Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.13.2011

УДК 519.6

ОДНА МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ

А. Б. Певный, М. Н. Истомина

Исследуется один метод оценивания контактных чисел, предложенный в работе [1]. Этот метод основан на модификации теоремы Ф. Дельсарта [2] и сводится к решению задачи линейного программирования. В изложение метода внесены некоторые уточнения.
Ключевые слова: контактные числа, теорема Дельсарта, сферические коды.

1. Введение. Контактным числом M_n пространства $\mathbb{R}^n$ называется максимальное число шаров радиуса $R = 1$ с непересекающимися внутренностями, касающимися одного такого же шара. Точные значения M_n известны только для размерностей $n = 2, 3, 4, 8$ и 24:

$$M_2 = 6, M_3 = 12, M_4 = 24, M_8 = 240, M_{24} = 196560.$$

Для остальных n известны только оценки чисел M_n, см., например, таблицу таких оценок в книге [3], с. 42.

Пусть $x \cdot y$ — обычное скалярное произведение векторов $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ — норма вектора x.

Нетрудно показать, что M_n равно максимальной мощности сферического $\frac{1}{2}$–кода. Множество $C = \{x_1,\ \ldots,\ x_M\}$ на единичной сфере S^{n-1} называется $\frac{1}{2}$–кодом, если $x_i \cdot x_j \leqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$.

Итак, M_n равно максимальному M, для которого существует $\frac{1}{2}$–код из M векторов. Подробнее об этом см. в [4].

2. Пусть $C = \{x_1,\ \ldots,\ x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$–код, т.е. $x_i \cdot x_j \leqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$. Пусть $K(t)$ — количество упорядоченных пар $(x_i,\ x_j)$, для которых $x_i \cdot x_j = t$. Введём функцию

$$\alpha(t) = \frac{1}{M} K(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Она обладает свойствами

$$\alpha(t) = 0 \text{ при } t \in (\tfrac{1}{2},\ 1); \qquad \alpha(1) = 1; \tag{0.1}$$

$$\sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha(t) = \frac{M^2}{M} = M. \tag{0.2}$$

Ещё одно свойство $\alpha(t)$ связано с полиномами Гегенбауэра. Полином Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ имеет степень k, нормирован условием $G_k^{(n)}(1) = 1$ и система $\left\{G_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональна на $[-1,\ 1]$ с весом $(1-t^2)^{(n-3)/2}$. Для любых точек $x_1,\ \ldots,\ x_M \in S^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\, j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j) \geqslant 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{0.3}$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha(t) G_k^{(n)}(t) = \sum_{i,\, j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j) \geqslant 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Использовав (1), получим неравенство

$$-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha(t) G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Будем теперь рассматривать всевозможные функции $\alpha(t)$, отличные от нуля только в конечном числе точек отрезка $[-1, 1]$. Рассмотрим «задачу линейного программирования» при фиксированном натуральном d:

$$\begin{gathered} L(\alpha) := 1 + \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha(t) \to \sup \\ -\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha(t) G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k \in 1 : d, \\ \alpha(t) \geqslant 0, \qquad t \in [-1, \tfrac{1}{2}]. \end{gathered} \tag{0.4}$$

Очевидно, что контактное число M_n не превосходит супремума $L(\alpha)$ при ограничениях (4).

Запишем теперь «двойственную задачу»:

$$S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k \to \inf,$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \geqslant 1, \qquad t \in [-1, \tfrac{1}{2}],$$
$$f_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:d. \tag{0.5}$$

В соответствии с общей идеей линейного программирования для любой $\alpha(t)$, удовлетворяющей (4), и для любого вектора $f = (f_1, \ldots, f_d)$, удовлетворяющего (5), справеделиво неравенство

$$L(\alpha) \leqslant 1 + S(f). \tag{0.6}$$

Действительно,

$$L(\alpha) \leqslant 1 + \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \left[-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \right] \alpha(t) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k \left[-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} G_k^{(n)}(t) \alpha(t) \right] \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k = 1 + S(f).$$

В силу (6) приходим к выводу: если вектор f удовлетворяет ограничениям (5), то для контактного числа M_n справедлива оценка $M_n \leqslant 1 + S(f)$. Это одна из переформулировок теоремы Дельсарта [2].

3. Интересная модификация теоремы Дельсарта предложена в краткой заметке [1]. Идея состоит в том, чтобы к ограничениям (4) добавить дополнительные ограничения на $\alpha(t)$. Эти дополнительные ограничения установим в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть m — натуральное число, $t_m = -\sqrt{(m+1)/(2m)}$. Тогда*

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} \alpha(t) \leqslant m - 1. \tag{0.7}$$

Доказательство. Напомним, что функция $\alpha(t)$ порождается $\frac{1}{2}$–кодом $C = \{x_1, \ \ldots, \ x_M\}$. Зафиксируем $k \in 1:M$. Пусть $A_k(t)$ — количество векторов x_i таких, что $x_i \cdot x_k = t$. Тогда $\alpha(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} A_k(t)$. Достаточно для любого $k \in 1:M$ доказать неравенство

