*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.11.2010*

УДК 512.556

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕТКОЙ ИХ ПОДАЛГЕБР

Е.М. Вечтомов, В.В. Сидоров

Решена задача определяемости полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр. Именно, доказано, что изоморфность решеток всех подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций на произвольных топологических пространствах влечет изоморфность самих полуколец непрерывных функций.

Введение

Идея координатизации, представления одних математических объектов в других, производных объектах пронизывает всю математику. Обычно исходные математические объекты имеют тополого-геометрическую природу, а производные объекты — арифметико-алгебраическую. Можно назвать двойственности Понтрягина, М. Стоуна, Хьюитта, классические функторы алгебраической геометрии и алгебраической топологии. Задачи определяемости топологических пространств заданными на них алгебраическими системами непрерывных функций занимают видное место в современной математике. Важным направлением исследований в абстрактной алгебре служит изучение связей той или иной алгебраической структуры с группой ее автоморфизмов, полугруппой эндоморфизмов, решеткой конгруэнций, решеткой подалгебр. В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров [7] доказали одну из первых теорем определяемости топологических пространств: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$ всех заданных на нем непрерывных действительнозначных функций. Эта теорема послужила образцом для различных обобщений и углублений как за счет ослабления ограничений на топологию пространства X, так и за счет рассмотрения других функционально-алгебраических объектов, связанных с X (см. обзор [2]). Большая статья Хьюитта 1948 г. [14] стала основополагающей в классической теории колец непрерывных действительнозначных функций, изложенной позднее в известной монографии Гиллмана и Джерисона [13]. Хьюитт доказал определяемость всякого хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$.

Полукольца непрерывных действительнозначных функций представляют собой дальнейший этап в развитии теории колец $C(X)$. Систематическое изучение полуколец $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций на топологических пространствах X началось в 90-е годы XX века (см. [1], [5], [12]). Заметим, что для всякого топологического пространства X кольцо $C(X) = C^+(X) - C^+(X)$ есть кольцо разностей полукольца $C^+(X)$, а полукольцо $C^+(X)$ совпадает с множеством всевозможных квадратов элементов кольца $C(X)$. Поэтому любой изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(X)$ и $C(Y)$, и обратно, любой изоморфизм α колец $C(X)$ и $C(Y)$ является продолжением некоторого единственного изоморфизма — ограничения α на $C^+(X)$ — полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Следовательно, задача определяемости произвольного хьюиттовского пространства X полукольцом $C^+(X)$ равносильна задаче определяемости хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$. Для решеток подалгебр кольца $C(X)$ и полукольца $C^+(X)$, тем более полукольца $C^\vee(X)$, подобной связи уже нет.

В статье [3] Е. М. Вечтомовым была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой всех подалгебр кольца $C(X)$. В настоящей работе мы решили задачу определяемости произвольного хьюиттовского пространства X решеткой всех подалгебр как полукольца $C^+(X)$, так и полукольца $C^\vee(X)$ (теорема 4). Сама задача была поставлена более 10 лет тому назад (см. [4]). Из этого результата следует определяемость каждого из полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ решеткой их подалгебр (теорема 5). В доказательстве основной теоремы 4 применяется оригинальная техника однопорожденных подалгебр, решеточная характеризация которых дана в теореме 1.

Полученные результаты доложены и анонсированы в [6].

1. Предварительные сведения

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует аддитивно сократимое полукольцо $C^+(X)$. На множестве $C^+(X)$ существует также операция

$\vee$:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Относительно поточечных операций max-сложения и обычного умножения множество $C^+(X)$ становится аддитивно идемпотентным полукольцом $C^\vee(X)$. *Подалгеброй* в полукольце $C^+(X)$ или $C^\vee(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ [1], идеалы полукольца $C^+(X)$ или $C^\vee(X)$.

