Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.11.2010

УДК 530.24

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ[1]

Костяков И.В., Куратов В.В.

Мы показываем, как используя предельные переходы, можно получать лагранжианы с неполупростой калибровочной симметрией. Рассмотрены предельные переходы $SO(2)$ и $SU(2)$ калибровочных теорий.

1. Введение

В статье [1] мы описали калибровочные теории для некоторых неполупростых групп симметрии. Важность этих теорий обусловлена безхиггсовским механизмом приобретения массы калибровочными полями [2] и некоторыми другими необычными свойствами [3]. Здесь мы покажем, как эти теории могут быть получены предельными переходами [4] из соответствующих теорий с полупростыми группами. Предельный переход выполняется в специальным образом построенном семействе лагранжианов. Способ построения заключается в суммировании лагранжианов с разными калибровочными группами $L = L_H + f_H \cdot L_G$ с весовой H-инвариантной функцией f_H, причем группа G содержит как группу H, так и ее контракцию $H_c = \lim_{\varepsilon \to 0} H(\varepsilon)$. В качестве примеров разобраны предельные переходы $SO(2)$ и $SU(2)$ калибровочных теорий. Основную идею контракций мы напоминаем в Приложении.

2. Описание метода

Рассмотрим следующие очевидные инварианты группы $SO(2)$:

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\varphi_1^2 + \mathrm{d}\varphi_2^2, \tag{1}$$

$$\mathrm{J} = f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,(\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1 - \varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2)^2\,, \tag{2}$$

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ — Беларусь 08-01-90010 и программой „Математические проблемы нелинейной динамики“ Президиума РАН.

здесь если $f(\rho) = 1$, где $\rho^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$, то J это квадрат площади, а если $f(\rho) = 1/\rho^2$ – квадрат угла. Сумма их будет также $SO(2)$-инвариантом, как впрочем и любая функция от них. Однако ясно, что второй инвариант при $f(\rho) = 1$ выдерживает и более общую группу $SL(2)$–преобразований. Таким образом, весовая функция $f(\rho)$ ограничивает $SL(2)$ симметрию второго инварианта до $SO(2)$.

Рассмотрение суммы этих инвариантов можно интерпретировать как неевклидово обобщение длины в полярных координатах введением функции $R(\rho)$

$$\mathrm{d}\varphi_1^2 + \mathrm{d}\varphi_2^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\alpha^2 \longrightarrow \mathrm{d}\rho^2 + R(\rho)\rho^2\mathrm{d}\alpha^2. \tag{3}$$

Если перейти обратно к декартовым координатам, имеем выражение

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho^2 + R(\rho)\rho^2\mathrm{d}\alpha^2 &= \mathrm{d}\varphi_1^2 + \mathrm{d}\varphi_2^2 + \frac{R(\rho)-1}{\rho^2}\left(\varphi_1\mathrm{d}\varphi_2 - \varphi_2\mathrm{d}\varphi_1\right)^2 = \\ &= \mathrm{d}\varphi_1^2 + \mathrm{d}\varphi_2^2 + f(\rho)\left(\varphi_1\mathrm{d}\varphi_2 - \varphi_2\mathrm{d}\varphi_1\right)^2,\end{aligned} \tag{4}$$

являющееся суммой двух упомянутых инвариантов. Отметим, что в случае группы $SU(2)$ указанной интерпретации суммы инвариантов как неевклидова обобщения длины нет, но на применимость предлагаемого метода это не влияет.

Рассмотрим набор полей материи $\{\varphi_i\}$, преобразующихся в изопространстве под действием групп H. Пусть их лагранжианы L_H, L_G – инварианты групп H и G, соответственно, а f_H–инвариант группы H. Тогда если $H \subset G$, то сумма

$$L_o = L_H + f_H \cdot L_G \tag{5}$$

H–инвариантна.

