*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.11.2010*

**УДК 512.64**

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ [1]

***Ю.Н. Беляев***

Предложен метод рекуррентного вычисления матрицы, характеризующей распространение упругих волн в периодической слоистой структуре. Сделана оценка эффективности этого метода.

## Введение

Одним из эффективных теоретических методов исследования распространения волн в слоистых средах стал матричный формализм, согласно которому $i$-ый слой рассматриваемой структуры характеризуется определённой матрицей $M_i$, а система из $N$ слоёв описывается матрицей $M$, получающейся при перемножении в определённом порядке характеристических матриц всех слоёв системы: $M = \prod_{i=1}^{N} M_i$. Данный метод позволяет при рассмотрении интерференционных решений обойти сложную процедуру удовлетворения всех граничных условий на межслойных границах структуры.

Впервые метод характеристической матрицы был предложен в середине XX века Ф. Абеле [1] для расчёта оптических и В.Томсоном [2] и Н. Хаскелом [3] — упругих свойств слоистых сред с плоскопараллельными границами. Так, многослойная диэлектрическая плёнка, состоящая из однородных слоёв, характеризуется относительно своих оптических свойств матрицей $2 \times 2$. Упругие свойства однородных слоёв характеризуются матрицами 4 – 6 порядков [4].

В данной работе рассматривается задача вычисления характеристической матрицы среды, состоящей из большого числа одинаковых по структуре слоёв.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № 02.740.11.0618

### Метод вычисления

По теореме Гамильтона-Кэли, каждая матрица $n$-го порядка удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$M^n - p_1 M^{n-1} - \ldots - p_{n-1} M - p_n I = 0, \tag{1}$$

где $I$ — единичная матрица, а коффициенты $p_i$ выражаются через $\sigma_i$ — суммы всех $C_n^i$ главных миноров $k$-го порядка определителя матрицы $M$:

$$p_i = (-1)^{i-1}\sigma_i, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Из формулы (1) нетрудно заметить, что любая целая степень квадратной матрицы $M$ $n$-го порядка может быть выражена через первые $n$ степеней этой матрицы: $M^0 \equiv I$, $M$, $M^2$, $M^3, \ldots, M^{n-1}$.

Теорема [5]. *Целочисленная степень квадратной матрицы $n$-го порядка может быть найдена по формуле*:

$$\begin{aligned} M^k = {} & M^{n-1} B_k + M^{n-2}(B_{k+1} - p_1 B_k) + M^{n-3}(B_{k+2} - p_1 B_{k+1} - p_2 B_k) + \ldots + \\ & + M\left(B_{k+n-2} - p_1 B_{k+n-3} - \ldots - p_{n-2} B_k\right) + \\ & + I\left(B_{k+n-1} - p_1 B_{k+n-2} - \ldots - p_{n-1} B_k\right), \end{aligned} \tag{3}$$

*где многочлены $B_k$ определяются рекуррентными формулами*

$$B_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; k = 0, 1, \ldots, n-2, \\ 1, & \text{если} \;\; k = n-1 \\ p_1 B_{k-1} + p_2 B_{k-2} + \ldots + p_n B_{k-n}, & k \geq n. \end{cases} \tag{4}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости формулы (3) при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Для других $k$ докажем равенство (3) по индукции.

Предположим, что равенство (3) выполняется при $k = N \geq n$ и покажем его справедливость при $k = N + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} M^{N+1} = MM^N = {} & M^n B_N + M^{n-1}(B_{N+1} - p_1 B_N) + \\ & + M^{n-2}(B_{N+2} - p_1 B_{N+1} - p_2 B_N) + \ldots + \\ & + M^2\left(B_{N+n-2} - p_1 B_{N+n-3} - p_{n-2} B_N\right) + \\ & + M\left(B_{N+n-1} - p_1 B_{N+n-2} - p_{n-1} B_N\right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства можно представить, согласно теореме Гамильтона-Кэли, в виде:

$$M^n B_N = M^{n-1} p_1 B_N + M^{n-2} p_2 B_N + \ldots + M p_{n-1} B_N + I p_n B_N.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу и преобразуя её с учётом подобных слагаемых, получаем:

$$
\begin{aligned}
M^{N+1} = & M^{n-1} B_{N+1} + \\
& + M^{n-2}(B_{N+2} - p_1 B_{N+1}) + \ldots + \\
& + M^2 (B_{N+n-2} - p_1 B_{N+n-3} - p_{n-3} B_{N+1}) + \\
& + M (B_{N+n-1} - p_1 B_{N+n-2} - \ldots - p_{n-2} B_{N+1}) + \\
& + I p_n B_N = \\
= & M^{n-1} B_{N+1} + \\
& + M^{n-2}(B_{N+2} - p_1 B_{N+1}) + \ldots + \\
& + M^2 (B_{N+n-2} - p_1 B_{N+n-3} - \ldots - p_{n-3} B_{N+1}) + \\
& + M (B_{N+n-1} - p_1 B_{N+n-2} - \ldots - p_{n-2} B_{N+1}) + \\
& + I (B_{N+n} - p_1 B_{N+n-1} - \ldots - p_{n-1} B_{N+1}),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Преобразуем каждый из множителей, стоящих при матрицах в правой части равенства (3), используя формулы (4), определяющие многочлены $B_j$ . В результате получим формулу, которая более удобна для численных расчётов степеней матрицы:

$$
\begin{aligned}
M^k = & M^{n-1} (p_1 B_{k-1} + \ldots + p_n B_{k-n}) + M^{n-2}(p_2 B_{k-1} + \ldots + p_n B_{k+1-n}) + \ldots + \\
& + M (p_{n-1} B_{k-1} + p_n B_{k-2}) + I p_n B_{k-1} = \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} M^i \sum_{j=0}^{i} p_{n-i+j} B_{k-1-j} \,. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

**Матрицы второго порядка**

Пусть $M$ — матрица второго порядка. Тогда по формуле (5) имеем:

$$M^k = B_k M - B_{k-1} \sigma_2 I, \qquad (6)$$

где многочлены $B_k$ зависят от следа $\mathrm{tr}\, M \equiv \sigma_1$ и определителя $\det M \equiv \sigma_2$ матрицы $M$ и определяются рекуррентными формулами

$$B_k = \sigma_1 B_{k-1} - \sigma_2 B_{k-2}, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1. \qquad (7)$$

Если $\det M \neq 0$, формулу (6) можно представить в иной форме:

$$M^k = r^{k-1} U_{k-1}(b) M - r^k U_{k-2}(b) I, \qquad (8)$$

где

$$r = \sqrt{\det M}, \quad b = \frac{\operatorname{tr} M}{2\sqrt{\det M}}\,, \tag{9}$$

а полиномы $U_n(b)$ определяются рекуррентными формулами

$$U_k(b) = 2bU_{k-1}(b) - U_{k-2}(b), \quad U_0(b) = 1, \quad U_1(b) = 2b. \tag{10}$$

Связь между полиномами $U_k$ и $B_k$ выражается равенством:

$$U_k = B_{k+1}(\det M)^{-\frac{k}{2}}.$$

Заметим, что при $-1 \le b \le 1$, функции, определяемые формулами (10), — это ортогональные полиномы Чебышёва второго рода, явный вид которых задаётся формулой:

$$U_k(b) = \frac{\sin[(k+1)\arccos b]}{\sqrt{1-b^2}}\,. \tag{11}$$

Для случая унимодулярной матрицы из равенств (8-11) следует результат, известный как теорема Сильвестра [6]:

$$\begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Vmatrix}^k = \begin{Vmatrix} m_{11}U_{k-1}(b) - U_{k-2}(b) & m_{12}U_{k-1}(b) \\ m_{21}U_{k-1}(b) & m_{22}U_{k-1}(b) - U_{k-2}(b) \end{Vmatrix},$$

где

$$b = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}).$$

Если порядок матрицы выше 2, представление её степеней в форме, аналогичной (8), возможно при специальном виде матрицы. Одна из таких возможностей рассмотрена в [5].

**Алгоритм численных расчётов**

В общем случае вычисление $M^k$ $(k > n)$ удобно проводить по формуле (5), используя рекуррентную процедуру нахождения многочленов $B_j$. Последовательность действий можно разделить на три этапа.