Обозначим через $A^+(X)$ ($A^\vee(X)$) решетку всех подалгебр полукольца $C^+(X)$ (соответственно, $C^\vee(X)$) относительно включения $\subseteq$. Через $A(X)$ будем обозначать любую из решеток $A^+(X)$, $A^\vee(X)$. Решетка $A(X)$ является алгебраической, то есть полной компактно порожденной решеткой [8, стр.111]. Символ $\subset$ всегда означает строгое включение. Решеточными операциями в $A^+(X)$ служат $A \cap B$ и $A \vee B = A + B + AB$ для всех $A, B \in A^+(X)$, где $AB = \{$конечная сумма $\sum f_i g_i \colon f_i \in A,\ g_i \in B\}$, а в решетке $A^\vee(X)$: $A \cap B$ и $A \vee B = A \vee B \vee AB$ для любых $A, B \in A^\vee(X)$, где $AB = \{$точная верхняя грань конечного числа функций $\bigvee f_i g_i \colon f_i \in A,\ g_i \in B\}$. [2] Минимальные (ненулевые) подалгебры в $C^+(X)$ или $C^\vee(X)$ — это атомы решетки $A(X)$. Отметим, что решетки $A^+(X)$ и $A^\vee(X)$ не обязаны совпадать как множества (см. [10]).

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $V \subset X$ и любой точки $x \in X \backslash V$ найдется функция $\lambda \in C^+(X)$ такая, что $\lambda(V) = \{0\}$ и $\lambda(x) = 1$. Тихоновские пространства — это, с точностью до гомеоморфизма, подпространства тихоновских степеней числовой прямой $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется *хьюиттовским*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Известно [13, теоремы 3.9 и 8.7], что для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а, значит, и изоморфны соответствующие им полукольца $C^+(X)$ и $C^+(\nu\tau X)$, $C^\vee(X)$ и $C^\vee(\nu\tau X)$.

Говорят, что *полукольцо* $C^+(X)$ (*хьюиттовское пространство* X) *определяется решеткой* $A^+(X)$, если для любого (хьюиттовского) топологического пространства Y изоморфность решеток $A^+(X)$ и $A^+(Y)$

[1] Подалгебра констант $\mathbb{R}^\vee$ полукольца $C^\vee(X)$, совпадающая как множество с $\mathbb{R}^+$, всюду обозначается через $\mathbb{R}^+$. Это не повлечет недоразумений.

[2] Символ $\vee$ в зависимости от контекста обозначает либо точную верхнюю грань подалгебр, либо точную верхнюю грань функций.

влечет изоморфность полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ (гомеоморфность пространств X и Y)[3].

Множества $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ и $\operatorname{coz} f = X \backslash Z(f), f \in C(X)$, называются нуль-множеством и конуль-множеством соответственно.

Ключевую роль в работе играют однопорожденные подалгебры.

Наименьшую подалгебру $A \in A(X)$, содержащую функцию $f \in C^+(X)$, назовем *однопорожденной* и обозначим $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f без свободных членов с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$ (в $C^\vee(X)$ многочленами от f являются функции вида $a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$).

Докажем технически важную лемму.

Лемма 1. *Для функции $f \in C^+(X) \backslash \mathbb{R}^+$ такой, что $1 \in \operatorname{im} f$, верны следующие утверждения:*

А. Пусть

$$f + r = a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad r, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+,\ a_n > 0,\ n \geqslant 2.$$

Тогда $f = 1$ при $r > 0$ и $\operatorname{im} f = \{0, 1\}$ при $r = 0$;

Б. Пусть

$$f = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+,\ a_n > 0,\ n \geqslant 2.$$

Тогда $a_1 = 1$ или $\operatorname{im} f = \{0, 1\}$.

Доказательство. А. Легко выводится из правила знаков Декарта [9, стр. 249].

Б. Допустим $a_1 \neq 1$ и $\operatorname{im} f \neq \{0, 1\}$. Тогда, учитывая $1 \in \operatorname{im} f$, получаем

$$a_1 < 1, \quad a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1.$$

Откуда

$$a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n < f$$

при $0 < f < 1$, и $a_k = 1$ при некотором $1 < k \leqslant n$. Последнее означает, что

$$a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n > f$$

при $f > 1$. Значит, $f = 1$, что противоречит выбору функции f. □

Аналогично [3, лемма 1] устроены минимальные подалгебры в $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$, то есть атомы решеток $A^+(X)$ и $A^\vee(X)$.

---

[3] Аналогично для полуколец $C^\vee(X)$.