Введем в группу H параметр контракции ε, тогда при $\varepsilon \neq 0$ имеем набор эквивалентных лагранжианов

$$L(\varepsilon) = L_{H(\varepsilon)} + f_{H(\varepsilon)} \cdot L_G. \tag{6}$$

При переходе к пределу $\varepsilon \to 0$ получаем не эквивалентный предыдущим контрактированный лагранжиан

$$L_c = L_{H_c} + f_{H_c} \cdot L_G. \tag{7}$$

Построенные лагранжианы (5-6), обладают глобальной инвариантностью, которую мы будем далее локализовывать введением калибровочных полей A_μ

$$\begin{aligned}L(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) \longrightarrow L_H(\varphi_i, (\partial_\mu + A_\mu)\varphi_i) &+ \\ + f_H \cdot L_G(\varphi_i, (\partial_\mu + A_\mu)\varphi_i) &+ L_{YM}(A_\mu, \partial_\mu A_\mu).\end{aligned} \tag{8}$$

Мы будем всегда рассматривать вариант, когда поле A_μ принадлежит алгебре Ли группы H. Если $H_c \subset G$, то после локализации (7) получаем лагранжиан теории с неполупростой калибровочной группой H_c.

3. Предельный переход $SO(2) \to G(1)$

Простейшей калибровочной теорией с абелевой группой внутренней симметрии $SO(2)$ является скалярная электродинамика Максвелла. Контракция $SO(2)$ в группу Галилея $G(1)$ разобрана в Приложении. Рассмотрим предельный переход $SO(2)$–электродинамики в $G(1)$–электродинамику. Пусть поля $(\varphi_1, \varphi_2)^t \in R^2$ преобразуются группой $H = SO(2)$, а в качестве объемлющей группы G выберем $SL(2)$. Тогда имеем первоначальный лагранжиан, определяемый двумя инвариантами I и J

$$\begin{aligned} L_o &= L_{SO(2)} + f_{SO(2)} \cdot L_{SL(2)} = \\ &= \partial_\mu \varphi_1^2 + \partial_\mu \varphi_2^2 + V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + f(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\left(\varphi_2 \partial_\mu \varphi_1 - \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2\right)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

инвариантный относительно вращений

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \Omega(\delta) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Удобно работать в полярных координатах ρ, α

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\Omega(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где лагранжиан принимает вид

$$L_o = (\partial_\mu \rho)^2 + \left(f(\rho^2)\rho^2 + 1\right) \rho^2 b_\mu^2 + V(\rho^2) \quad (12)$$

и инвариантен относительно преобразований

$$\rho \longrightarrow \rho, \qquad \alpha \longrightarrow \alpha + \delta, \quad (13)$$

здесь $b_\mu = \partial_\mu \alpha$.

После введения параметра ε, набор эквивалентных $SO_\varepsilon(2)$ лагранжианов определяется деформированными инвариантами,

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \mathrm{d}\varphi_1^2 + \varepsilon^2 \mathrm{d}\varphi_2^2, \quad (14)$$

$$\mathrm{J}_\varepsilon = f(\varphi_1^2 + \varepsilon^2 \varphi_2^2)\left(\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1 - \varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2\right)^2. \quad (15)$$

выглядит

$$L_\varepsilon = \partial_\mu\varphi_1^2 + \varepsilon^2\partial_\mu\varphi_2^2 + V(\varphi_1^2+\varepsilon^2\varphi_2^2) + \\ + f(\varphi_1^2+\varepsilon^2\varphi_2^2)\left(\varphi_2\partial_\mu\varphi_1 - \varphi_1\partial_\mu\varphi_2\right)^2, \quad (16)$$

и инвариантен относительно деформированных параметром ε вращений

$$\begin{cases} \varphi_1' = \cos(\varepsilon\delta)\varphi_1 - \varepsilon\sin(\varepsilon\delta)\varphi_2, \\ \varphi_2' = \varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\delta)\varphi_1 + \cos(\varepsilon\delta)\varphi_2. \end{cases} \quad (17)$$

