2}]$. Ее «квадрат» дает $[f^k]$. □

Лемма 2.7. *Для любой подалгебры* $[f]$ *в* $\mathbb{A}_f$ *имеется решеточная характеризация подалгебр вида* $[f + r], r \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Если $f \in \mathbb{R}^+$ или $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2\}, r_1 > r_2 > 0$, то согласно предложению 2.1 $[f+r] = [f]$ для всех $r \in \mathbb{P}$, а в случае $\operatorname{Im} f = \{r_1, 0\}, r_1 > 0$ решетка $\mathbb{A}_f$ — трехэлементная цепь: $\mathbb{R}^+ \subset [f+1] \subset [f]$, причем $[f + r] = [f + 1]$ для всех $r \in \mathbb{P}$.

Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2, 0\}, r_1 > r_2 > 0$. Воспользуемся предложением 2.3 и рассмотрим множество подалгебр

$$M = \{[g] \subset [f] \colon \mathrm{Z}(g) \neq \varnothing\}.$$

Докажем, что любая подалгебра $[h] \subset [f]$ такая, что $[h] \not\subseteq [g]$ для любой $[g] \in M$, имеет вид $[f + r], r \in \mathbb{P}$. Действительно, если

$$h = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad a_0 > 0, a_n > 0, n \geqslant 2,$$

то $[h] \subseteq [g]$ для $g = a_1 f + \ldots + a_n f^n$, и $[g] \in M$, так как $\mathrm{Z}(g) = \mathrm{Z}(f)$ и $[g] \neq [f]$ по лемме 2.3. Кроме того, включение $[f + r] \subseteq [g] \in M, r \in \mathbb{P}$ влечет

$$f + r = b_0 + b_1 f + \ldots + b_m f^m, \quad b_m > 0, m \geqslant 2.$$

Поскольку $0 \in \operatorname{Im} f$, то $r = b_0$. Откуда $f = b_1 f + \ldots + b_m f^m$, что невозможно по лемме 2.2.

Пусть, наконец, $|\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \geqslant 3$. Обозначим через M множество подалгебр $[g] \subseteq [f]$ таких, что $[g] \nsubseteq [f^2] \vee [f^3]$ и $[g^2] \nsubseteq [f^2] \vee [f^3]$ (см. предложение 2.4). Тогда для любой подалгебры $[g] \in M$

$$g = a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m$$

коэффициенты a_0 и a_1 положительные. Покажем, что $[f+r] \in M$ для всех $r \in \mathbb{P}$. Допустим, $[f+r] \subseteq [f^2] \vee [f^3]$ для некоторого $r \in \mathbb{P}$. Тогда

$$f + r = b_0 + b_2 f^2 + \ldots + b_k f^k, \quad b_k > 0, k \geqslant 2.$$

В последовательности $b_0 - r, -1, b_2, \ldots, b_k$ не более двух перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Невозможность включения $[(f+r)^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3]$ доказывается аналогично.

Далее, обозначим через M' множество всех подалгеб $[g]$ из M таких, что $[g] \subset [h]$ для некоторой подалгебры

$$[h] \subset [f], \quad [h^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3]. \tag{2.2}$$

Отметим, что если $[g] \in M$ и

$$g = a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m, \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_m > 0, m \geqslant 2,$$

то $[g] \in M'$, так как за $[h]$ можно взять подалгебру $[a_1 f + \ldots + a_m f^m]$.

Докажем, что $[f+r] \notin M'$ для всех $r \in \mathbb{P}$. Пусть все же для некоторого r нашлась подалгебра $[h] \subset [f]$ для которой условие (2.2) выполняется. Если функция h как многочлен от f имеет степень выше первой, то

$$f + r = c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + \ldots + c_k f^k, \quad c_k > 0, k \geqslant 2.$$

В последовательности $c_0 - r, c_1 - 1, c_2, \ldots, c_k$ не более двух перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Значит, $h = b_0 + b_1 f$, $b_0 > 0, b_1 > 0$. Откуда ввиду $[h^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3]$, получаем:

$$b_0^2 + 2b_0 b_1 f + b_1^2 f^2 = d_0 + d_2 f^2 + \ldots + d_l f^l, \quad d_l > 0, l \geqslant 2.$$

В последовательности $d_0 - b_0^2, -2b_0 b_1, d_2 - b_1^2, d_3, \ldots, d_l$ не более двух перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Значит, множество подалгебр вида $[f+r], r \in \mathbb{P}$ это в точности $M\backslash M'$. $\square$

Следующая лемма показывает, что если функция f — трех и более значная, то на множестве подалгебр вида $[f+r], r \in \mathbb{R}^+$ включение $\subset$ задает порядок, согласованный с естественным порядком на $\mathbb{R}^+$.

Лемма 2.8. *Для любой трех и более значной функции $f \in F(X)$, подалгебры $[g] \subseteq [f], [g] \neq \mathbb{R}^+$, и чисел $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$*

$$[g+r_1] \subset [g+r_2] \Longleftrightarrow r_1 > r_2.$$

Доказательство. Пусть $r_1 > r_2$. Тогда $g + r_1 = (g+r_2) + (r_1 - r_2)$, а потому $[g+r_1] \subseteq [g+r_2]$. По лемме 2.2 $[g+r_1] \neq [g+r_2]$. Значит, $[g+r_1] \subset [g+r_2]$.