Лемма 2. *Подалгебра $A \in A(X)$ минимальна $\Longleftrightarrow$ $A = e\mathbb{R}^+$ для некоторого ненулевого идемпотента $e \in C^+(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что подалгебры $e\mathbb{R}^+$, где $e \neq 0$ и $e^2 = e \in C^+(X)$, минимальны. Предположим, что A — минимальная подалгебра на X. Возьмем ненулевую функцию $f \in A$ и рассмотрим подалгебру $\langle f^2 \rangle$. Тогда $A = \langle f^2 \rangle$ и $f = f^2 g$ для подходящего многочлена g от f с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Положив $e = fg \in A$, имеем $\mathrm{Z}(e) = \mathrm{Z}(f)$ и $e = 1$ на $\operatorname{coz} f$. Следовательно, $e^2 = e$ и $A = e\mathbb{R}^+$. □

Лемма 3. *А. Для любых различных минимальных подалгебр $A, B \in A^+(X)$ подалгебра $A \vee B$ включает в себя в точности две или три минимальные подалгебры из $A^+(X)$.*

Б. Для любых различных минимальных подалгебр $A, B \in A^\vee(X)$ подалгебра $A \vee B$ включает в себя в точности две,три или четыре минимальные подалгебры из $A^\vee(X)$.

Доказательство. Поскольку A и B — различные минимальные подалгебры из $A(X)$, то согласно лемме 2 имеем $A = e_1\mathbb{R}^+$ и $B = e_2\mathbb{R}^+$, где e_1 и e_2 — различные ненулевые идемпотенты из $C^+(X)$. Если $\operatorname{coz} e_1 \subset \operatorname{coz} e_2$ или $\operatorname{coz} e_2 \subset \operatorname{coz} e_1$, то подалгебра $A \vee B$ включает в точности две минимальные подалгебры $e_1\mathbb{R}^+$ и $e_2\mathbb{R}^+$.

Если $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$, то три минимальные подалгебры:

А. $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $(e_1 + e_2)\mathbb{R}^+$;

Б. $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $(e_1 \vee e_2)\mathbb{R}^+$.

Наконец, в случае $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 \neq \varnothing$, $\operatorname{coz} e_1 \not\subseteq \operatorname{coz} e_2$, $\operatorname{coz} e_2 \not\subseteq \operatorname{coz} e_1$ имеем три или четыре минимальные подалгебры:

А. $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $e_1e_2\mathbb{R}^+$;

Б. $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $e_1e_2\mathbb{R}^+$, $(e_1 \vee e_2)\mathbb{R}^+$. □

Следствие 1. *Минимальная подалгебра $A \in A(X)$ совпадает с $\mathbb{R}^+$ $\Longleftrightarrow$ для любой минимальной подалгебры $B \in A(X)$, отличной от A, подалгебра $A \vee B$ содержит ровно две минимальные подалгебры из $A(X)$. Значит, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ решететочно выделяется в $A(X)$.* □

Заметим, что подалгебра констант $\mathbb{R}$ не обязана выделяться в решетке всех подалгебр кольца $C(X)$ (см. [3]).

Напомним определения $\vee$-неразложимого (см. [8, стр. 75]) и компактного элементов решетки (см. [8, стр. 110]). Элемент A решетки L называется $\vee$-неразложимым, если из того, что $A = B \vee C$ для $B, C \in L$, следует $A = B$ или $A = C$. Элемент A полной решетки называется компактным, если для любого непустого семейства $(A_i)_{i\in J}$ ее элементов $A \leqslant \bigvee\limits_{j\in J} A_j$ влечет $A \leqslant \bigvee\limits_{i\in I} A_i$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$. Очевидно, в решетке $A(X)$ компактность элемента A равносильна его конечнопорожденности.

Решеточное описание однопорожденных подалгебр дает

Теорема 1. *Однопорожденные подалгебры из $A(X)$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решетки $A(X)$.*

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle = A\vee B$, где $A, B \in A(X)$ и $A, B \subset \langle f\rangle$. Очевидно, функция f не может быть мультипликативным идемпотентом. Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \in \operatorname{im} f$. Элементами подалгебр A и B служат многочлены не ниже второй степени от f с неотрицательными коэффициентами без свободного члена.

