Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.13.2011

УДК 517.98

ТРИ КОНТРПРИМЕРА В АНАЛИЗЕ

А. А. Порошкин, А. Г. Порошкин

Приводятся примеры, показывающее, что в общих метрических пространствах не выполняются классические теоремы о непрерывных функциях: Вейерштрасса об ограниченности и достижении граней, а так же теорема Кантора о равномерной непрерывности. Материал может быть использован в учебном процессе.
Ключевые слова: метрическое пространство, r-дистанцированное семейство, равномерно непрерывный оператор

I. При изучении непрерывных операторов (функций) в метрических пространствах в курсе теории функций действительного переменного (ТФДП) или дополнительных глав математического анализа (ДГМА) обычно отмечается, что известные теоремы анализа о свойствах непрерывных функций на ограниченном замкнутом множестве в R или в R^m – теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижении граней и теорема Кантора о равномерной непрерывности – на случай общих метрических пространств не распространяются. Однако это утверждение обычно конкретными примерами не подтверждается и в известных учебных пособиях, рекомендованных студентам, такие примеры также не приводятся. В то же время любознательные студенты могут заинтересоваться вопросом: а нельзя ли привести примеры, желательно несложные, убеждающие их в том, что важные теоремы в метрических пространствах могут не выполняться, указать причины их нарушения, выяснить существенное различие в природе ограниченных замкнутых множеств в пространствах R^m и в общих метрических пространствах, приводящее к разным результатам при исследовании свойств непрерывных функций. Цель настоящей заметки – дать несколько несложных примеров, которые можно было бы использовать в учебном процессе в курсе ТФДП (или ДГМА). Ниже знаками $\circ$ и $\bullet$ обозначены начало и конец доказательства утверждения; символ ":=" означает "равно по определению". Пусть (X, ρ) – метрическое пространство (МП).

II. Напомним: расстоянием между множествами $E, F \subset X$ называется число $\rho(E, F) := \inf\{\rho(x, y) : x \in E, y \in F\}$.

Пример 1. Расстояние между шарами $U_r(a)$ и $U_s(b)$ в МП оценивается неравенством $\rho(U_r(a), U_s(b)) \geq \max\{0, \rho(a, b) - r - s\}$ (безразлично, открыт или замкнут тот или иной шар). Расстояние между теми же шарами в нормированном пространств(НП) равно

$$\rho(U_r(a), U_s(b)) = \max\{0, \|a - b\| - r - s\} = \max\{0, \rho(a, b) - r - s\}.$$

Диаметр непустого множества $E \subset X$ есть число (собственное или несобственное) $d(E) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$.

Пример 2. В МП X диаметр шара $d(U_r(a)) \leq 2r$. В НП $d(U_r(a)) = 2r$.

Равенство $d(E) = +\infty$ выполнено тогда и только тогда, когда множество E не ограничено, т.е. в нем имеется последовательность (x_n), удовлетворяющая при любом выборе $c \in X$ условию $\rho(c, x_n) \longrightarrow \infty$.

Пусть теперь $(E_\xi)_{\xi \in \Xi}$ – семейство непустых подмножеств X, $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ – семейство точек X. Пусть $r > 0$ – число.

Определение 1. Семейство множеств (E_ξ) назовем r-дистанцированным, если $\rho(E_\xi, E_{\xi'}) \geq r$ при $\xi \neq \xi'$. Семейство точек x_ξ r-дистанцировано, если r - дистанцировано семейство одноточечных подмножеств $\{x_\xi\}$, что равносильно: $\rho(x_\xi, x_{\xi'}) \geq r$ при $\xi \neq \xi'$.

Пример 3. В нормированном пространстве l^1 суммируемых последовательностей семейство единичных векторов $e_n = (\delta_{in}), n \in N$, является 2-дистанцированным: $\|e_n - e_m\| = 2, n \neq m$.

Пример 4. Семейство замкнутых шаров $D_{\frac{1}{2}}(e_n), n \in N$, в l^1 (или открытых $B_{\frac{1}{2}}(e_n), n \in N$) с центрами в точках e_n является 1-дистанцированным.

Определение 2. Семейство множеств (E_ξ) назовем ограниченным, если ограничено их объединение $E = \bigcup E_\xi$.

Пример 5. Семейство шаров $D_\varepsilon(e_n), n \in N$, в пространстве l^1 ограничено, ибо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_\varepsilon(e_n) \subset D_{1+\varepsilon}(\theta)$ (θ –нулевой вектор).