В "деформированных" полярных координатах ρ_ε, α_ε

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \rho_\varepsilon \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\alpha_\varepsilon & -\varepsilon\sin\varepsilon\alpha_\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}\sin\varepsilon\alpha_\varepsilon & \cos\varepsilon\alpha_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_\varepsilon\Omega_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $\rho_\varepsilon = \sqrt{\varphi_1^2+\varepsilon^2\varphi_2^2}$, $\operatorname{tg}(\varepsilon\alpha_\varepsilon) = \varepsilon\operatorname{tg}\alpha$, лагранжиан становится

$$L_\varepsilon = (\partial_\mu\rho_\varepsilon)^2 + \left(f(\rho_\varepsilon^2)\rho_\varepsilon^2 + \varepsilon^2\right)\rho_\varepsilon^2(\partial_\mu\alpha_\varepsilon)^2 + V(\rho_\varepsilon^2). \quad (19)$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем лагранжиан L_c, инвариантный относительно галилеевских преобразований в пространстве полей. Вычисляя предел в (17) и (19) имеем в декартовых координатах

$$\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_1, \\ \varphi_2' = \alpha\varphi_1 + \varphi_2, \end{cases} \quad (20)$$

$$L_c = (\partial_\mu\varphi_1)^2 + V(\varphi_1^2) + f(\varphi_1^2)\left(\varphi_2\partial_\mu\varphi_1 - \varphi_1\partial_\mu\varphi_2\right)^2. \quad (21)$$

Определим "контрактированные" полярные координаты

$$\rho_c = \lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon = \varphi_1, \qquad \alpha_c = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad (22)$$

поскольку $\operatorname{tg}(\varepsilon\alpha_\varepsilon) = \varepsilon\operatorname{tg}\alpha$. В координатах ρ_c, α_c преобразования Галилея и лагранжиан выглядят

$$\begin{cases} \rho_c' = \rho_c, \\ \alpha_c' = \alpha_c + \delta, \end{cases} \quad (23)$$

$$L_c = (\partial_\mu\rho_c)^2 + V(\rho_c^2) + f(\rho_c^2)\rho_c^4(\partial_\mu\alpha_c)^2. \quad (24)$$

Из этой формулы видна роль функции f. При $f = 0$ предельный переход приводит к тривиальному занулению компоненты φ_2.

Перейдем теперь от глобальной инвариантности к локальной. Сначала локализуем $SO_\varepsilon(2)$ лагранжианы. Как обычно [5], если групповой параметр зависит от точки пространства-времени $\alpha = \alpha(x)$, необходимо удлинить производную калибровочными полями A_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \hat{T}, \qquad \hat{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} & -\varepsilon^2 \\ 1 & \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\hat{T}_\varepsilon$ – генератор преобразований (17). Соответственно, семейство лагранжианов (16) в декартовых координатах

$$L_\varepsilon = \left(\partial_\mu\varphi_1 - \varepsilon^2 A_\mu\varphi_2\right)^2 + \varepsilon^2\left(\partial_\mu\varphi_2 + A_\mu\varphi_1\right)^2 + V(\varphi_1^2 + \varepsilon^2\varphi_2^2) +$$
$$+ f(\varphi_1^2 + \varepsilon^2\varphi_2^2)\cdot\left(\varphi_2\partial_\mu\varphi_1 - \varphi_1\partial_\mu\varphi_2 - A_\mu(\varphi_1^2 + \varepsilon^2\varphi_2^2)\right)^2 + L_{YM}, \tag{26}$$

где L_{YM} – лагранжиан калибровочного поля. При $f = 0$, (26) описывает заряженное комплексное скалярное поле, взаимодействующее с электромагнитным обычным способом [5]. При $f \neq 0$ имеем нелинейное взаимодействие полей φ_i и A_μ. Напомним, что калибровочные преобразования для группы $SO_\varepsilon(2)$ выглядят

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow exp(\delta(x)\hat{T}_\varepsilon)\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\delta(x). \tag{27}$$

При переходе к пределу $\lim_{\varepsilon\to 0} SO_\varepsilon(2)$ из (26) получаем локализованный $G(1)$ лагранжиан

$$L_c = (\partial_\mu\varphi_1)^2 + V(\varphi_1^2) + f(\varphi_1^2)\cdot\varphi_1^4\left(\partial_\mu\frac{\varphi_2}{\varphi_1} - A_\mu\right)^2 + L_{YM}, \tag{28}$$