А. Случай $A(X) = A^+(X)$. Функция f как элемент $A \vee B$ имеет вид

$$f = a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, a_n > 0, n \geqslant 2.$$

Согласно лемме 1 имеем $\operatorname{im} f = \{0, 1\}$, что невозможно. Значит, подалгебра $\langle f\rangle$ — $\vee$-неразложима в $A^+(X)$.

Б. Случай $A(X) = A^\vee(X)$. Функция f как элемент $A \vee B$ имеет вид

$$f = P_0(f) \vee Q_0(f) \vee P_1(f)Q_1(f) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(f),$$

где P_i и Q_i — многочлены не ниже второй степени с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$ без свободных членов. Поскольку многочлен

$$P_1(f)Q_1(f) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(f),$$

будучи не нулевым, не содержит монома первой степени и не является мультипликативным идемпотентом, то согласно лемме 1

$$P_1(f)Q_1(f) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(f) \neq f.$$

Следовательно, многочлен P_0 или Q_0 отличен от нулевого и содержит моном f. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$P_0(f) = f \vee a_2 f^2 \vee \ldots \vee a_n f^n, \quad a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, a_n > 0, n \geqslant 2.$$

Очевидно, $P_0(f) \geqslant f$. Поскольку $P_0(f) \neq f$, то $P_0(f(x_0)) > f(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in X$. Противоречие.

Компактность подалгебры $\langle f\rangle$ очевидна. Для завершения доказательства осталось заметить, что если любая система образующих конечнопорожденной подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$-разложима. □

2. Подалгебры специального типа

Подалгебру $A \in A(X)$ назовем:

— *sp-подалгеброй*, если любая ненулевая функция $f \in A$ строго положительна, то есть $\inf f > 0$;

— *b-подалгеброй*, если все ее функции ограничены сверху;

— *u-подалгеброй*, если нуль-множества всех ее ненулевых функций пустые;

— *z-подалгеброй*, если каждая ее функция имеет непустое нуль-множество.

Ясно, что все sp-подалгебры являются u-подалгебрами, а в случае *компакта* X (то есть компактного хаусдорфова пространства) верно и обратное, при этом все подалгебры будут b-подалгебрами.

Заметим также, что подалгебра $A \in A(X)$ обладает свойством P (быть sp-, b-, u- или z-подалгеброй) тогда и только тогда, когда любая $\langle f \rangle \subseteq A$ обладает свойством P. Подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ является sp-, b- и u-подалгеброй, но не является z-подалгеброй. Поэтому для решеточной характеризации sp-, b-, u- или z-подалгебр в $A(X)$ можно ограничится однопорожденными подалгебрами, отличными от $\mathbb{R}^+$.

С этого момента пространство X считаем тихоновским.

Утверждение 1. *А. Для произвольной функции* $f \in C^+(X) \backslash \mathbb{R}^+$

$$\langle f \rangle \text{ — sp-подалгебра} \iff \langle f \rangle \subset \langle g \rangle \vee \mathbb{R}^+ \text{ и } \langle f \rangle \nsubseteq \langle g \rangle$$

для некоторой подалгебры $\langle g \rangle$.

Б. Для произвольной функции $f \in C^{\vee}(X) \backslash \mathbb{R}^+$

$$\langle f \rangle \text{ — sp-подалгебра} \iff \langle f \rangle \subset \langle g_1 \rangle \vee \langle h_1 \rangle$$

для некоторых подалгебр $\langle g_1 \rangle$ *и* $\langle h_1 \rangle$ *таких, что*

$$\langle g_1 \rangle \subset \langle g \rangle \vee \mathbb{R}^+, \quad \langle g_1 \rangle \nsubseteq \langle g \rangle, \quad \langle h_1 \rangle \subset \langle h \rangle \vee \mathbb{R}^+, \quad \langle h_1 \rangle \nsubseteq \langle h \rangle \tag{2.1}$$

для некоторых подалгебр $\langle g \rangle$ *и* $\langle h \rangle$.

Доказательство. А. Пусть $\inf f > 0$. Можно считать, что $f > 1$ и $1 \in \operatorname{im} f$. Тогда подалгебра $\langle g \rangle$, порожденная функцией $g = f - 1$, будет искомой. В самом деле, включение $\langle f \rangle \subset \langle g \rangle \vee \mathbb{R}^+$ очевидно, а по лемме 1 $\langle f \rangle \nsubseteq \langle g \rangle$.