Обратное утверждение очевидным образом следует из доказанного. $\square$

Предложение 2.5. *Для любой функции $f \in F(X)$, $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 3$ в $\mathbb{A}_f$ имеется решеточная характеризация следующих видов подалгебр:*

1) $[a_0 + a_1 f]$; 2) $[a_0 + a_2 f^2]$; 3) $[a_1 f + a_2 f^2]$; 4) $[a_0 + a_1 f + a_2 f^2]$.

Здесь $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}$.

Доказательство. В силу предложения 2.4 и леммы 2.7 достаточно получить характеризацию подалгебр третьего типа.

Пусть $[g] \subset [f]$. Докажем эквивалентность следующих утверждений:

1) $[g] = [a_1 f + a_2 f^2],\ a_1, a_2 \in \mathbb{P}$;

2) выполняются условия:

а) $[g] \neq [h+r]$ для любых $[h] \subseteq [f]$ и $r \in \mathbb{P}$;

б) $[g + r_1] = [(f+r_2)^2]$ для некоторых $r_1, r_2 \in \mathbb{P}$.

В самом деле, пусть $[g] = [a_1 f + a_2 f^2]$. Тогда по лемме 2.3

$$g = (a_1 f + a_2 f^2)k, \quad k \in \mathbb{P}.$$

Условие 2.б) выполняется, поскольку

$$\left[g + \frac{a_1^2}{4a_2}k\right] = \left[\left(f + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right].$$

Докажем 2.а). Рассуждая от противного, получаем:

$$a_1 f + a_2 f^2 = b_0 + b_1 f + \ldots + b_m f^m, \quad b_0 > 0.$$

В последовательности $b_0, b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3, \ldots, b_m$ не более двух перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана.

Обратно, пусть $g = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n$. Если $a_0 > 0$, то $[g] = [h + a_0/2]$, где $h = a_0/2 + a_1 f + \ldots + a_n f^n$. Противоречие с условием 2.а). Значит, $a_0 = 0$. Обратимся к условию 2.б). По лемме 2.3

$$r_1 + a_1 f + \ldots + a_n f^n = k(r_2^2 + 2r_2 f + f^2)$$

для некоторых $r_1, r_2, k \in \mathbb{P}$. Если $r_1 > kr_2^2$, то последовательность $r_1 - kr_2^2, a_1 - 2kr_2, a_2 - k, a_3, \ldots, a_n$ — ненулевая и в ней не более двух перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Случай $r_1 < kr_2^2$ ведет к противоречию с условием 2.а), так как тогда $[g] = [(kr_2^2 - r_1) + (2kr_2 f + kf^2)]$. Значит, $r_1 = kr_2^2$. Если последовательность $a_1 - 2kr_2, a_2 - k, a_3, \ldots, a_n$ — ненулевая, то $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 2$ согласно правилу знаков Декарта. Противоречие. Поэтому $a_1 = 2kr_2, a_2 = k, a_3 = \ldots = a_n = 0$. Откуда $[g] = [2r_2 f + f^2]$. □

Обозначим через $M_{f,l,k}$ множество всех подалгебр $[g] \subseteq [f]$ таких, что

$$[g] = \left[\sum_{i=1}^{l} a_{k+2(i-1)} f^{k+2(i-1)}\right], \quad a_{k+2(i-1)} \in \mathbb{P}.$$

Например, $[f + f^3] \in M_{f,2,1}$.

Лемма 2.9. *Для любой трех и более значной функции $f \in F(X)$ такой, что*

$$|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l - 1, \quad l \geqslant 2, \quad k \geqslant 2l - 1, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

в $\mathbb{A}_f$ имеется решеточная характеризация множества $M_{f,l,k}$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Для произвольной подалгебры $[g] \subseteq [f]$ докажем равносильность следующих утверждений:

1) $[g] \in M_{f,l,k}$;

2) выполняются условия:

а) $[g] \notin M_{f,l-1,k+2}$;

б) $[g] \subseteq [f^k] \vee [u]$ для некоторой подалгебры $[u] \in M_{f,l-1,k+2}$;

в) $[g] \nsubseteq [f^k] \vee [f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^m]$ для любого $m \geqslant 2k$;

г) $[g] \nsubseteq [f^k] \vee [h]$ для любой подалгебры $[h] \notin M_{f,l-1,k+2}$ такой, что

$$[h] \subseteq [v] \vee [f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^m].$$

для некоторых $m \geqslant 2k, [v] \in M_{f,l-1,k+2}$.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $[g] \in M_{f,l,k}$. Тогда по лемме 2.3

$$g = a_k f^k + a_{k+2} f^{k+2} + \ldots + a_{k+2(l-1)} f^{k+2(l-1)},$$

где $a_k, a_{k+2}, \ldots, a_{k+2(l-1)} \in \mathbb{P}$.

а) Допустим, $[g] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$. Тогда по лемме 2.3

$$g = b_{k+2}f^{k+2} + b_{k+4}f^{k+4} \ldots + b_{k+2(l-1)}f^{k+2(l-1)},$$

где $b_{k+2}, b_{k+4}, \ldots, b_{k+2(l-1)} \in \mathbb{P}$. В последовательности

$$a_k, a_{k+2} - b_{k+2}, \ldots, a_{k+2(l-1)} - b_{k+2(l-1)}$$

не более l перемен знака. Поэтому $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant l$ в силу правила знаков Декарта. По условию $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l-1$. Следовательно, $l \geqslant 2l-1$, что невозможно, так как $l \geqslant 2$. Значит, $[g] \notin M_{f,\,l-1,\,k+1}$.