1) Вычисление степеней матрицы $M$ со второй по $n$-ю включительно и нахождение следа $s_i$ для каждой из матриц $M^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

2) Последовательное вычисление коэффициентов $p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ можно выполнить по формуле Ньютона [7]:

$$ip_i = s_i - p_1 s_{i-1} - \ldots - p_{i-1}s_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

В частности,

$$p_1 = s_1, \quad p_2 = \frac{1}{2}(s_2 - p_1 s_1), \quad p_3 = \frac{1}{3}(s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1), \ldots$$

3) Значения многочленов $B_j$ $(j = n, \ldots, k-1)$ определяются по рекуррентной формуле (4).

Несложно оценить трудоёмкость данной процедуры по сравнению с обычным перемножением матриц. Число операций сложения и умножения, необходимое для возведения матрицы $n$-го порядка в $k$-ю степень $(k > n)$ по предлагаемому в данной работе методу не превышает $N_1 = n\,[(n-1)(2n+k-3) + 2n + 1]$. Если же вычислять $M^k$ как $k-1$ произведение матриц $M$, то это потребует $N_2 = n^2(2n-1)(k-1)$ операций сложения и умножения.

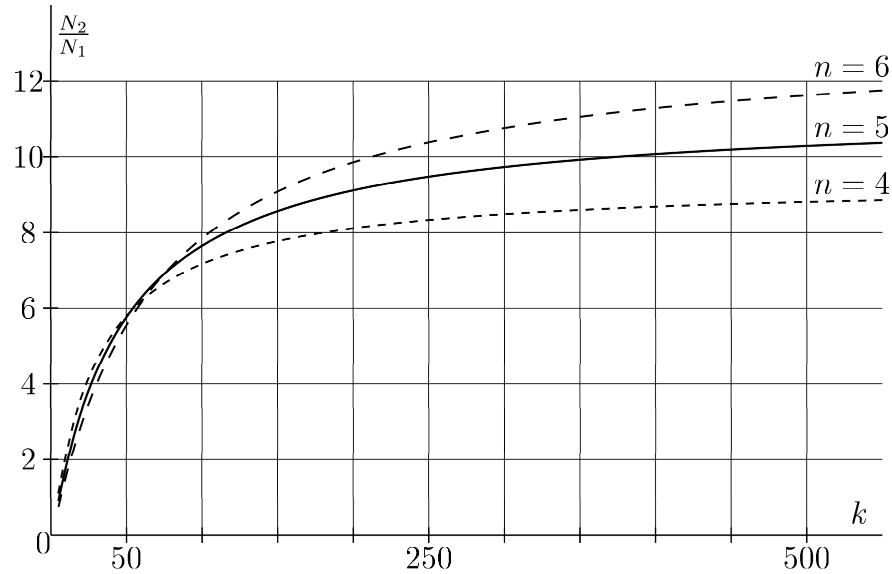


Рис. 1

На рис. 1 показана зависимость отношения $N_2/N_1$ от степени $k$ для матриц 4,5,6 порядков. Уже для структуры с 25 слоями предлагаемый метод численного расчёта характеристической матрицы не менее чем в три раза эффективнее (по числу операций и, следовательно, по точности счёта), чем обычное перемножение. А для 250 слойной структуры выигрыш составляет более чем в 8,9 и 10 раз соответственно для матриц 4, 5 и 6 порядков.

## Литература

1. **Abelés F.** Recherehes sur la propagation des ondes electromagnetiques sinusoidals dans les stratifiés melieux. Application aux conches minces // Ann. Phys. 1950. V. 5, P. 596-640, 706-782.

2. **Tomson W.T.** Transmission of elastic wave through a stratified solid matirial // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 1. P. 89-93.

3. **Haskel N.A.** The dispersion of surface waves on multilayered media// Bul. Seismol. Sos. Amer. 1953. V. 43. № 1. P. 17-34.

4. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.

5. **Беляев Ю.Н.** Алгебра тензоров. Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2009. 180 с.

6. **Gerrard A., Burch J.M.** ntroduction to matrix methods in optics. London,:J. Wiley and Sons, 1975. 355 p.

7. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

**Summary**

**Belyaev Y.N.** Characteristic matrix of laered-periodic structure

The method of recurrent calculation of the matrix characterising distribution of elastic waves in periodic layered structure is offered. The estimation of efficiency of this method is made.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 17.04.2010*