Обратно, пусть $\langle f \rangle \subset \langle g \rangle \vee \mathbb{R}^+$. Тогда $f = g_1 + r$ для некоторой функции $g_1 \in \langle g \rangle$ и числа $r \geqslant 0$. Поскольку $\langle f \rangle \nsubseteq \langle g \rangle$, то $r > 0$. Значит, $\langle f \rangle$ — sp-подалгебра.

Б. Пусть $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра, отличная от $\mathbb{R}^+$. Можно считать, что $f>1$. Выберем точки $x_0, y_0 \in X$ и числа $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ такие, что

$$a < f(x_0) < b < f(y_0) < c.$$

Тогда множества

$$A = \{x \in X\colon f(x) \notin (a, b)\}, \quad B = \{x \in X\colon f(x) \notin (b, c)\}$$

будут непустыми и замкнутыми. Воспользуемся тем, что пространство X — тихоновское и рассмотрим пару функций $\lambda_A, \lambda_B \in C^\vee(X)$ таких, что

$$\lambda_A\colon \begin{cases} A \to 1; \\ x_0 \to 0; \\ \lambda_A \leqslant 1; \end{cases} \quad \lambda_B\colon \begin{cases} B \to 1; \\ y_0 \to 0; \\ \lambda_B \leqslant 1. \end{cases}$$

Положим

$$h = f\lambda_A, \quad g = f\lambda_B, \quad h_1 = f\lambda_A \vee 1, \quad g_1 = f\lambda_B \vee 1.$$

Тогда для функций h, h_1, g и g_1 верны включения 2.1. В самом деле, справедливость включений

$$\langle g_1\rangle \subset \langle g\rangle \vee \mathbb{R}^+, \quad \langle h_1\rangle \subset \langle h\rangle \vee \mathbb{R}^+$$

следует из способа задания функций g_1 и h_1; поскольку $h_1(x_0) = g_1(y_0) = 1$, но $h(x_0) = g(y_0) = 0$, то

$$\langle g_1\rangle \nsubseteq \langle g\rangle, \quad \langle h_1\rangle \nsubseteq \langle h\rangle.$$

Осталось заметить, что $f = g_1 \vee h_1$.

Обратно, пусть $f = g_1 \vee h_1$. Тогда

$$f = P_0(g_1) \vee Q_0(h_1) \vee P_1(g_1)Q_1(h_1) \vee \ldots \vee P_n(g_1)Q_n(h_1),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов. Включения 2.1 показывают, что $\langle g_1\rangle$ и $\langle h_1\rangle$ — sp-подалгебры. Поскольку $f \neq 0$, то хотя бы одна из функций $P_0(g_1)$, $Q_0(h_1)$, $P_1(g_1)Q_1(h_1)$,..., $P_n(g_1)Q_n(h_1)$ отлична от нулевой, а, значит, строго положительная. Следовательно, $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра. $\square$

Получим описание однопорожденных b-подалгебр.

Утверждение 2. *А. Для произвольной функции* $f \in C^+(X)\backslash\mathbb{R}^+$

$$\langle f\rangle \text{ — b-подалгебра} \iff \mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$$

для некоторой sp-подалгебры $\langle g\rangle \neq \mathbb{R}^+$.

Б. Для произвольной функции $f \in C^\vee(X)\backslash\mathbb{R}^+$ *подалгебра* $\langle f\rangle$ *является b-подалгеброй* $\iff$ *для любой ненулевой sp-подалгебры* $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle \vee \mathbb{R}^+$ *найдется sp-подалгебра* $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$ *такая, что* $\mathbb{R}^+ \subset \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$.

Доказательство. А. Пусть $\langle f\rangle$ — b-подалгебра. Можно считать, что $f < 1$. Положим $g = 1 - f$. Тогда $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$ и $\langle g\rangle \neq \mathbb{R}^+$, так как $f \notin \mathbb{R}^+$.