б) Положим $u = g - a_k f^k$. Тогда $[u] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$ и $[g] \subseteq [f^k] \vee [u]$.

в) Рассуждая от противного, получаем:

$$g = b_0 + b_k f^k + b_{2k} f^{2k} + b_{2k+1} f^{2k+1} + \ldots + b_n f^n, \quad n \geqslant 2k.$$

По условию $k \geqslant 2l-1$. Откуда $2k > k + 2(l-1)$. В последовательности

$$b_0, b_k - a_k, -a_{k+2}, \ldots, -a_{k+2(l-1)}, b_{2k}, b_{2k+1}, \ldots, b_n$$

не более двух перемен знака. Поэтому $2 \geqslant |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}|$ в силу правила знаков Декарта. По условию $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l-1$. Откуда $2 \geqslant 2l-1$, что невозможно, так как $l \geqslant 2$.

г) Допустим, $[g] \subseteq [f^k] \vee [h]$ для некоторой подалгебры $[h]$ такой, что

$$[h] \notin M_{f,\,l-1,\,k+2}, \quad [h] \subseteq [v] \vee [f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^m],$$

для некоторых $m \geqslant 2k$ и $[v] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$. Тогда

$$h = b_0 + \sum_{i=1}^{l-1} b_{k+2i} f^{k+2i} + \sum_{i=0}^{n-2k} b_{2k+i} f^{2k+i}$$

для некоторого $n \geqslant 2k$. Докажем, что

$$b_{k+2} > 0, b_{k+4} > 0, \ldots, b_{k+2(l-1)} > 0, \max\{b_0, b_{2k}, b_{2k+1}, \ldots, b_n\} > 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что все функции вида $f^{2k+i}v^j$ и v^t, где $i, j, t \in \mathbb{N}_0, t \geqslant 2$, принадлежат подалгебрам вида $[f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^m]$ для подходящих m. Поэтому представление функции h в виде многочлена с неотрицательными коэфициентами от v и степеней функции f не ниже $2k$ обязательно содержит ненулевой моном от v первой степени, так как в противном случае $[h] \subseteq [f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^m]$, а, значит, и

$[g] \subseteq [f^k] \vee [f^{2k}] \vee \ldots \vee [f^m]$, что противоречит условию в). Следовательно, коэффициенты $b_{k+2}, \ldots, b_{k+2(l-1)}$ — положительные числа. Далее, равенство

$$\max\{b_0, b_{2k}, b_{2k+1}, \ldots, b_n\} = 0$$

означало бы $[h] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$, что невозможно.

Поскольку $[g] \subseteq [f^k] \vee [h]$, то, учитывая соотношения (2.3), имеем:

$$g = c_0 + c_k f^k + \sum_{i=1}^{l-1} c_{k+2i} f^{k+2i} + \sum_{i=0}^{t-2k} c_{2k+i} f^{2k+i},$$

где $t \geqslant 2k$. В силу в) $[g] \nsubseteq [f^k]$. Поэтому в представлении функции g многочленом от f^k и h обязательно имеются ненулевые слагаемые вида $(f^k)^i h^j$, $i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$. Откуда, учитывая соотношения (2.3), получаем

$$\max\{c_0, c_{2k}, c_{2k+1}, \ldots, c_t\} > 0.$$

Значит, в последовательности

$$c_0, c_k - a_k, c_{k+2} - a_{k+2}, \ldots, c_{k+2(l-1)} - a_{k+2(l-1)}, c_{2k}, c_{2k+1}, \ldots, c_t$$

не все члены равны нулю. Кроме того, в ней не более l и $l+1$ перемен знака для четного и нечетного l соответственно. Используя правило знаков Декарта и неравенство $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geq 2l-1$ из условия, получаем:

$$2l - 1 \leqslant |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant l$$

для четного l, и

$$2l - 1 \leqslant |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant l + 1,$$

когда l нечетно. Противоречие с $l \geqslant 2$. Значит, такой подалгебры $[h]$ не найдется и условие г) выполняется.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть для подалгебры $[g] \subseteq [f]$ условия а)–г) выполнены. Согласно условию б) $[g] \subseteq [f^k] \vee [u]$, где $[u] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$. Поэтому

$$g = a_0 + \sum_{i=0}^{l-1} a_{k+2i} f^{k+2i} + \sum_{i=0}^{n-2k} c_{2k+i} f^{2k+i},$$

где $n \geqslant 2k$. Заметим, что функция вида $(f^k)^i u^j, i, j \in \mathbb{N}_0$ принадлежит подалгебре $[f^k] \vee [f^{2k}] \vee \ldots \vee [f^m]$ для некоторого $m \geqslant 2k$ для любых i и j, кроме быть может случая $i = 0, j = 1$. Поэтому представление функции g многочленом от f^k и u обязательно содержит ненулевой моном от

u первой степени. Иначе противоречие с условием в). Следовательно, коэффициенты $a_{k+2}, a_{k+4}, \ldots, a_{k+2(l-1)}$ — положительны. Далее, условие а) означает, что среди коэффициентов $a_0, a_k, a_{2k}, a_{2k+1}, \ldots, a_n$ также есть положительные. Допустим, это не a_k. Положим

$$v = \sum_{i=1}^{l-1} a_{k+2i} f^{k+2i}, \quad h = a_0 + v + \sum_{i=0}^{n-2k} c_{2k+i} f^{2k+i}.$$