с галилеевыми калибровочными преобразованиями

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_1, \qquad \varphi_2 \longrightarrow \varphi_2 + \delta(x)\varphi_1, \qquad A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\delta. \tag{29}$$

Те же формулы в ”контрактированных“ полярных

$$L_c = (\partial_\mu\rho_c)^2 + V(\rho_c^2) + f(\rho_c^2)\cdot\rho_c^4\left(\partial_\mu\alpha_c - A_\mu\right)^2 + L_{YM}. \tag{30}$$

$$\rho_c \longrightarrow \rho_c, \qquad \alpha_c \longrightarrow \alpha_c + \delta(x), \qquad A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\delta. \tag{31}$$

Введем, пользуясь калибровочной инвариантностью, поле B_μ (фиксация калибровки)

$$B_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha_c,$$

тогда лагранжиан будет иметь штюкельберговский вид [6]

$$L_c = (\partial_\mu \rho_c)^2 + V(\rho_c^2) + f(\rho_c^2)\rho_c^4 B_\mu^2 + L_{YM}, \tag{32}$$

а преобразования (31) станут тождественными. При специальном выборе $f(\rho_c^2)\rho_c^4 = m^2$, третье слагаемое можно интерпретировать как массовый член калибровочного поля.

4. Предельный переход $SU(2) \to E(2)$

Первая неабелева калибровочная теория была предложена Янгом и Миллсом для группы внутренней симметрии $SU(2)$ [7]. Посмотрим, как работает наш метод в этом случае. Для полей $(\varphi_1,\, \varphi_2)^t \in \mathrm{C}^2$, преобразуемых группой $H = SU(2)$, инвариантами являются

$$\mathrm{I} \;=\; |\mathrm{d}\varphi_1|^2 + |\mathrm{d}\varphi_2|^2, \tag{33}$$

$$\mathrm{J} \;=\; f(|\mathrm{d}\varphi_1|^2 + |\mathrm{d}\varphi_2|^2) \cdot |\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1 - \varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2|^2 . \tag{34}$$

В качестве объемлющей группы G выберем $SL(2, C)$.

Нам понадобятся комплексные "сферические" координаты

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\beta \\ e^{i\gamma}\sin\beta \end{pmatrix} = \rho\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$\rho = \sqrt{|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2}, \tag{36}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\beta & -e^{-i\gamma}\sin\beta \\ e^{i\gamma}\sin\beta & e^{-i\alpha}\cos\beta \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Отметим, что сумма I и $R(\rho) \cdot \mathrm{J}$ не будет в этом случае являться неевклидовым обобщением инварианта I, поскольку

$$\mathrm{I} \to (\mathrm{d}\rho)^2 + R(\rho)\rho^2 \left(\mathrm{d}\beta^2 + \cos^2\beta \mathrm{d}\alpha^2 + \sin^2\beta \mathrm{d}\gamma^2\right) \neq \mathrm{I} + f(\rho) \cdot \mathrm{J}. \tag{37}$$

Тем не менее, $SU(2)$–инвариантный лагранжиан выбираем в виде

$$L_o = |\partial_\mu \varphi_1|^2 + |\partial_\mu \varphi_2|^2 + V(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) + \\ + f(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\, |\varphi_2 \partial_\mu \varphi_1 - \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2|^2 . \tag{38}$$

Опуская описание глобальной $SU(2)$ – контракции перейдем сразу к локальной $SU(2)$ калибровочной теории. Локализация, как обычно, приводит к необходимости удлинения производной

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 + iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 - iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$D_\mu \varphi_1 = \left(\partial_\mu + igA_\mu^3\right)\varphi_1 + ig(A_\mu^1 + iA_\mu^2)\varphi_2, \tag{40}$$

$$D_\mu \varphi_2 = \left(\partial_\mu - igA_\mu^3\right)\varphi_2 + ig(A_\mu^1 - iA_\mu^2)\varphi_1,$$