Теорема 1. Пусть E_ξ – r-дистанцированное семейство замкнутых множеств в МП X. Тогда множество $E = \bigcup E_\xi$ также замкнуто.

$\circ$ Пусть $x_n \in E$ и $x_n \longrightarrow x_\circ$. Как сходящаяся последовательность (x_n) фундаментальна, а поэтому для числа $r > 0$ найдется такой номер $n_\circ$, что $\rho(x_n, x_{n_\circ}) < r$ при $n \geq n_\circ$. Это означает, что при $n > n_\circ$ все x_n лежат в том же множестве, что и $x_{n_\circ}$. Пусть $x_n \in E_{\xi_\circ} \forall n \geq n_\circ$. Из $x_n \in E_{\xi_\circ} (n \geq n_\circ)$ и $x_n \longrightarrow x_\circ$, в силу замкнутости $E_{\xi_\circ}$, следует, что

$x_\circ \in E_{\xi_\circ} \subset E$. Итак, из $x_n \in E$ и $x_n \longrightarrow x_\circ$ следует $x_\circ \in E$ и E – замкнуто. •

Теорема 2. Пусть $(x, \rho), (y, \sigma)$ – метрические пространства, (E_ξ) – r-дистанционное семейство подмножеств $X (r > 0)$ и $E = \bigcup E_\xi$. Тогда если $A_\xi : E_\xi \longrightarrow Y$ – семейство непрерывных операторов, то оператор $A \colon E \longrightarrow Y$, определенный равенством $Ax = A_\xi x$ при $x \in E_\xi$, также непрерывен.

○ Пусть $x_n, x_\circ \in E$ и $x_n \longrightarrow x_\circ$. Снова по $r > 0$ найдется номер $n_\circ$ такой, что $\rho(x_n, x_\circ) < r$ при $n > n_\circ$, так что при $n > n_\circ$ все x_n лежат в том же множестве (пусть $E_{\xi_\circ}$), что и $x_\circ$. В силу непрерывности оператора $A_{\xi_\circ}$ имеем: $x_n \longrightarrow x_\circ \Rightarrow A_{\xi_\circ} x_n \longrightarrow A_{\xi_\circ} x_\circ$, а тогда

$$x_n \longrightarrow x_\circ \Rightarrow \lim A x_n = \lim A_{\xi_\circ} x_n = A_{\xi_\circ} x_\circ = A x_\circ \ \text{ и } \ A \text{ – непрерывен.}\bullet$$

Следствие 1. Если в теореме 2 каждый оператор A_ξ постоянен в своей области определения E_ξ, то A непрерывен.

III. Для оператора $B : E \longrightarrow Y \,(E \subset X)$ можно ввести понятие равномерной непрерывности (по аналогии с числовыми функциями).

Определение 3. Оператор $B \colon E \longrightarrow Y$ называется равномерно непрерывным, если он удовлетворяет условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E \;\; (\rho(x, x') < \delta \Rightarrow \sigma(Bx, Bx') < \varepsilon) \qquad (1)$$

Удобно пользоваться следующим критерием равномерной непрерывности оператора, аналогичным приведенному в [1] для числовых функций (теорема 3 в §7).

Теорема 3. Для $B : E \longrightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

(i) B – равномерно непрерывен

(ii) $\forall x_n, x'_n \in E \;\; (\rho(x_n, x'_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \sigma(Bx_n, Bx'_n) \longrightarrow 0)$ (2)

○ $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть $x_n, x'_n \in E$ и $\rho(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$. Если $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно и найдено соответствующее ему $\delta > 0$ в условии (1), то найдется номер $n_\circ$ такой, что $\rho(x_n, x'_n) < \delta$ при $n \geq n_\circ$ и по (1) $\sigma(Bx_n, Bx'_n) < \varepsilon$ (для $n \geq n_\circ$). Это означает, что выполнено условие (2).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Допустим, что выполнено (2), но не выполнено условие (1). Значит, $\exists \varepsilon_\circ : \forall \delta > 0$ найдутся "вредные" точки $x, x' \in E$, для которых $\rho(x, x') < \delta$, однако $\sigma(Bx, Bx') \geq \varepsilon_\circ$. Для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$, найдя соответствующую пару x_n, x'_n "вредных" точек, будем иметь

$$\rho(x_n, x'_n) \longrightarrow 0 \;\; \text{и} \;\; \sigma(Bx_n, Bx'_n) \geq \varepsilon_\circ$$

– и условие (2) не выполнено. •

Теперь следствие 1 из теоремы 2 мы можем уточнить следующим образом.