Обратно, пусть $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$ для некоторой sp-подалгебры $\langle g\rangle \neq \mathbb{R}^+$. Тогда

$$1 = P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g),$$

где P_i, Q_j — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов. Предположим, $\sup f = +\infty$. Тогда $P_0 = 0$. Далее, поскольку $g \notin \mathbb{R}^+$, то $P_iQ_i \neq 0$ для некоторого $i \geqslant 1$. Откуда с учетом $\inf g > 0$ имеем $\sup P_iQ_i = +\infty$, что невозможно. Значит, $\langle f\rangle$ — b-подалгебра.

Б. Пусть $\langle f\rangle$ — b-подалгебра. Если $\langle g\rangle = \mathbb{R}^+$, то $\mathbb{R}^+ \subset \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ для любой sp-подалгебры $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$. В случае, когда $\langle g\rangle \neq \mathbb{R}^+$ достаточно положить $h = g^{-1}$.

Обратно, включение $\mathbb{R}^+ \subset \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ означает, что

$$1 = P_0(g) \vee Q_0(h) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \ldots \vee P_n(g)Q_n(h),$$

где P_i и Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов. Допустим, $\langle g\rangle$ — не b-подалгебра. Тогда функция $P_i(g)$ — либо нулевая, либо неограничена сверху. Поэтому функция $P_0(g)$ необходимо нулевая. Так как $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$, то функция $P_j(g)Q_j(h)$ — ненулевая для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n$. Но $\langle h\rangle$ — sp-подалгебра, поэтому функция $P_j(g)Q_j(h)$ неограничена сверху. Противоречие. Значит, все sp-подалгебры в $\langle f\rangle \vee \mathbb{R}^+$ являются b-подалгебрами. А это возможно лишь тогда, когда $\langle f\rangle$ — b-подалгебра. □

Итак, решеточно охарактеризованы sp- и b-подалгебры $\langle f\rangle$. Опишем z-подалгебры $\langle f\rangle$.

Утверждение 3. *А. Для любой функции* $f \in C^+(X)\backslash\mathbb{R}^+, \inf f = 0$

$$\langle f\rangle \text{ — z-подалгебра} \iff \mathbb{R}^+ \not\subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$$

для произвольной не b-подалгебры $\langle g\rangle$.

Б. Для любой функции $f \in C^{\vee}(X)\backslash\mathbb{R}^+, \inf f = 0$

$$\langle f\rangle \text{ — } z\text{-}\textit{подалгебра} \iff \textit{включение } \mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$$

означает, что $\langle g\rangle$ *— b-подалгебра.*

Доказательство. А. Пусть $\langle f\rangle$ — z-подалгебра и $\mathbb{R}^+ \nsubseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$. Тогда

$$1 = P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g),$$

где P_i, Q_j — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов. Откуда для произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Z}(f)$ получаем

$$1 = (P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g))\,(x_0) = Q_0(g)(x_0).$$

Следовательно, $Q_0 \neq 0$ и $\sup g < +\infty$.

Обратно, пусть $f > 0$. Тогда функция $g = f^{-1} \in C^+(X)$ — неограниченная сверху в силу $\inf f = 0$ и $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$, что противоречит условию. Значит, $\langle f\rangle$ — z-подалгебра.

Б. Пусть $\langle f\rangle$ — z-подалгебра и $x_0 \in \mathrm{Z}(f)$. Включение $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$ означает, что

$$1 = P_0(f) \vee Q_0(g) \vee P_1(f)Q_1(g) \vee \ldots \vee P_n(f)Q_n(g),$$

где P_i и Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов. Так как

$$(P_0(f) \vee Q_0(g) \vee P_1(f)Q_1(g) \vee \ldots \vee P_n(f)Q_n(g))\,(x_0) = Q_0(g)(x_0) = 1,$$

то многочлен Q_0 отличен от нулевого. Следовательно, функция g ограничена сверху, то есть $\langle g\rangle$ — b-подалгебра.