Тогда

$$[v] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}, \quad [h] \subseteq [v] \vee [f^{2k}] \vee [f^{2k+1}] \vee \ldots \vee [f^n].$$

Если $[h] \in M_{f,\,l-1,\,k+2}$, то по лемме 2.3

$$h = \sum_{i=1}^{l-1} b_{k+2i} f^{k+2i}, \quad b_{k+2i} \in \mathbb{P}.$$

Однако, в последовательности

$$a_0, a_{k+2} - b_{k+2}, \ldots, a_{k+2(l-1)} - b_{k+2(l-1)}, a_{2k}, a_{2k+1}, \ldots, a_n$$

не более l перемен знака. Поэтому $l \geqslant |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}|$ в силу правила знаков Декарта. По условию $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l - 1$. Следовательно, $l \geqslant 2l - 1$, что противоречит $l \geqslant 2$. Значит, $[h] \notin M_{f,\,l-1,\,k+2}$. Кроме того, $[g] \subseteq [f^k] \vee [h]$. Получили противоречие с условием г). Следовательно,

$$a_0 = a_{2k} = a_{2k+1} = \ldots = a_n = 0, \quad a_k > 0,$$

то есть $[g] \in M_{f,\,l,\,k}$. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) доказана.

Теперь утверждение леммы может быть доказано индукцией по l.

База индукции: $l = 2$. Предложение 2.4 выделяет в $\mathbb{A}_f$ множество подалгебр $M_{f,\,1,\,k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тем самым эквиваленция 1) $\Longleftrightarrow$ 2) доставляет решеточную характеризацию множества подалгебр $M_{f,\,2,\,k}$ для любого $k \geqslant 3$.

Индукционное предположение: пусть имеется характеризация множества подалгебр

$$M_{f,\,l',\,k'}, \quad |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l' - 1, k' \geqslant 2l' - 1,$$

для всех $l', 2 \leqslant l' \leqslant l - 1$.

Доказательство индукционного шага: пусть

$$|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 2l - 1, k \geqslant 2l - 1, l \geqslant 3.$$

Тогда

$$|\operatorname{Im} f\backslash\{0\}| \geqslant 2(l-1)-1, k+2 \geqslant 2(l-1)-1, l-1 \geqslant 2,$$

а потому согласно индукционному предположению в $\mathbb{A}_f$ имеется характеризация множества подалгебр $M_{f,\,l-1,\,k+2}$. Для выделения в $\mathbb{A}_f$ множества подалгебр $M_{f,\,l-1,\,k+2}$ применим условие 2) установленной ранее эквиваленции 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Индукционный шаг, а значит, и лемма доказаны. □

Предложение 2.6. *Для любой функции $f \in F(X)$ свойствами решетки $\mathbb{A}_f$ можно установить, является ли функция f бесконечнозначной или нет, а для конечнозначной функции f найти мощность множества ее значений и установить обращается ли f в нуль на X.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} f\backslash\{0\} = \{r_1, \ldots, r_n\}$, $r_1 > \ldots > r_n$. Тогда утверждение предложения 2.6 для $n = 0, n = 1$ и $n = 2, 0 \notin \operatorname{Im} f$ верно в силу предложения 2.1, а для $n = 2, 0 \in \operatorname{Im} f$ — предложения 2.3.

Пусть $n \geqslant m, m \geqslant 3$.

1) m — нечетное. Воспользуемся леммой 2.9 и рассмотрим множества подалгебр $M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m+1}$ и $M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m}$. Докажем, что

$$n = m \Longleftrightarrow M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m+1} \cap M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m} \neq \varnothing.$$

Пусть $n = m$. Рассмотрим функцию

$$g = f^m(f-r_1)\cdot\ldots\cdot(f-r_m).$$

Тогда $g = P(f) - Q(f)$, где

$$P(f) = \sigma_{m-1}f^{m+1} + \ldots + \sigma_2 f^{2m-2} + f^{2m},$$
$$Q(f) = \sigma_m f^m + \ldots + \sigma_3 f^{2m-3} + \sigma_1 f^{2m-1}.$$

Здесь через $\sigma_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ мы обозначили элементарный симметрический многочлен от значений $r_1, \ldots, r_m$. Очевидно,

$$[P(f)] \in M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m+1}, \quad [Q(f)] \in M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m},$$

и многочлены $P(f)$ и $Q(f)$ задают одну и ту же функцию на X, так как функция g тождественно равна нулю на X. Поэтому

$$[P(f)], [Q(f)] \in M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m+1} \cap M_{f,\,\frac{m+1}{2},\,m}.$$

Обратно, пусть

$$M_{f,\,\frac{m+1}{2},m+1} \cap M_{f,\,\frac{m+1}{2},m} \neq \varnothing.$$

Тогда, учитывая лемму 2.3, получаем:

$$a_{m+1}f^{m+1}+a_{m+3}f^{m+3}+\ldots+a_{2m}f^{2m} = a_m f^m+a_{m+2}f^{m+2}+\ldots+a_{2m-1}f^{2m-1},$$

где все коэффициенты $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{2m}$ — положительны. В последовательности

$$a_m, -a_{m+1}, a_{m+2}, -a_{m+3}, \ldots, a_{2m-1}, -a_{2m}$$

ровно m перемен знака. Поэтому $n \leqslant m$ в силу правила знаков Декарта. По условию $n \geqslant m$. Значит, $n = m$.