и добавления L_{YM} в лагранжиане (38)

$$L_o = |D_\mu \varphi_1|^2 + |D_\mu \varphi_2|^2 + V(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) + \\ + f(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\, |\varphi_2 D_\mu \varphi_1 - \varphi_1 D_\mu \varphi_2|^2 + L_{YM}. \quad (41)$$

Или в сферических координатах (35)

$$L_o = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 \left((B^1_\mu)^2 + (B^2_\mu)^2 + (B^3_\mu)^2\right) + V(\rho^2) + \\ + f(\rho^2)\left((B^1_\mu)^2 + (B^2_\mu)^2\right), \quad (42)$$

где калибровочные поля B_μ мы связали с полями A_μ калибровочными преобразованиями

$$\begin{pmatrix} B^3_\mu & B^1_\mu + iB^2_\mu \\ B^1_\mu - iB^2_\mu & -B^3_\mu \end{pmatrix} = \Omega A_\mu \Omega^+ + \partial_\mu \Omega \Omega^+. \quad (43)$$

После введения параметра ε в (41), получим набор лагранжианов в декартовых координатах

$$L_\varepsilon = |D^\varepsilon_\mu \varphi_1|^2 + \varepsilon^2 |D^\varepsilon_\mu \varphi_2|^2 + V(|\varphi_1|^2 + \varepsilon^2|\varphi_2|^2) + \\ + f(|\varphi_1|^2 + \varepsilon^2|\varphi_2|^2)\left|\varphi_2 D^\varepsilon_\mu \varphi_1 - \varphi_1 D^\varepsilon_\mu \varphi_2\right|^2 + L_{YM}, \quad (44)$$

с ε–деформированной ковариантной производной

$$D^\varepsilon_\mu = \partial_\mu + ig \begin{pmatrix} A^3_\mu & \varepsilon^2\left(A^1_\mu + iA^2_\mu\right) \\ A^1_\mu - iA^2_\mu & -A^3_\mu \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Переходя к “деформированным” сферическим координатам

$$\rho^2_\varepsilon = |\varphi_1|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_2|^2, \quad (46)$$

$$\Omega_\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\varepsilon\beta & -\varepsilon e^{-i\gamma}\sin\varepsilon\beta \\ \frac{1}{\varepsilon} e^{i\gamma}\sin\varepsilon\beta & e^{-i\alpha}\cos\varepsilon\beta \end{pmatrix} \in SU_\varepsilon(2)$$

получим лагранжиан

$$L_\varepsilon = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2\left(\varepsilon^2\left((B^1_\mu)^2 + (B^2_\mu)^2\right) + (B^3_\mu)^2\right) + V(\rho^2) + \\ + f(\rho^2)\rho^2\left((B^1_\mu)^2 + (B^2_\mu)^2\right) + L_{YM}, \quad (47)$$

где

$$\begin{pmatrix} B^3_\mu & \varepsilon^2\left(B^1_\mu + iB^2_\mu\right) \\ B^1_\mu - iB^2_\mu & -B^3_\mu \end{pmatrix} = \Omega_\varepsilon A_\mu \Omega^{-1}_\varepsilon + \partial_\mu \Omega_\varepsilon \Omega^{-1}_\varepsilon. \quad (48)$$

При $\varepsilon \to 0$ в (46) и (47) будем иметь $E(2)$ – калибровочную теорию

$$L_c = (\partial_\mu \rho_c)^2 + \rho^2_c \left(B^3_\mu\right)^2 + V(\rho^2_c) + f(\rho^2_c)\left((B^1_\mu)^2 + (B^2_\mu)^2\right) + L_{YM}. \quad (49)$$

При $f = M^2$ калибровочные бозоны B^1_μ и B^2_μ массивны, а B^3_μ остался безмассовым.