Следствие $1'$. Если в следствии 1 каждый оператор A_ξ постоянен в своей области определения E_ξ, то оператор A равномерно непрерывен на E.

$\circ$ Пусть $x_n, x'_n \in E$ и $\rho(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$. По $r > 0$ снова найдем номер $n_\circ$, начиная с которого выполняются неравенства $\rho(x_n, x'_n) < r$, а поэтому, начиная с этого номера, каждая пара x_n, x'_n окажется в одном и том же множестве E_{ξ_n}. Но тогда $Ax_n = y_{\xi_n} = Ax'_n$ и $\sigma(Ax_n, Ax'_n) = 0$. Таким образом, из $\rho(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$ следует $\sigma(Ax_n, Ax'_n) = 0$ и A равномерно непрерывен.$\bullet$

IV. Здесь, наверно, можно поставить вопрос: Не получим ли верное предложение, если в теореме 2 всюду слово "непрерывный" заменить словом "равномерно непрерывный"? Оказывается нет.

Пример 6. Если $X = R$ с естественной метрикой, $E_n = [2n, 2n+1], n \in N$ и $f_n(x) = x^2, x \in E_n$, то все f_n (по теореме Кантора) равномерно непрерывны, но "суммарная" функция $f(x) = x^2, x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n, 2n+1]$ не является равномерно непрерывной: для $x_n = 2n$, $x'_n = 2n + \frac{1}{n}$ имеем $|x_n - x'_n| \longrightarrow 0$, тогда как $|f(x'_n) - f(x_n)| > 4$.

Ответ на вопрос будет положительным в том случае, если все функции f_n в одинаковой степени относительно выбора ε равномерно непрерывны, т.е. если $\forall \varepsilon > 0$ найдется единое $\delta > 0$, пригодное для всех x, x' одновременно, такое, что $\rho(x, x') < \delta$ влечет $\sigma(f_\xi(x), f_\xi(x')) < \varepsilon$ независимо от того, в каком E_ξ выбраны точки x, x'.

V. Примеры 3, 4, 6 могут натолкнуть на мысль, что в МП могут встретиться лишь не более чем счетные r-дистанцированные семейства. Конечно, это не так. В действительности, если это в какой-либо задаче понадобится, то для любой бесконечной мощности α можно построить МП, в котором найдется r-дистанционное семейство (точек или множеств) мощности α.

Пример 7. Пусть T – множество мощности α, $B(T)$ – НП ограниченных вещественных функций на T с sup-нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. Для каждого $s \in T$ введем функцию $e_s(t) = K_{\{s\}}(t)$ (характеристическая функция одноточечного множества $\{s\}$). Это – нормированная функция $\|e_s\| = 1$; при $s \neq s'$ имеем $\|e_s - e_{s'}\| = 1$, так что семейство (e_s) оказывается 1-дистанцированным семейством элементов мощности α.

Если с центрми в каждой точке e_s построим шар $D_{\frac{1}{3}}(e_s)$, то получим $\frac{1}{3}$-дистонцированное семейство $(D_{\frac{1}{3}}(e_s))_{s \in T}$ замкнутых шаров в пространстве $B(T)$ мощности α.

VI. Обратимся теперь к построению контрпримеров к теоремам Вейерштрасса и к теореме Кантора.

Контрпример к теореме Вейерштрасса об ограниченности получается совсем просто. Пусть (Y,σ)–МП с $d(Y) = +\infty$ (например, $Y = R$ с естественной метрикой). Значит, в Y имеется неограниченная последовательность (y_n) (см.пример 2). Пусть далее (E_n) – ограниченная r-дистанционная последовательность замкнутых множеств в МП X (скажем, из примера 4). Тогда множество $E = \bigcup E_n$ – ограничено и замкнуто в X (теорема 1), а оператор $A : E \longrightarrow Y$, заданный равенством $Ax = y_n$ при $x \in E_n$ равномерно непрерывен на E, но не ограничен. В частности, числовая функция $f(x) = n$ при $x \in E_n$ равномерно непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E, но не ограничена.

Контрпример к теореме Вейерштрасса о достижении граней. Функция $f(x)$, заданная на том же множестве по правилу $f(x) = (-1)^n \frac{n-1}{n}$, $x \in E_n$ равномерно непрерывна и ограничена, но не достигает своих граней: ни супремума, равного 1, ни инфимума, равного -1. (Здесь мы вынуждены ограничиться числовой функцией, так как в общем случае не имеем возможности говорить о гранях множества $A(E)$: ибо нет понятия неравенства для элементов из Y).