2) m — четное. Воспользуемся предложением 2.4, леммой 2.9 и рассмотрим множества подалгебр $M_2 = \{[h]\colon [h] \subseteq [f^2]\}$ и $M_{f,\,\frac{m}{2},m+1}$. Докажем, что

$$n = m \Longleftrightarrow M_2 \cap M_{f,\,\frac{m}{2},m+1} \neq \varnothing.$$

Пусть $n = m$. Рассмотрим функцию

$$g = f^m(f-r_1)\cdot\ldots\cdot(f-r_m).$$

Раскрыв скобки, получим $g = P(f) - Q(f)$, где

$$P(f) = \sigma_m f^m + \ldots + \sigma_2 f^{2m-2} + f^{2m},$$
$$Q(f) = \sigma_{m-1} f^{m+1} + \ldots + \sigma_3 f^{2m-3} + \sigma_1 f^{2m-1}.$$

Очевидно,

$$[P(f)] \in M_2, \quad [Q(f)] \in M_{f,\,\frac{m}{2},m+1},$$

и многочлены $P(f)$ и $Q(f)$ задают одну и ту же функцию на X, так как функция g тождественно равна нулю на X. Поэтому

$$[P(f)], [Q(f)] \in M_2 \cap M_{f,\,\frac{m}{2},m+1}.$$

Обратно, пусть

$$M_2 \cap M_{f,\,\frac{m}{2},m+1} \neq \varnothing.$$

Тогда, учитывая лемму 2.3, получаем:

$$a_{m+1}f^{m+1} + a_{m+3}f^{m+3} + \ldots + a_{2m-1}f^{2m-1} = a_0 + a_2 f^2 + \ldots + a_{2k}f^{2k},$$

где все коэффициенты $a_{m+1}, a_{m+3}, \ldots, a_{2m-1}$ — положительны, а в правой части равенства все мономы имеют четную степень. В последовательности

$$a_0, \ldots, a_m, -a_{m+1}, a_{m+2}, -a_{m+3}, \ldots, a_{2m-2}, -a_{2m-1}, a_{2m}, \ldots, a_{2k}$$

не более m перемен знака. Поэтому $n \leqslant m$ в силу правила знаков Декарта. По условию $n \geqslant m$. Значит, $n = m$.

Очевидно,

$$|\operatorname{Im} f| = \infty \Longleftrightarrow |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant m$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для того чтобы определить, обращается ли конечная трех и более значная функция f в нуль на X, воспользуемся леммой 2.7 и рассмотрим произвольную подалгебру $[f + r], r \in \mathbb{P}$. Если $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| = |\operatorname{Im}(f + r)|$, то $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$, иначе $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$. □

3. Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f, |\operatorname{Im} f| \leqslant 3$

Выясним, каковы должны быть функции f и g, чтобы решетки $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ были изоморфны. Для случая $|\operatorname{Im} f| \leqslant 2$ ответ содержит предложение 2.1. Если $|\operatorname{Im} f| = \infty$, то согласно предложению 2.6 изоморфизм решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ влечет бесконечнозначность функции g. Верное и обратное: если функции f и g — бесконечнозначные, то решетки $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ будут изоморфными, так как однопорожденные подалгебры $[f]$ и $[g]$ изоморфны полукольцу многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Случаи $|\operatorname{Im} f| = n, n \geqslant 3$ гораздо сложнее. При этом исключительная роль принадлежит случаю $n = 3$, так как случай $n \geqslant 4$ может быть сведен к $n = 3$.

Итак, пусть $|\operatorname{Im} f| = 3$. Для описания изоморфизмов решетки $\mathbb{A}_f$ помимо результатов, полученных ранее, потребуется несколько дополнительных утверждений.

Предложение 3.7. *Для произвольных трехзначных функций*

$$f = (1, a, b), \quad 1 > a > b > 0$$

и

$$g = (1, c, d) \in [f], \quad 1 > c > d > 0$$

верны следующие утверждения:

1) *существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для каждого натурального $n \geqslant n_0$ найдется показатель $m_n \in \mathbb{N}$ для которого*

$$\frac{1 - a^{m_n}}{1 - b^{m_n}} \leqslant \frac{1 - c^n}{1 - d^n} < \frac{1 - a^{m_n + 1}}{1 - b^{m_n + 1}}; \tag{3.4}$$

2) *имеется решеточная характеризация последовательности (m_n) в $\mathbb{A}_f$;*

3) *если $c = a^{\alpha}$, то*

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{m_n}{n}.$$

Доказательство. 1) Достаточно показать, что

$$\frac{1-u^n}{1-v^n} < \frac{1-u^{n+1}}{1-v^{n+1}} \tag{3.5}$$

для любых $u, v \in \mathbb{P}, 1 > u > v > 0, n \in \mathbb{N}$. Заметим, что неравенство (3.5) равносильно

$$\frac{1-u}{1-v} \cdot \frac{1+u+\ldots+u^{n-1}}{1+v+\ldots+v^{n-1}} < \frac{1-u}{1-v} \cdot \frac{1+u+\ldots+u^n}{1+v+\ldots+v^n},$$

что, в свою очередь, равносильно

$$(1+u+\ldots+u^{n-1})v^n < (1+v+\ldots+v^{n-1})u^n.$$

Последнее верно, так как ввиду $u > v > 0$

$$u^k v^n < v^k u^n \text{ для всех } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

2) Для дальнейших рассуждений будет удобно следующее соглашение: произвольной подалгебре $[q^n]$ такой, что

$$[q^n] \subseteq [f], \quad q = (1, y, x), 1 > y > x > 0,$$

поставим в соответствие точку Q_n с декартовыми координатами $(x^n; y^n)$.