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} A_k(t) \leqslant m - 1.$$

Допустим противное: при некотором $k \in 1:M$ найдутся m векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \in C$ таких, что

$$x^{(i)} \cdot x_k < t_m, \qquad i \in 1:m. \tag{0.8}$$

Рассмотрим и оценим сумму

$$S := \sum_{i,j=1}^{m} x^{(i)} \cdot x^{(j)} \leqslant m + (m^2 - m) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} m(m+1). \qquad (0.9)$$

С другой стороны, $S = X \cdot X$, где $X = \sum_{i=1}^{m} x^{(i)}$. К вектору x_k можно добавить векторы $e_2, \dots, e_n$ так, чтобы получить ортонормированный базис $\{x_k, e_2, \dots, e_n\}$. Тогда

$$|X|^2 = (X \cdot x_k)^2 + (X \cdot e_2)^2 + \dots + (X \cdot e_n)^2 \geqslant (X \cdot x_k)^2.$$

Отсюда

$$S \geqslant \left(\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k \right)^2.$$

В силу (8) $\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k < m t_m < 0$. Следовательно,

$$S > (m t_m)^2 = m^2 \frac{m+1}{2m} = \tfrac{1}{2} m(m+1).$$

Получим противоречие с неравенством (9). □

З а м е ч а н и е. *$t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$, $t_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \approx -0.816$.*

Следующая теорема приведена в [1] без доказательства и с неточным значением r_0.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $r_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3} \approx -0.915$. Тогда*

$$2 \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_0} \alpha(t) + \sum_{r_0 < t < t_3} \alpha(t) \leqslant 2. \qquad (0.10)$$

Доказательство. В предыдущей теореме при $m = 3$ получены неравенства

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_3} A_k(t) \leqslant 2, \qquad k \in 1 : M.$$

Зафиксируем $k \in 1 : M$. Нам нужно доказать неравенство

$$2 \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_0} A_k(t) + \sum_{r_0 < t < t_3} A_k(t) \leqslant 2.$$

Оно равносильно утверждению: если $x^{(1)} \in C$, $x^{(1)} \cdot x_k \leqslant r_0$, то не существует $x^{(2)} \in C$, $x^{(2)} \neq x^{(1)}$, такого, что $r_0 < x^{(2)} \cdot x_k < t_3$. Допустим противное: такой вектор $x^{(2)}$ существует. Тогда из неравенства (9) при $m = 2$ получим $|x^{(1)} + x^{(2)}|^2 \leqslant 3$. В то же время справедлива оценка снизу

$$|x^{(1)} + x^{(2)}|^2 \geqslant \left((x^{(1)} + x^{(2)}) \cdot x_k\right)^2 > (r_0 + t_3)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 3.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

4. Пусть теперь $\alpha(t)$ обозначает функцию, отличную от нуля только в конечном числе точек отрезка $[-1, 1]$. Выберем натуральное число d.

Рассмотрим «задачу линейного программирования»

$$L(\alpha) := 1 + \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha(t) \to \sup,$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\geqslant 0, \qquad t \in \left[-1, \tfrac{1}{2}\right]; \\ -\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha(t) G_k^{(n)}(t) &\leqslant 1, \qquad k \in 1 : d; \\ \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_0} \alpha(t) + \sum_{r_0 < t \leqslant t_2} \alpha(t) &\leqslant 1; \\ 2\sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_0} \alpha(t) + \sum_{r_0 < t \leqslant t_2} \alpha(t) + \sum_{t_2 < t < t_3} \alpha(t) &\leqslant 2. \end{aligned}$$

Ей соответствует «двойственная задача»:

$$S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} \to \inf,$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + 2f_{d+2} \geqslant 1, \qquad t \in [-1, r_0], \tag{0.11}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + f_{d+2} \geqslant 1, \qquad t \in (r_0, t_2], \tag{0.12}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \qquad + f_{d+2} \geqslant 1, \qquad t \in (t_2, t_3), \tag{0.13}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \qquad \geqslant 1, \qquad t \in \left[t_3, \tfrac{1}{2}\right], \tag{0.14}$$

$$f_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, d + 2. \tag{0.15}$$

Для любых планов прямой и двойственной задач справедливо неравенство $L(\alpha) \leqslant 1 + S(f)$ (аналогичное неравенство доказано в п. 2). Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Если вектор $f = (f_1, \ldots, f_{d+2})$ удовлетворяет ограничениям (11) – (15), то для контактного числа M_n справедливо неравенство*

$$M_n \leqslant 1 + S(f).$$

5. Заменив непрерывный параметр t в ограничениях (11) – (15) на точки сетки, получим задачу линейного программирования, которую можно решать на компьютере. На этом пути можно получить оценку $M_9 \leqslant 379$ (см. [4]).

Литература

1. **Всемирнов М. А., Ржевский М. Г.** Верхняя оценка контактного числа в размерности 9// *Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. Вып. 5. С. 149–150.*
2. **Delsarte Ph.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory // *Philips Res. Repts. Suppl. 1973. N 10. P. 1–97.*
3. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решётки и группы. Т. 1. М.: Мир, 1990. 416 с.
4. **Котелина Н.О.** Методы оценивания контактных чисел // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Мат. Мех. Инф. 2011. Вып.13. С. 89–98.*

Summary

Pevnyi A. B., Istomina M. N. A modification of Delsarte's theorem for the estimation of kissing numbers

A modification of Delsarte's theorem is proved.
Keywords: kissing number, Delsarte's theorem, spherical codes.

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 20.04.2011*