Контрпример к теореме Кантора о равномерной непрерывности. Здесь придется нам построить более хитрый пример функции (оператора), для которой нарушается теорема Кантора. Мы построим функцию, непрерывную на всем пространстве , затем возьмем ее сужение на некоторое ограниченное замкнутое множество (шар D_a).

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – вещественное НП, в котором имеется $3r$-дистанцированная ограниченная последовательность (a_n), $\|a_n\| \leq b$ (скажем e_n, из примера 3). С центрами в точках a_n построим последовательность замкнутых шаров $D_r(a_n) = E_n$, которая окажется r-дистан- цированной, т.к. $\rho(E_n, E_m) \geq r$ при $n \neq m$ (пример 1) и ограниченной: $E = \bigcup E_n \subset D_{b+r}(\theta)$, где θ–нулевой вектор. Множество – замкнуто (теорема 1) (и ограничено), следовательно, множество E^c открыто.

Зададим функцию $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, полагая

$$f(x) = \begin{cases} n\left(1 - \frac{\|x-a_n\|}{r}\right), & \text{при } \ x \in E_n \\ 0, & \text{при } \ x \in E^c \end{cases}. \tag{3}$$

Замечание. Идею построения значения $f(x)$ при $x \in E_n$ можно показать на рисунке: в декартовом произведении $X \times R^+$ построим "конус" с основанием $S_r(a_n)$ и вершиной $(a_n, n) \in X \times R^+$. Точку $(x, f(x))$ выбираем на поверхности "конуса" и воспользуемся пропорцией

$$\frac{n - f(x)}{\|x - a_n\|} = \frac{n}{r}. \tag{4}$$

Покажем, что $f \in C(X)$. Воспользуемся языком последовательностей. Пусть $x_n \longrightarrow x_\circ$ в X.

А. Если $x_\circ \in E^c$, то, в силу открытости E^c, все x_n, начиная с некоторого номера $n_\circ$, окажутся в E^c, а поэтому $f(x_n) = f(x_\circ) = 0$ при $n \geq n_\circ$ и $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$.

Б. Если $x_\circ \in E$,то $x_\circ \in E_m$ для некоторого номера m.Пусть все $x_n \in E$. По числу $r > 0$ найдется номер $n_\circ$ такой, что $\rho(x_n, x_\circ) < r$ при $n \geq n_\circ$ и, следовательно (в силу r-дистанцированности семейства E_i), окажется $x_n \in E_m$ при $n \geq n_\circ$. А тогда, силу непрерывности нормы имеем $\|x_n - a_m\| \longrightarrow \|x_\circ - a_m\|$ и $f(x_n) \longrightarrow f(x_\circ)$.

В. Наконец, в общем случае, когда и в множестве E, и в множестве E^c имеется бесконечно много членов последовательности (x_n), последняя распадется на две подпоследовательности x'_n (все $x'_n \in E$) и x''_n (все $x''_n \in E$). Обе они сходятся к $x_\circ$ (ибо $x_n \longrightarrow x_\circ$), вследствие чего $x_\circ$ окажется граничной точкой множеств E и E^c : $x_\circ \in \bar{E} \bigcap \bar{E}^c$. В силу замкнутости E $x_\circ \in E$, и, значти $x_\circ \in E_m$, при некотором m и лежит на его границе. Поэтому в силу равенства (3) $f(x_\circ) = 0$. Но тогда (в силу сказанного в п. Б) $\lim f(x'_n) = f(x_\circ) = 0 = \lim f(x''_n)$. Значит и в целом $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$.

Итак, из А) – В) следует, что в любом случае соотношение $x_n \longrightarrow x_\circ$ влечет $f(x_n) \longrightarrow f(x_\circ)$ и f непрерывна на X.

Если взять теперь шар $D_{b+r}(\theta)$ (см. выше), то функция f будет непрерывной на ограниченном замкнутом $D_{b+r}(\theta)$, но она не будет равномерно непрерывной на нем. В самом деле, если взять последовательности $x_n = a_n$ и $x'_n = (1 + \frac{1}{n})a_n$, то получим $\|x_n - x'_n\| \longrightarrow 0$, но $f(x_n) - f(x'_n) = \dfrac{\|a_n\|}{r} \nrightarrow 0$[1].

Замечание 2. Эта же функция может послужить и контрпримером к первой теореме Вейерштрасса, а если в формуле (3) коэффициент n заменить на $(-1)^n$, то получим еще одну функцию в качестве контрпримера ко второй теореме Вейерштрасса. Мы сразу бы могли работать с вариантами функции (3), но нам хотелось привести более простые примеры функций, нужные свойства которых более очевидны.