Заметим, что точка G_n попадает в треугольник (возможно, на границу) с вершинами в точках $F_0(1;1)$, $F_{m_n}(b^{m_n}; a^{m_n})$ и $F_{2m_n}(b^{2m_n}; a^{2m_n})$ тогда и только тогда, когда $[g^n] = [a_0 + a_1 f^{m_n} + a_2 f^{2m_n}]$ для подходящих $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ (это равенство имеет решеточную характеризацию в силу предложений 2.4 и 2.5). Далее, двойное неравенство (3.4) равносильно существованию на отрезке F_0G_n точки $H_n \neq F_0$ такой, что все точки отрезка F_0H_n попадают в треугольник $F_0F_{m_n}F_{2m_n}$, но не лежат в треугольнике $F_0F_{m_n+1}F_{2(m_n+1)}$ (это следует из геометрического смысла частного $\dfrac{1-y^n}{1-x^n}$ — тангенс угла между лучами, выходящими из точки F_0, к точкам с координатами $(0;1)$ и $(x^n; y^n)$). Точке H_n соответствует подалгебра $[g^n + r]$, а точкам отрезка F_0H_n — подалгебры $[g^n + r'], r' \geqslant r$. Описанные условия также имеют решеточную характеризацию в силу предложения 2.4, леммы 2.7 и сделанных выше замечаний.

Таким образом, поиск значений n_0 и $m_n, n \geqslant n_0$ может быть таким: для текущего номера n проверяем, существуют ли числа r и m_n такие, что подалгебры $[g^n + r'], r' \geqslant r$ имеют вид $[a_0 + a_1 f^{m_n} + a_2 f^{2m_n}]$, но отличны от подалгебр $[b_0 + b_1 f^{m_n+1} + b_2 f^{2(m_n+1)}]$. Первый номер n для которого такие r и m_n найдутся и будет n_0.

3) Пусть

$$\alpha = \log_a c, \quad e = d^{1/\alpha}.$$

Тогда

$$c = a^{\alpha}, \quad d = e^{\alpha}.$$

Непосредственными выкладками убеждаемся, что двойное неравенство (3.4) равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} a^{\alpha n - m_n}\left(1 - \left(\dfrac{e}{a}\right)^{\alpha n}\right) \leqslant 1 + a^{\alpha n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{m_n} - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{m_n} - e^{\alpha n} \\ 1 + a^{\alpha n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{m_n+1} - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{m_n+1} - e^{\alpha n} < a^{\alpha n - m_n - 1}\left(1 - \left(\dfrac{e}{a}\right)^{\alpha n}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Допустим, для любого номера n' существует номер $n > n'$ такой, что $\alpha n - m_n \leqslant -\varepsilon$. Тогда

$$a^{\alpha n - m_n} \geqslant a^{-\varepsilon},$$

а потому

$$a^{\alpha n - m_n}\left(1 - \left(\frac{e}{a}\right)^{\alpha n}\right) \geqslant a^{-\varepsilon}\left(1 - \left(\frac{e}{a}\right)^{\alpha n}\right).$$

Учитывая, что $e < a$ и $b < a < 1$, а числа m_n и αn при $n \to +\infty$ становятся сколь угодно большими, получаем:

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + a^{\alpha n}\left(\frac{b}{a}\right)^{m_n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_n} - e^{\alpha n} = 1 \geqslant a^{-\varepsilon} > 1.$$

Противоречие. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1 такой, что $\alpha n - m_n > -\varepsilon$ для всех $n \geqslant n_1$.

Аналогичными рассуждениями, используя второе неравенство системы (3.6), получаем: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_2 такой, что $\alpha n - (m_n + 1) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_2$.

При $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ имеем:

$$-\frac{\varepsilon}{n} < \alpha - \frac{m_n}{n} < \frac{\varepsilon + 1}{n}.$$

Видим, что последовательность (m_n/n) при $n \to +\infty$ имеет предел и он равен α. □

Лемма 3.10. *Для любой подалгебры*

$$[g] = [f^{2n} + a_{2n-2} f^{2n-2}], \quad a_{2n-2} > 0, n \in \mathbb{N}$$

в $\mathbb{A}_f, |\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \geqslant 3$ *имеется решеточная характеризация подалгебры* $[f^2 + a_{2n-2}]$.