Обратно, если функция f всюду положительна, то, принимая во внимание $\inf f = 0$, получаем, что подалгебра $\langle g\rangle = \langle f^{-1}\rangle$ — не b-подалгебра, хотя $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$. Противоречие. Значит, $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$, то есть $\langle f\rangle$ — z-подалгебра. □

Утверждение 4. *Для однопорожденной подалебры* $\langle f\rangle \in A(X)$

$$\langle f\rangle \text{ — } u\text{-}\textit{подалгебра} \iff \langle f\rangle \text{ — } \textit{не } z\text{-}\textit{подалгебра}\ .$$

□

Итогом предложений 1–4 служит принципиально важная

Теорема 2. *Свойства подалгебры решетки* $A(X)$ *быть sp-подалгеброй, b-подалгеброй, u-подалгеброй или z-подалгеброй являются решеточными.* □

3. Определяемость

С каждой точкой $x \in X$ естественным образом связана подалгебра
$$M_x = \{f \in C^+(X)\colon f(x) = 0\} \in A^+(X)$$
всех функций из $C^+(X)$, равных нулю в этой точке. Подалгебра $M_x \vee \mathbb{R}^+$ образована всеми функциями $C^+(X)$, принимающих в точке x наименьшее значение. Для полукольца $C^\vee(X)$ множество функций M_x также образует подалгебру.

Дадим решеточное описание подалгебр вида M_x для компакта X.

Теорема 3. *Пусть X — компакт. Тогда подалгебра $A \in A(X)$ имеет вид M_x для некоторой точки $x \in X \iff A$ — максимальная z-подалгебра.*

Доказательство. Пусть A — максимальная z-подалгебра решетки $A(X)$. Докажем существование точки $x \in X$, в которой все функции из A обращаются в нуль. Предположим противное, то есть для каждой точки $x \in X$ существует функция $f_x \in A$ такая, что $f_x(x) > 0$. Тогда и в некоторой открытой окрестности V_x точки x функция f_x будет положительна. Открытые множества вида V_x покрывают компакт X. Поэтому найдется конечное число точек $x, y, \ldots, z$ в X такое, что множества $V_x, V_y, \ldots, V_z$ будут также покрывать X. Функции $f_x + f_y + \ldots + f_z \in C^+(X)$ и $f_x \vee f_y \vee \ldots \vee f_z \in C^\vee(X)$ строго положительны на X и по крайне мере одна из них лежит в A, что невозможно. Пусть x — точка, в которой все функции из A обращаются в нуль. Поскольку A — максимальная z-подалгебра, то $A = M_x$. □

Из теоремы 3 с учетом теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть X — компакт. Тогда любая z-подалгебра содержится в некоторой подалгебре M_x, $x \in X$.* □

С этого момента считаем топологическое пространство X — хьюиттовским, то есть $X = \nu\tau X$. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация хьюиттовского пространства X. Принимая во внимание компактификационную теорему (см. [13, стр. 86]), получаем, что множество всех ограниченных функций полукольца $C^+(X)$ образует b-подалгебру $bC^+(X)$, канонически изоморфную $\mathbb{R}^+$-алгебре $C^+(\beta X)$. Поэтому решетка $bA^+(X)$ всех подалгебр полукольца $bC^+(X)$ канонически изоморфна решетке $A^+(\beta X)$. Поскольку полукольца $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ совпадают как множества, то b-подалгебра $bC^\vee(X)$ канонически изоморфна

$\mathbb{R}^+$-алгебре $C^\vee(\beta X)$. Значит, решетка $bA^\vee(X)$ всех подалгебр полукольца $bC^\vee(X)$ канонически изоморфна решетке $A^\vee(\beta X)$.

Совпадение полуколец $bC^+(X)$ и $bC^\vee(X)$ как множеств в дальнейших рассуждениях используется без дополнительных оговорок.

Лемма 4. *Точка $x \in \beta X$ лежит в $X \Longleftrightarrow$ прообраз подалгебры $M_x \vee \mathbb{R}^+ \in A(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решетки $bA(X)$ на решетку $A(\beta X)$ не содержит одноророжденной не sp, u-подалгебры.*

Доказательство. Если $x \in X$, то прообразом подалгебры $M_x \vee \mathbb{R}^+ \in A(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решетки $bA(X)$ на решетку $A(\beta X)$ служит подалгебра $(M_x \vee \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)$.