[1] при $\|a_n\| \longrightarrow 0$ последовательность (a_n) не была бы $3r$-дистанцированной.

Замечание 3. Если бы вместо числовой функции хотелось построить непрерывный оператор, не удовлетворяющий теореме Кантора, то мы формулу (3) могли заменить следующей

$$Ax = \begin{cases} y_n \left(1 - \frac{\|x-a_n\|}{r}\right), & \text{при } \ x \in E_n \\ \theta, & \text{при } \ x \in E^c \end{cases} \qquad (5).$$

ґде (y_n) есть некоторая неограниченная последовательность векторов в НП Y, (Оператор (4) непрерывен на всем X).

Замечание 4. По формуле, аналогичной (3), можно построить функцию и на МП, также непрерывную на замкнутом шаре, но не являющуюся равномерно непрерывной. Однако, на это пространство придется наложить дополнительные требования. Можно, напрмер, потеребовать, чтобы X было линейно связным пространством.

VII. Причина расхождений в поведении непрерывных функций в пространствах R^m $(m \geq 1)$ и в общих метрических пространствах следующая. При доказательстве всех трех обсуждаемых теорем в курсе анализа мы использовали теорему Больцано-Вейерштрасса о наличии сходящейся подпоследовательности в любой ограниченной последовательности (да еще требуем, чтобы предел этой подпоследовательности принадлежал тому множеству, в котором выбирается последовательность). Для метрических пространств эта теорема может не иметь места (у r-дистанционной последовательности, даже ограниченной, нет фундаментальных и тем более сходящихся последовательностей!)

Выполнимость теоремы Больцано-Вейерштрасса в МП равносильна компактности (в топологическом смысле) любого ограниченного замкнутого множества $E \subset X$ (см., например [2],§ 113). По этой причине и называли мы в курсе анализа компактом (или компактным множеством) каждое ограниченное замкнутое множество в R^m. Так же мы называем каждое ограниченное замкнутое множество в МП , в котором выполняется условие Больцано-Вейерштрасса.

Отметим еще, что в НП X каждая ограниченная последовательность обладает фундаментальной подпоследовательностью в том и только том случае, когда X конечномерно (см., например, [2], § 119).

VIII. Все, что мы обсудили на этих страницах, позволяет сделать определенные выводы о метрических пространствах или множествах в них. Поскольку каждое подмножество МП само есть МП с индуцированной метрикой, то мы не будем выделять специально предложения, касающиеся подмножеств.

Заметим, что для полного МП X компактность равносильна отсутсвию в X r-дистанционной последовательности для **любого** $r > 0$.

Пусть X – полное МП с диаметром $d(x) < +\infty$. Введем следующие предложения:

(i) X компактно (т.е. в X справедлива теорема Больцано-Вейерштрасса).

(ii) Каждая непрерывная на X функция ограничена.

(iii) Каждая непрерывная функция на X достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

(iv) Каждая непрерывная на X функция равномерно непрерывна.

Теорема 4. А. Утверждения $(i) - (iii)$ эквивалентны.

Б. Из (i) следует (iv).

В. Если X линейно связно, то $(iv) \Rightarrow (i)$.

$\circ$ То, что $(i) \Longrightarrow [(ii) - (iv)]$ доказывается повторением рассуждений, проведенных в курсе анализа при доказательстве классических теорем Вейерштрасса и Кантора. Если (i) не выполняется, то это значит, что в X имеется последовательность (a_n), являющаяся r-дистанцированной при некотором $r > 0$.Рассмотренные выше примеры, показывают, что в этом случае имеются непрерывные функции, не удовлетворяющие условиям (ii) и (iii), а если дополнительно X линейно связно, то сказанное в замечании 4 показывает, что условие (iv) также не будет выполняться. (Условие линейной связности X в пункте В существенно). $\bullet$

Литература

1. **Порошкин А.А., Порошкин А.Г.** Непрерывность. Учебное пособие. - Сыктывкар: Сыктывкарский университет. – 2001. –65 с.

2. **Порошкин А.Г.** Лекции по функциональному анализу. - М.: Вузовская книга, 2004. – 432 с.

Summary

Poroshkin A. A., Poroshkin A. G. Three counter-example in analysis

It is represented the examples of the continuous functions on the metric spaces for which the classical theorems of Weierstrass (about boundedness and about achievement of the face) and the theorem of Kantor (about uniformly continuity) are not true.

Keywords: metric space, r-distance family, uniformly continuous operator

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 12.09.2010*