Доказательство. Очевидно, $[g] \subseteq [f^2 + a_{2n-2}] \vee [f^{2n-2}]$. Докажем, что $[g] \nsubseteq [f^2 + r] \vee [f^{2n-2}]$ для любого числа $r > a_{2n-2}$. Заметим, что каждая функция подалгебры $[f^2 + r] \vee [f^{2n-2}]$ реализуется многочленом от f^2, причем равенство функций $a_{2n-2}f^{2n-2} + f^{2n}$ и $b_0 + b_2 f^2 + \ldots + b_{2m} f^{2m}$ равносильно тому, что $b_{2n-2} = a_{2n-2}, b_{2n} = 1$ и $b_i = 0$ при $i \notin \{2n-2, 2n\}$. Это следует из того, что в последовательности

$$b_0, b_2, \ldots, b_{2n-4}, b_{2n-2} - a_{2n-2}, b_{2n} - 1, b_{2n+2}, \ldots, b_{2m}$$

не более двух перемен знака. Поэтому если в ней имелись бы ненулевые числа, то в силу правила знаков Декарта $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 2$, что противоречит условию леммы. Отсюда следует, что функция $a_{2n-2}f^{2n-2} + f^{2n}$, будучи многочленом с неотрицательными коэффициентами от $f^2 + r$ и f^{2n-2}, имеет вид $(f^2 + r)f^{2n-2} + c_{2n-2}f^{2n-2}$, причем $r + c_{2n-2} = a_{2n-2}$. Последнее невозможно, так как $r > a_{2n-2}$. Значит, подалгебра $[f^2 + r']$ такая, что $[g] \subseteq [f^2 + r'] \vee [f^{2n-2}]$, но $[g] \nsubseteq [f^2 + r] \vee [f^{2n-2}]$ для любого числа $r > r'$, будет в точности $[f^2 + a_{2n-2}]$. □

Предложение 3.8. *Для произвольной трехзначной функции*

$$f = (1, a, b), \quad 1 > a > b > 0,$$

подалгебры

$$[f^2 + a + b + ab] = \left[\left(1, \frac{a+b}{1+b}, \frac{a+b}{1+a}\right)\right]$$

и

$$[f^2 + 2\sqrt{a} f] = \left[\left(1, \frac{a^2 + 2\sqrt{a}a}{1 + 2\sqrt{a}}, \frac{b^2 + 2\sqrt{a}b}{1 + 2\sqrt{a}}\right)\right]$$

имеют решеточную характеризацию в $\mathbb{A}_f$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.9 и рассмотрим множества подалгебр $M_{f,2,3}$ и $M_{f,2,4}$. Пусть $[g] \in M_{f,2,3} \cap M_{f,2,4}$. Тогда, учитывая лемму 2.3, получаем:

$$g = a_3 f^3 + a_5 f^5 = a_4 f^4 + a_6 f^6,$$

где $a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{P}$. По условию функция f не обращается в нуль. Поэтому

$$a_3 - a_4 f + a_5 f^2 - a_6 f^3 = 0.$$

По формулам Виета:

$$a_3 = aba_6, \quad a_4 = (a + b + ab)a_6, \quad a_5 = (1 + a + b)a_6.$$

Следовательно,

$$[g] = [(a+b+ab)f^4 + f^6] = [abf^3 + (1+a+b)f^5].$$

Применив к подалгебре $[g] = [(a+b+ab)f^4 + f^6]$ лемму 3.10 для $n = 3$, получим подалгебру $[f^2 + a + b + ab]$.

Для характеризации подалгебры $[f^2 + 2\sqrt{a}f]$ воспользуемся леммой 2.7, предложением 3.7 и рассмотрим подалгебру $[f + r], r \in \mathbb{R}^+$ такую, что

$$[f+r] = [(1, \sqrt{a}, d)], \quad 1 > \sqrt{a} > d.$$

По лемме 2.3 $(a+r)/(1+r) = \sqrt{a}$. Откуда $r = \sqrt{a}$. Воспользуемся леммой 2.7, предложениями 2.4 и 2.5 и рассмотрим подалгебру

$$[g] = [a_2 f^2 + a_1 f]$$

такую, что

$$[a_2 f^2 + a_1 f + r] = [(f + \sqrt{a})^2]$$

для некоторого $r \in \mathbb{P}$. Очевидно, подходит $[g] = [f^2 + 2\sqrt{a}f]$.

Докажем единственность $[g]$. Пусть

$$[a_2 f^2 + a_1 f + r] = [f^2 + 2\sqrt{a}f + a].$$

Тогда в силу леммы 2.3 для некоторого числа $k > 0$

$$k(a_2 f^2 + a_1 f + r) = f^2 + 2\sqrt{a}f + a.$$

В последовательности

$$1 - ka_2, 2\sqrt{a} - ka_1, a - kr$$

не более двух перемен знака. Поэтому если бы в ней имелись ненулевые числа, то $|\operatorname{Im} f \backslash \{0\}| \leqslant 2$ в силу правила знаков Декарта. Противоречие. Значит,

$$ka_2 = 1, \quad ka_1 = 2\sqrt{a}, \quad kr = a,$$

то есть $[a_2 f^2 + a_1 f] = [f^2 + 2\sqrt{a}f]$. □

Лемма 3.11. *Уравнение*

$$\frac{x + 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

имеет не более одного действительного корня $x \in (0; 1)$.