5. Выводы

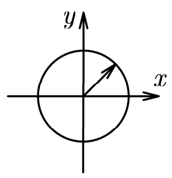
В работе предложен простой способ получения неполупростых калибровочных теорий с помощью операции предельного перехода. Применимость этого метода к изучению неполупростых калибровочных теорий требует дальнейших исследований. Например, $E(2)$ калибровочную теорию можно получить также контракцией $SO(3)$ группы, что приведет, по-видимому, к другим формулам. Кроме того, существует вариант локализации слагаемых в (7) разными калибровочными полями.

$$L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \longrightarrow L_H(\varphi_i, (\partial_\mu + A_\mu)\varphi_i) + \\ + f_H \cdot L_G(\varphi_i, (\partial_\mu + B_\mu)\varphi_i) + L_{YM}(A_\mu, B_\mu, \partial_\mu A_\mu, \partial_\mu B_\mu), \quad (50)$$

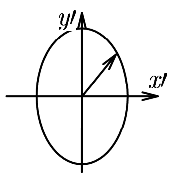
где A_μ принадлежит подалгебре H, а $B_\mu \in G$. Эти вопросы будут изучены отдельно.

Приложение

Напомним кратко идею контракций групп на примере перехода $SO(2)$ вращения в преобразования Галилея, который можно рассматривать как сингулярную замену переменных. Рассмотрим вращение единичного вектора (a, b) по окружности



$x^2 + y^2 = 1$



$x'^2 + \varepsilon^2 y'^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Проведем гладкую замену переменных

$$x' = x, \qquad y' = y/\varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \quad (52)$$

в которых наш вектор имеет компоненты

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b/\varepsilon \end{pmatrix} \quad (53)$$

и вращается теперь по эллипсу $x'^2 + \varepsilon^2 y'^2 = 1$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varepsilon\sin\varphi \\ (\sin\varphi)/\varepsilon & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}} & \frac{-\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}} \\ \frac{\text{tg } \varphi'}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}} & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

где мы учли, что $\text{ tg } \varphi' = y'/x = y/(\varepsilon x) = (\text{ tg } \varphi)/\varepsilon$. В новых переменных „поворот“ (51) выглядит

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi'}} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \text{ tg } \varphi' \\ \text{tg } \varphi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \quad (55)$$

и при $\varepsilon \to 0$ переходит в преобразования Галилея

$$a' \to a', \qquad b' \to b' + a' \text{ tg } \varphi'. \quad (56)$$

Таким образом, сингулярная при $\varepsilon \to 0$ замена переменных (52), приводит к переходу, или контракции, от группы вращений $SO(2)$ к группе Галилея. В неабелевом случае, контракции связывают неизоморфные группы.

Литература

1. **Костяков И.В., Куратов В.В.** Массивные поля Янга-Миллса, трансляционные и неполупростые калибровочные симметрии. // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика, выпуск 10, с.57-70. //ArXiv:0909.0634 [hep-th].

2. **Higgs P.W.** Broken symmetry and the masses of gauge bosons. // Physical Review Letters. V.13. 1964. p.508. **Englert, Brout R.** Broken symmetry and the masses of gauge vector mesons.// Physical Review Letters. V.13. 1964. p.321.

3. **Nappi C.R., Witten E.** Wess-Zumino-Witten model based on a non-semisimple group.// Physical Review Letters. V.71. 1993. Pp. 3751-3753. **Tseytlin A.A.** On gauge theories for non-semisimple groups. // Nuclear Physics B. V.450. № 1-2. 1995. Pp. 231-250.

4. **Громов Н.А.** Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. КНЦ, Сыктывкар, 1990.

5. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. // Главная редакция физико-математической литературы изд. „Наука“, М. 1978. 249с. **Пескин М., Шредер Д.** Введение в квантовую теорию поля. // Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2001. 784с. **Поляков А.М.** Калибровочные поля и струны. // Ижевск: Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999. 312 с.

6. **Stueckelberg E.C.** Helv. Phys. Acta. V.11. 1938. Pp.226,229.

7. **Yang C.N. and Mills R.L.** Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance.// Physical Review. N96. 1954. Pp. 191-195.

Summary

Kostyakov I.V., Kuratov V.V. Limit transitions in gauge theories.

We show how to obtain Lagrangians with nonsemisimple gauge symmetry, using contractions. The limit transitions of $SO(2)$ and $SU(2)$ gauge theories are considered.

Отдел математики КНЦ УРО РАН *Поступила 26.04.2010*