Пусть $x \in \beta X \backslash X$. Тогда согласно [11, теорема 3.11.10] найдется функция $f \in C^+(\beta X)$ такая, что $f(x) = 0$ и $f > 0$ на X. Значит, прообраз подалгебры $M_x \vee \mathbb{R}^+ \in A(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решетки $bA(X)$ на решетку $A(\beta X)$ содержит не sp, u-подалгебру $[f|_X]$. □

Теорема 4. *Всякое хьюиттовское пространство X определяется каждой из решеток $A^+(X)$ и $A^\vee(X)$.*

Доказательство. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y имеется изоморфизм α решетки $A(X)$ на решетку $A(Y)$. По теореме 2 α изоморфно отображает решетку $bA(X)$ на решетку $bA(Y)$. Если ψ_X и ψ_Y — канонические изоморфизмы решеток $bA(X)$ и $bA(Y)$ на $A(\beta X)$ и $A(\beta Y)$ соответственно, то отображение $\gamma = \psi_Y \circ \alpha \circ \psi_X^{-1}$ является изоморфизмом решеток $A(\beta X))$ и $A(\beta Y)$. Тогда соответствие

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \gamma(M_x \vee \mathbb{R}^+) = M_y \vee \mathbb{R}^+ \text{ для любых } x \in \beta X \text{ и } y \in \beta Y$$

согласно следствию 2 будет биекцией пространства βX на пространство βY.

Докажем, что φ — гомеоморфизм. Покажем, что φ сохраняет нуль-множества. Для этого возьмем произвольную функцию $f \in C^+(\beta X)$. Тогда $\gamma([f]) = [g]$ для некоторой $g \in C^+(\beta Y)$ и

$$\varphi\left(\mathrm{Z}(f)\right) = \varphi\left(\left\{x \in \beta X\colon [f] \text{ — z-подалгебра из } M_x \vee \mathbb{R}^+\right\}\right) = \\ = \left\{y \in \beta Y\colon [g] \text{ — z-подалгебра из } M_y \vee \mathbb{R}^+\right\} = \mathrm{Z}(g).$$

Точно также показывается, что φ^{-1} сохраняет нуль-множества. Поскольку нуль-множества образуют базу замкнутых множеств в любом тихоновском пространстве, то φ — гомеоморфизм пространств βX и βY. По лемме 4 ограничение $\varphi|_X$ гомеоморфно отображает X на Y. □

Из теоремы 4 аналогично [3, теорема 2] выводится

Теорема 5. *Для произвольных топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1. $A^{+}(X) \cong A^{+}(Y)$;
2. $C^{+}(X) \cong C^{+}(Y)$;
3. $A^{\vee}(X) \cong A^{\vee}(Y)$;
4. $C^{\vee}(X) \cong C^{\vee}(Y)$. □

Литература

1. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. С. 493-510.*
2. **Вечтомов Е.М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // *Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНИТИ. 1990. С. 3-46.*
3. **Вечтомов Е.М.** Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // *Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687-693.*
4. **Вечтомов Е.М.** Введение в полукольца. Киров: ВятГПУ, 2000.
5. **Вечтомов Е.М.** Полукольца непрерывных отображений // *Вестник ВятГГУ. 2004. № 10. С. 57-64.*
6. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** О решеточном изоморфизме полуколец непрерывных функций // *Тезисы докладов Международной алгебраической конференции. Новосибирск: Математический институт им. С.Л. Соболева. НГУ. 2009. С. 113.*
7. **Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // *Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11-15.*
8. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
9. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2000.

10. **Сидоров В.В.** Об условиях совпадения идеалов и max-идеалов в полукольце непрерывных функций // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2008. № 10. С. 89-92.*
11. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986.
12. **Artamonova I.I., Chermnykh V.V., Mikhalev A.V., Varankina V.I., Vechtomov E.M.** Semirings: sheaves and continuous functions // *Semigroups with applications, including semigroup rings. Sankt-Petersburg, 1999. P. 23-58.*
13. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. N.J.: Springer-Verlag, 1976.
14. **Hewitt E.** Rings of real-valued continuous functions. I // *Transactions of the American Mathematical Society. 1948. Vol. 64. № 1. P. 45-99.*

Summary

Vechtomov E.M., Sidorov V.V. On difinability of semirings of continuous functions by their subalgebra lattice

It is solved the problem of semirings of continuous functions difinability by their subalgebra lattice. Namely, it is proved that an isomorphism of lattices of all subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions over arbitrary topological spaces implies an isomorphism of semirings of continuous functions.

Вятский государственный
гуманитарный университет

Поступила 11.02.10