Доказательство. Расмотрим функцию

$$y(x) = \ln(x + 2\sqrt{x}) - \ln(1 + 2\sqrt{x}) - \alpha \ln x, \quad x \in (0; 1].$$

Очевидно, каждый корень исходного уравнения будет нулем этой функции. Ее производная равна

$$y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{x} + x}{2 + 5\sqrt{x} + 2x} - \alpha \right).$$

Так как $x > 0$, то знак производной $y'(x)$ совпадает со знаком множителя при $1/x$. Его производная равна

$$\frac{-3 + 3x}{2\sqrt{x}(2 + 5\sqrt{x} + 2x)^2}.$$

Видим, что найденная производная отрицательна на интервале $(0; 1)$. Поэтому если $y'(x)$ и меняет знак на промежутке $(0; 1]$, то ровно один раз и с «$+$» на «$-$». Учитывая это и то, что $y(1) = 0$, получаем: функция $y(x)$ на интервале $(0; 1)$ обращается в нуль не более одного раза. $\square$

Приступим к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1.2.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна. Докажем 2) $\Longrightarrow$ 3). Случаи $|\operatorname{Im} f| = 1$ и $|\operatorname{Im} f| = 2$ покрываются предложением 2.1.

Пусть $f = (1, a, b), \quad 1 > a > b \geqslant 0$.

1) $b > 0$. Согласно предложению 2.6 функция g— трехзначная и положительная:

$$g = (1, c, d), \quad 1 > c > d > 0.$$

Воспользуемся предложением 3.8 и рассмотрим подалгебры

$$\left[\left(1, \frac{a^2 + 2\sqrt{a}a}{1 + 2\sqrt{a}}, \frac{b^2 + 2\sqrt{a}b}{1 + 2\sqrt{a}} \right) \right], \quad \left[\left(1, \frac{c^2 + 2\sqrt{c}c}{1 + 2\sqrt{c}}, \frac{d^2 + 2\sqrt{c}d}{1 + 2\sqrt{c}} \right) \right].$$

Пусть числа α и β таковы, что

$$\frac{a^2 + 2\sqrt{a}a}{1 + 2\sqrt{a}} = a^\alpha, \quad \frac{c^2 + 2\sqrt{c}c}{1 + 2\sqrt{c}} = c^\beta. \tag{3.7}$$

Тогда $\alpha = \beta$ согласно предложению 3.7. Легко видеть, что показатели α и β из интервала $(1; 2)$. Поэтому после деления равенств (3.7) на a и b к полученным равенствам можно применить лемму 3.11. Откуда $a = c$.

Для доказательства равенства $b = d$ вновь воспользуемся предложением 3.8 и рассмотрим подалгебры (учли, что $a = c$)

$$\left[\left(1, \frac{a+b}{1+b}, \frac{a+b}{1+a}\right)\right], \quad \left[\left(1, \frac{a+d}{1+d}, \frac{a+d}{1+a}\right)\right].$$

Аналогично предыдущему получаем, что

$$\frac{a+b}{1+b} = a^{\gamma} = \frac{a+d}{1+d}$$

для подходящего показателя γ. Откуда $b = d$.

2) $b = 0$. Тогда согласно предложению 2.6 функция g — трехзначная и обращается в нуль на Y :

$$g = (1, c, 0), \quad 1 > c > 0.$$

Воспользуемся леммой 2.7 и рассмотрим подалгебру $[f + r], r \in \mathbb{P}$. В силу все той же леммы 2.7 при изоморфизме решетки $\mathbb{A}_f$ на $\mathbb{A}_g$ ее образом служит подалгебра вида $[g + r'], r' \in \mathbb{P}$. Решетки $\mathbb{A}_{[f+r]}$ и $\mathbb{A}_{[g+r']}$ — изоморфны. Поэтому согласно пункту 1) доказательства

$$\frac{a+r}{1+r} = \frac{c+r'}{1+r'}, \quad \frac{r}{1+r} = \frac{r'}{1+r'}.$$

Откуда, $r = r'$ и $a = c$, то есть функции f и g равны как упорядоченные тройки чисел.

3) $\Longrightarrow$ 1). Если выполняется одно из условий 3.а), 3.б) или 3.в), то подалгебры $[f]$ и $[g]$ совпадают как множества упорядоченных по убыванию n-ок чисел, где $n = 1, 2, 3$ соответственно (см. предложение 2.1), а потому изоморфны как $\mathbb{R}^+$-алгебры.

Теорема доказана. $\square$

Автор благодарит профессора Е. М. Вечтомова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. **Сидоров В.В.** О строении решеточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций // *Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва. 2009. Т. 39. С. 339–341.*

2. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // *Вестник СыктГУ. 2010. Сер. 1. Вып. 11. С. 112–125.*

3. **Сидоров В.В.** Группа автоморфизмов решетки всех подалгебр полукольца многочленов над полуполем неотрицательных действительных чисел // *Изв. вузов. Матем. 2011. № 4. С. 104–107.*

4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1981. 456 с.

5. **Кострикин А. И.** Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учеб. для вузов. 2-е изд., исправл. М.: Физматлит., 2000. 272 с.

Summary

Sidorov V.V. Structure lattice isomorphisms of semirings generated by a one nonnegative function

In this paper we describe isomorphisms of lattices $\mathbb{A}_f$ and $\mathbb{A}_g$ of all subalgebras with unit of semirings of functions $[f]$ and $[g]$ generated by nonnegative real-valued functions f and g, respectively. It is proved that any isomorphism of lattices $\mathbb{A}_f$ and $\mathbb{A}_g$ is generated by an isomorphism of semirings $[f]$ and $[g]$. A technique of unigenerated subalgebras is applied.
Ключевые слова: isomorphisms of lattices, isomorphism of semirings, one-generated subalgebra, nonnegative function,

Вятский государственный гуманитарный университет *Поступила 24.12.2010*